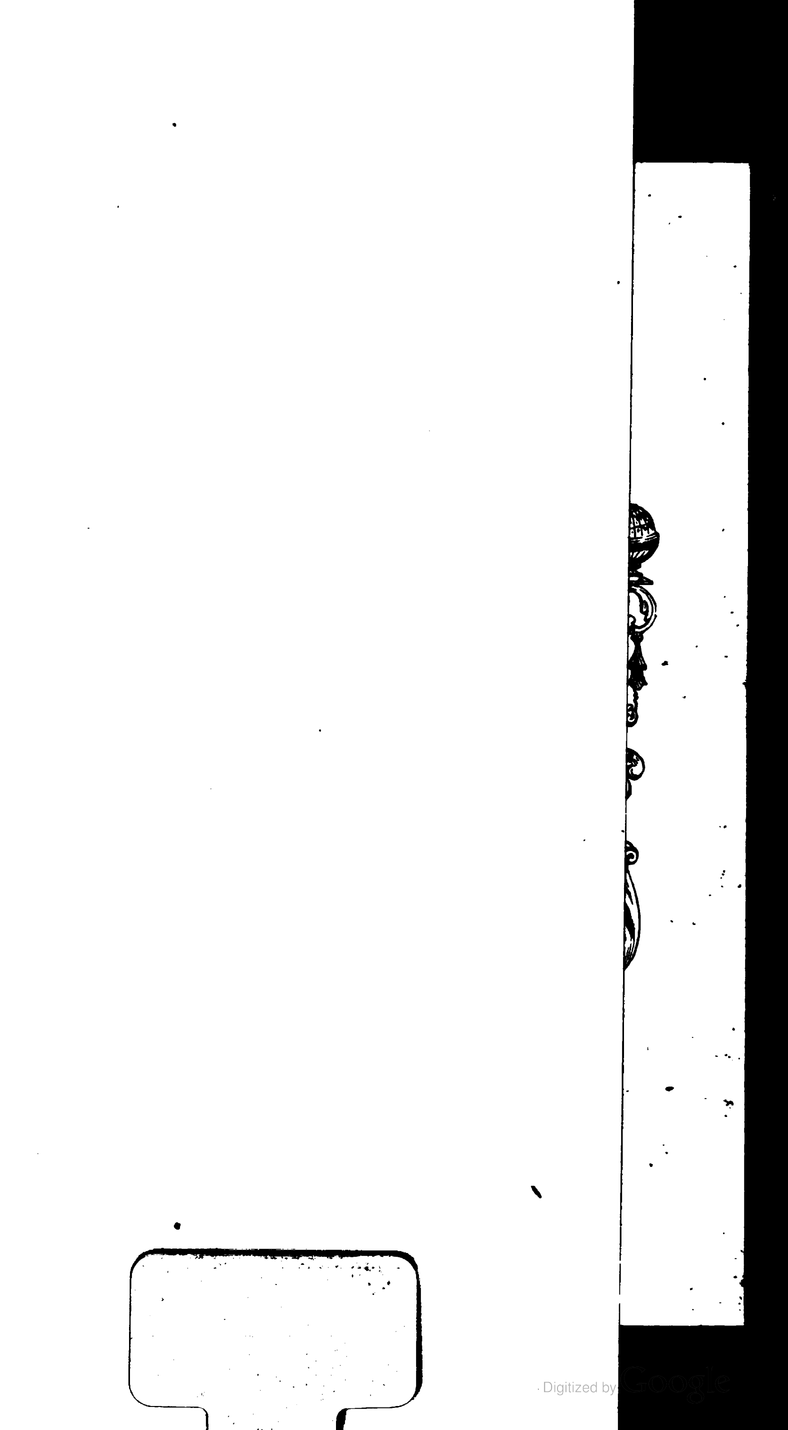
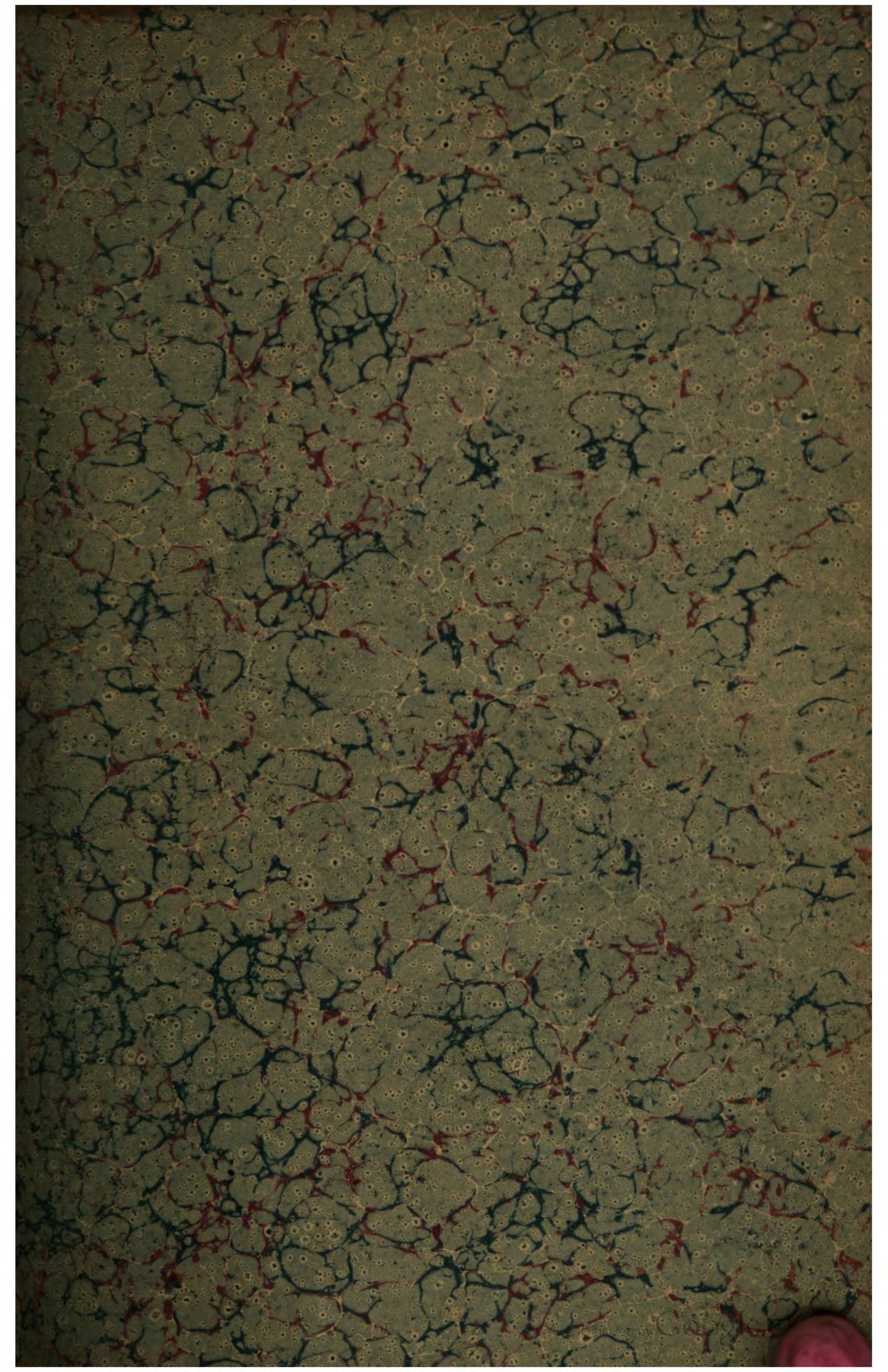

R
C
A
C
L. DUJARDIN. SC





COURS
DE MÉCANIQUE
THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

ENSEIGNEMENT SPECIAL
ET PROFESSIONNEL

COURS
DE MÉCANIQUE
THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

A L'USAGE
DES ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL
DES ÉCOLES D'ARTS ET MÉTIERS ET DES INDUSTRIELS

PAR MM.

FUSTEGUERAS
Préparateur à l'École
Professeur de mécanique et de travaux graphiques au collége

HERGOT
Ancien élève de l'École d'arts et métiers de Châlons, préparateur à l'Ecole normale spéciale

DE CLUNY

TROISIÈME ANNÉE

STATIQUE — CINÉMATIQUE — DYNAMIQUE

Avec 248 figures dans le texte

PARIS

G. MASSON, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

PLACE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE

M DCCC LXXIII

INTRODUCTION

La Mécanique est, sans contredit, la science qui est le plus en rapport avec les besoins modernes. « Elle régit en effet toute l'industrie de l'homme, puisque le plus faible travail exige de lui une dépense de force. » Nul ne devrait ignorer les éléments de cette science si féconde en applications. Mettre ces éléments à la portée de tous les jeunes gens qui se destinent aux différentes branches de l'industrie, et qui n'ont, en général que des connaissances fort restreintes en mathématiques, tel a été le but vers lequel ont tendu tous nos efforts. C'est ainsi que, en écrivant ce livre particulièrement destiné à l'Enseignement spécial, nous n'avons pas voulu nous restreindre à ses programmes officiels. Nous sommes allés au delà, nous en avons franchi les limites, et l'ouvrage que nous offrons au public s'adresse non-seulement aux élèves de l'Enseignement spécial et des Écoles des arts et métiers, mais encore à tous ceux qui se préparent au baccalauréat, à l'École centrale, etc.

Parfaitement secondés par notre Éditeur, qui n'a pas reculé devant les frais considérables nécessités par l'illustration, notre Cours de Mécanique, sur 360 figures, en compte plus de 220 spécialement gravées pour cet ouvrage.

Nous avons divisé le cours complet en deux volumes dont le premier comprend la Statique, la Cinématique et la Dynamique, et dont le second traite des Moteurs et des Récepteurs industriels.

En Statique, nous avons établi d'une manière complète la composition, la décomposition et l'équilibre des forces concourantes et parallèles ; la théorie des mouvements, qui nous a permis de donner, à la recherche du centre de gravité, tous les développements que mérite une question d'une aussi grande importance dans la pratique. Nous avons traité ensuite la composition et l'équilibre d'un système quelconque de forces, l'équilibre des corps solides, des liquides, et des corps plongés et flottants dans les liquides. Enfin, nous avons appliqué les principes de la Statique aux machines suivantes : leviers, balances, poulies, palans, treuils, chèvres, grues et palan incliné.

La Cinématique a été appelée, et non sans raison, « la science du constructeur. » Elle renferme des questions pratiques qui ne sauraient jamais être traitées avec trop de détails. Après avoir exposé les relations analytiques et géométriques des divers mouvements, et la composition des mouvements simultanés, nous avons donné les organes de transformations de mouvement. Ils comprennent : le plan incliné, le coin, la vis, les rouleaux, les poulies et courroies, les engrenages plans et coniques, la vis sans fin, les cames et excentriques avec leurs lois de mouvement, les joints, les parallélogrammes articulés, et enfin les encliquetages et les

embrayages. Ces mécanismes, notamment les engrenages et les cames que l'on rencontre dans presque toutes les machines, constituant une des parties les plus importantes du cours, ont été l'objet d'une étude particulière.

La Dynamique comporte les principales divisions suivantes : les quatre principes généraux et leurs conséquences : Mouvement produit par une force constante; mouvement des corps pesants lancés obliquement dans le vide ; proportionnalité des forces aux accélérations et aux vitesses ; relations entre les forces, les masses et les accélérations. — Théorèmes relatifs aux quantités de mouvement. — Théorème du mouvement du centre de gravité. — Travail des forces. — Principe de l'effet du travail. — Principe de la transmission du travail dans les machines. — Résistances passives. — Choc des corps. — Force centrifuge. — Théorie élémentaire et lois du pendule simple.

Dans le deuxième volume, nous avons traité rapidement les moteurs animés et les moteurs à vent, vu leur peu d'importance industrielle; mais il n'en a pas été ainsi pour les récepteurs hydrauliques et les machines à vapeur que nous avons exposés d'une manière complète, sans même négliger les détails de construction. C'est ainsi qu'après avoir parlé des divers modes d'écoulement des liquides et avoir posé l'équation générale du travail dans les récepteurs hydrauliques, nous avons étudié ceux-ci, chacun en particulier.

Dans l'étude des machines à vapeur, nous avons considéré deux parties bien distinctes : les générateurs ou chaudières et les récepteurs ou machines. Pour ces dernières, nous avons appris à calculer le travail dans chaque classe, et traité ensuite les intéressantes questions de la distribution de la vapeur, de la réglementation des tiroirs, la théorie des ré-

gulateurs à force centrifuge et des volants. Le cours se termine par des notions sommaires sur les machines à vapeur combinées, à air chaud et à gaz.

Tel est le cadre de cet ouvrage. Remplira-t-il le but que nous nous sommes proposé? Le public, dont nous réclamons le bienveillant accueil, nous le prouvera par son jugement.

Cluny, le 15 septembre 1872.

R. FUSTEGUERAS, A. HERGOT.

COURS
DE MÉCANIQUE
THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

STATIQUE – CINÉMATIQUE – DYNAMIQUE

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET DÉFINITIONS

1. Matière. — On désigne sous le nom de matière tout ce qui est susceptible d'affecter nos sens. Exemples : l'eau, l'air, la terre.

2. Corps. Leur constitution physique. — Les corps sont des portions finies, déterminées de la matière. Ils sont formés par la réunion de très-petites parties de matière extrêmement voisines appelées *molécules*, laissant entre elles des intervalles appelés *pores* dont la grandeur varie suivant les corps et suivant les circonstances. Ces molécules exercent entre elles des actions intérieures moléculaires qui peuvent se diviser en deux classes : les unes *attractives* et les autres *répulsives*.

Les corps se présentent dans la nature sous trois états différents : 1° état *solide ;* 2° état *liquide ;* et 3° état *gazeux*. Ils prennent alors les noms de *solides*, *liquides* et *gaz ;* la dénomination de *fluide* s'applique indistinctement aux liquides et aux gaz.

Un corps *solide* est un corps ayant une forme déterminée qui

ne peut être modifiée qu'en exerçant un effort parfois très-considérable, et dépendant de la matière dont il est constitué ; la pierre, le fer, le bois, nous en offrent des exemples.

Si l'on prend un corps solide et qu'on cherche à l'étirer, il s'allonge d'une certaine quantité, et si cet allongement n'est pas très-considérable, les molécules reviendront occuper leur position primitive dès que ce corps sera abandonné à lui-même ; cette cause tendant à rapprocher les molécules ou à en empêcher l'éloignement est la *cohésion*. Comme celle-ci agit toujours et qu'il y a un certain intervalle entre les différentes molécules composant un corps solide, on est conduit à supposer l'existence d'une seconde cause agissant contre la première et qui a pour fonction de la contre-balancer, c'est la *répulsion*.

La cohésion est très-grande dans les corps solides, et par suite leur déformation nécessite, comme nous l'avons dit, l'intervention d'un certain effort.

Un corps *liquide* est un corps dont les molécules sont très-mobiles et glissent pour ainsi dire sans frottement les unes sur les autres ; sa forme se modifie très-facilement ; il prend celle du vase qui le contient. Le caractère distinctif des corps liquides est d'être à peu près incompressibles.

La cohésion est très-faible dans les corps liquides.

Un corps *gazeux* est un corps qui a ses molécules excessivement mobiles et dont le volume tend toujours à augmenter. Les corps gazeux sont très-compressibles, et à l'instant où la compression vient à cesser ils reprennent immédiatement leur volume primitif; ils sont appelés pour cette raison *fluides élastiques*.

La cohésion est nulle dans les corps gazeux.

3. Point matériel. — On donne le nom de *point matériel* à un corps de dimensions infiniment petites jouissant des propriétés de la matière, mais n'existant que dans la pensée.

4. Constitution des corps solides considérés en mécanique. — Les corps solides tels que nous les considérerons dans l'étude de la mécanique sont des corps incompressibles composés d'un assemblage de points matériels liés entre eux par des droites rigides et inextensibles de manière à obtenir des systèmes de forme et de dimensions invariables.

5. Mouvement et repos absolus. Mouvement et repos re-

latifs. — Un corps est dit en *mouvement* lorsqu'il occupe successivement diverses positions dans l'espace, et il est dit en *repos* lorsqu'il reste constamment à la même place.

Pour apprécier le changement de position des corps dans l'espace, on les rapporte à des points fixes, ou considérés comme fixes, qu'on appelle *points de repère;* le mouvement et le repos sont *absolus* lorsqu'on les rapporte à des points réellement fixes, et ils sont *relatifs* lorsque les points de repère sont eux-mêmes emportés d'un mouvement commun avec les corps que l'on veut observer.

Supposons-nous transportés dans un wagon de chemin de fer en marche ; si nous n'apercevons pas les objets situés à l'extérieur, il nous semblera, au bout d'un certain temps, que nous sommes immobiles et nous n'aurons plus conscience du mouvement qui nous entraîne : c'est là le repos relatif. Un corps quelconque que nous ferions tomber, une boule qui roulerait, auraient un mouvement relatif.

Tous les mouvements que nous observons à la surface de la terre ne sont que des mouvements relatifs, car dans la nature, il n'existe aucun point réellement fixe. En effet, nous savons que la terre n'est point immobile ; en même temps qu'elle tourne autour de son axe en 24 heures, c'est-à-dire autour d'une ligne idéale qui joindrait ses deux pôles, elle se transporte en un an autour du soleil avec l'énorme rapidité de 35 kilomètres par seconde. Les corps célestes eux-mêmes sont animés de certains mouvements, et l'on peut admettre qu'il n'existe dans l'univers aucun point fixe, ou en repos absolu, pouvant nous faire connaître le véritable mouvement des objets qui nous entourent.

On conçoit néanmoins le repos absolu, et c'est ainsi que seront considérés les différents mouvements traités dans la suite du cours.

6. Principe de l'inertie. — Le principe de l'inertie peut s'énoncer ainsi : *un corps en repos ne peut se mettre de lui-même en mouvement, et un corps qui est en mouvement ne peut pas modifier cet état de mouvement.*

La première partie de ce principe, *un corps en repos ne peut se mettre de lui-même en mouvement*, nous est confirmée par l'observation des faits qui s'accomplissent journellement autour de

nous. En effet, nous voyons que si un corps en repos se met en mouvement, c'est toujours sous l'action de causes extérieures qui lui sont appliquées, et il resterait constamment en repos sans l'intermédiaire de ces causes ; cela est vrai pour la matière privée de vie.

Les êtres animés, au contraire, agissent, se meuvent suivant leurs caprices et leurs volontés ; ils se mettent d'eux-mêmes en mouvement. Il semblerait, par là, s'écarter de la loi générale de l'inertie, mais il n'en est rien : cette faculté qu'ils possèdent de se mouvoir à leur gré réside dans cette partie immatérielle de leur être qui leur est enlevée lorsque la mort vient s'appesantir sur eux.

La deuxième partie de ce principe, *un corps qui est en mouvement ne peut pas modifier son état de mouvement,* est moins compréhensible et paraît incompatible avec un grand nombre de faits que nous sommes à même d'observer ; mais cette erreur est bientôt dissipée par une étude plus attentive de ces faits.

Considérons une pierre lancée sur le sol ; son mouvement se ralentit peu à peu, et bientôt elle finit par s'arrêter complétement. Le même corps étant lancé sur un terrain horizontal et uni, la durée du mouvement se trouve augmentée d'une quantité assez notable. Si nous opérons sur une surface bien unie et horizontale, comme celle que nous présente un lac gelé, la durée du mouvement est encore plus longue que précédemment. Enfin, la pierre ayant été rendue sphérique et lancée sur la même surface, la durée du mouvement s'est encore accrue. Il résulte de cette expérience que la pierre éprouve à chaque instant un ralentissement dans son mouvement, et qu'elle parcourt un chemin d'autant plus considérable que le sol est plus uni et qu'elle présente une surface moins rugueuse. Cette modification apportée dans son mouvement provient de causes extérieures qui sont : les aspérités du sol et la résistance de l'air. Plus ces causes extérieures de ralentissement seront faibles et moins les modifications seront sensibles ; on en conclut que, à la limite, les causes extérieures étant anéanties, le corps continuerait indéfiniment à se mouvoir.

Ainsi, un corps en repos ne peut se mettre en mouvement, et un corps en mouvement ne peut pas modifier son état de mouvement : c'est ce qu'on exprime en disant que la matière est *inerte.*

Le principe de l'inertie nous permet de donner l'explication de certains phénomènes qui frappent notre esprit.

Si nous sommes dans une voiture en marche et que nous voulions en descendre, nous sommes renversés dans le sens du mouvement à l'instant où nous mettons les pieds à terre, car à ce moment nous possédons, en commun avec la voiture, le mouvement dont elle est animée, et qui, en vertu de l'inertie, tend à persévérer lorsque nous touchons le sol. Le danger est très-grand lorsque le véhicule marche avec rapidité; aussi serait-il très-dangereux de descendre d'un wagon de chemin de fer en marche ; on serait projeté avec violence sur la voie et on pourrait être tué.

Si nous nous trouvons debout dans une voiture lorsqu'elle se met en marche, nos pieds sont entraînés dans le sens du mouvement, et notre corps n'y participant pas encore, se trouve projeté en arrière. Le contraire arrive si la voiture s'arrête brusquement, notre corps se trouve projeté en avant.

Lorsqu'on veut emmancher un outil, un marteau par exemple, on introduit l'une des extrémités du manche dans l'œil du marteau, et l'on frappe vivement l'autre extrémité contre un objet résistant. L'arrêt brusque du manche fait que celui-ci s'enfonce dans le marteau en raison du mouvement précédemment acquis par l'outil.

7. Forces. — On désigne sous le nom de *force* toute cause qui modifie ou qui tend à modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps.

Nous savons, d'après le principe de l'inertie, qu'un corps ne peut se mettre en mouvement, ni modifier son état de mouvement; si donc un corps passe de l'état de repos à celui de mouvement, on peut affirmer qu'il est soumis à des causes extérieures qui lui font subir ces modifications : ce sont ces causes extérieures qui sont appelées *forces*.

Les principales forces employées dans l'industrie sont de différentes natures, elles comprennent :

1° La force musculaire de l'homme et des animaux.
2° La pesanteur.
3° La chaleur.
4° La vitesse acquise.
5° L'électricité.
6° Les forces moléculaires.

Nous apprécierons plus tard et en particulier chacune de ces forces et les ingénieuses combinaisons d'appareils imaginés pour en tirer le plus d'avantages et le meilleur parti possible.

8. — Pour définir complétement une force, il y a quatre choses à considérer : 1° son point d'application ; 2° son intensité ; 3° sa direction, et 4° le sens de cette direction.

Le *point d'application* d'une force est le point matériel du corps sur lequel elle agit directement.

L'*intensité* d'une force est la grandeur de cette force, ou l'effort plus ou moins considérable qu'elle exerce, effort qui se compare à une unité de même nature.

La *direction* d'une force est la ligne droite suivant laquelle se mouvrait son point d'application s'il était simplement soumis à cette force.

Le *sens* d'une force est l'un des deux chemins que parcourt son point d'application relativement à un point fixe pris sur sa direction.

9. Effet des forces. — Lorsqu'une force est appliquée en un point quelconque d'un corps en mouvement, elle n'a pas toujours pour effet de modifier ce mouvement, ou si ce corps est en repos, de le mettre en mouvement, car l'action de cette force peut être contre-balancée par la combinaison de plusieurs autres agissant simultanément. Si, par exemple, une pierre est en repos sur une table, cela ne veut pas dire que cette pierre n'est soumise à aucune force ; en effet, la pesanteur agissant constamment, supprimons par la pensée cette table qui est un obstacle à la chute du corps et celui-ci tombera. Le même corps étant attaché à l'extrémité d'un fil dont l'autre extrémité est maintenue à un point fixe, il n'y aura aucun indice de mouvement, en admettant que le fil soit suffisamment résistant pour supporter le poids du corps ; celui-ci restera dans une immobilité complète ; mais si l'on vient à couper le fil, la pierre se dirige vers le sol.

Dans chacun de ces cas, la pierre étant toujours soumise à l'action de la pesanteur et son mouvement étant nul, on dit d'une manière générale que le corps est en *équilibre*. Or l'action de la pesanteur sur un corps ne peut être détruite et il en serait de même de toute autre force ; il faut donc que l'effet résultant de cette action soit équilibré par la *pression* ou par la *tension* qu'elle

détermine sur l'obstacle. La pierre posée sur la table produit une *pression* sur cette table, et suspendue à l'extrémité du fil, elle y détermine une *tension.*

Les forces peuvent être favorables ou défavorables au mouvement suivant les circonstances dans lesquelles elles agissent; elles prennent alors les noms de :

Forces *motrices* ou *puissances.*
Forces *retardatrices* ou *résistances.*

Les forces *motrices* sont celles qui donnent naissance au mouvement ou qui le produisent, et les forces *retardatrices* sont celles qui tendent à diminuer l'action des forces motrices.

10. Principe de la réaction égale et contraire à l'action. —Ce principe, posé pour la première fois par Newton, peut s'énoncer ainsi : *lorsqu'une force est appliquée à un corps, celui-ci réagit avec une action égale et contraire.* Ainsi, lorsqu'on exerce une pression ou une traction en un point quelconque d'un corps, comme par exemple, si l'on tire un fardeau au moyen d'une corde, ou qu'on le pousse, soit à la main, soit par l'intermédiaire d'une barre, le fardeau exerce en sens contraire une traction ou une pression égale à celle qui lui est appliquée. Si une pierre est posée sur une table, elle exerce sur cette table une pression dirigée de haut en bas, et à son tour, la table réagit avec une action égale et contraire.

D'après la constitution physique des corps solides, nous savons que les molécules sont soumises à l'action de deux forces appelées forces *moléculaires* ou forces *mutuelles*, les unes attractives tendant à rapprocher ces molécules et les autres répulsives tendant à les éloigner. La réaction déterminée par la pression ou par la traction exercée sur un corps provient des forces mutuelles qui sont en jeu entre les molécules qui les composent, car ces forces peuvent être assimilées à de petits ressorts parfaitement élastiques se comprimant ou se détendant sous l'influence d'un effort appliqué à la masse des molécules ou au corps, et ces ressorts donnent naissance, par leur réaction, à une force égale et contraire.

Si nous considérons deux molécules d'un même corps ou de

deux corps différents, le principe de la réaction égale et contraire à l'action consiste en ce que :

1° Ces molécules exercent entre elles une action réciproque ;

2° Cette action est dirigée suivant la droite qui joint les deux molécules ;

3° L'action exercée par l'une de ces molécules est égale et directement opposée à celle exercée par l'autre ;

4° L'action varie avec la distance ; elle est d'autant plus grande que les molécules sont plus rapprochées.

Une foule de phénomènes que nous observons tous les jours ne sont qu'une application de ce principe. Si nous marchons, et si nous nous transportons d'un lieu à un autre, c'est en vertu de la réaction du sol, lorsque nos pieds viennent s'y appliquer. Le mouvement d'une embarcation est déterminé par la réaction de l'eau frappée par les rames ; l'eau réagit également pour faire avancer une personne qui nage, car celle-ci, en étendant et en reployant les bras et les jambes, repousse l'eau qui par sa réaction imprime au corps un mouvement en sens contraire de celui du liquide. Si l'aimant attire le fer, celui-ci réagit avec une action égale et directement opposée.

Les réactions qu'exercent entre eux les corps que nous considérons à la surface de notre globe s'exercent également entre tous les corps célestes. Ainsi, la lune exerce sur la terre une attraction qui produit le phénomène des marées, et réciproquement la terre réagit sur son satellite avec une action égale et contraire qui le force à décrire une orbite elliptique.

11. Division de la mécanique. — La mécanique se divise en trois parties : 1° *statique ;* 2° *cinématique ;* et 3° *dynamique.*

La *statique* est la partie de la mécanique qui traite de l'équilibre des forces indépendamment des mouvements qu'elles produisent. On l'appelle aussi la *science de l'équilibre.*

La *cinématique* est la partie de la mécanique qui traite du mouvement des corps indépendamment des forces qui le produisent.

La *dynamique* est la partie de la mécanique qui traite des relations existant entre les forces et les mouvements qu'elles produisent.

PREMIÈRE PARTIE

STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

§ 1. — CONSIDÉRATIONS SUR LES FORCES

12. Forces égales. — Forces multiples. — Deux forces, quelle que soit leur nature, sont dites *égales* lorsque étant appliquées successivement à un même point matériel et dans les mêmes circonstances, elles produisent des effets identiques, ou lorsque étant appliquées simultanément à un même point matériel, dans la même direction, mais dans un sens opposé, elles ne produisent aucun mouvement, c'est-à-dire qu'il y ait équilibre.

Une force *double* d'une autre est une force susceptible de pouvoir se subdiviser en deux forces égales, pouvant chacune remplacer l'action de cette autre force, ou une force faisant équilibre à l'action simultanée de deux forces égales agissant dans la même direction, mais de sens opposé à la première.

En général, une force est *multiple* d'une autre, si elle est susceptible de pouvoir se subdiviser en un certain nombre entier n de parties égales pouvant chacune remplacer l'action de cette autre force, ou une force faisant équilibre à l'action combinée de n forces égales agissant dans la même direction, mais de sens opposé à la première.

13. De la mesure des forces. Leur comparaison aux poids. — Les forces, malgré la diversité des effets qu'elles produisent, sont, comme toutes les grandeurs, susceptibles d'être mesurées,

c'est-à-dire d'être rapportées à une même unité de force prise pour type de comparaison. Pour cela, on a été conduit à imaginer des appareils aussi simples que possible, permettant de comparer toutes les forces à l'une d'elles, au poids des corps par exemple. Ces appareils sont appelés *dynamomètres*.

14. Dynamomètres. — Les dynamomètres servent à mesurer l'intensité des forces.

Le principe sur lequel repose leur construction est celui-ci : *lorsqu'une lame d'acier est soumise à un certain effort, cette lame fléchit, et si la limite d'élasticité n'a pas été dépassée, ou en d'autres termes, si la lame revient à sa position primitive quand la force a cessé d'agir, la flexion est proportionnelle à l'effort exercé.*

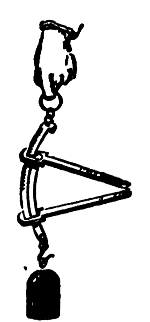
Considérons une lame d'acier AB (*fig.* 1) encastrée à l'une de ses extrémités A et soumise à un effort F appliqué à l'autre extrémité. Sous l'influence de cet effort, la lame AB fléchira et prendra une autre position AB′. Si nous substituons à la force F un poids P capable de faire occuper à la lame la même position AB′, l'effet de la force F et du poids P ayant produit une égale déformation, on convient de considérer ces deux forces comme étant égales, quoique de nature différente. De plus, si l'élasticité du ressort n'a pas été altérée, celui-ci produira la même flexion sous l'action de forces quelconques, mais égales aux précédentes.



Fig. 1.

Les dynamomètres les plus employés sont les suivants :

15. Peson à ressort. — L'appareil indiqué (*fig.* 2) représente le dynamomètre le plus simple. Il se compose essentiellement d'un ressort en acier trempé recourbé en deux branches égales ; à l'extrémité de la branche inférieure est fixé un arc de cercle ordinairement en fer, qui passe librement dans une ouverture pratiquée à la branche supérieure, et qui est terminé par un anneau servant à maintenir l'instrument, soit à la main, soit à un point fixe. Un autre arc concentrique au premier, lié invariablement à la branche supérieure et passant libre-


Fig. 2.

ment dans une ouverture pratiquée dans la branche inférieure, est muni, à son extrémité, d'un crochet auquel on applique les forces dont on veut mesurer l'intensité.

L'unité de force adoptée en France est le kilogramme, c'est-à-dire le poids d'un litre d'eau pure prise à son maximum de densité, ou à 4 degrés centigrades au-dessus de 0. Donc, une force quelconque étant donnée, on obtiendra l'intensité ou la grandeur de cette force en déterminant le nombre de kilogrammes qui, étant appliqués au même point, dans le même sens et dans la même direction, produiraient identiquement le même effet.

Cela posé, pour graduer l'appareil, on suspendra au crochet inférieur un poids de 1 kilogramme par exemple; sous l'action de ce poids, les deux branches du dynamomètre se rapprocheront et l'on marquera la division 1 sur l'arc terminé par un crochet au point où s'est arrêtée la branche supérieure. On ajoutera un poids de 1 kilogramme au précédent, ce qui fera un poids de 2 kilogrammes, et l'on marquera la division 2 au second point déterminé par la nouvelle position de la branche supérieure; on opérera de même pour des poids de 3, 4, 5.... kilogrammes.

Si nous appliquons au crochet de cet appareil ainsi gradué un effort quelconque, l'anneau étant maintenu soit à la main, soit à un point fixe, l'intensité de l'effort sera indiquée par la flexion du ressort; il suffira alors de lire sur l'arc la division correspondante à la position de la branche supérieure.

Pour apprécier les fractions de kilogramme, on divisera les intervalles successifs 1.2, 2.3, 3.4... en un certain nombre de parties égales, suivant le degré d'approximation que l'on veut obtenir.

Afin de ne pas faire supporter au ressort des flexions trop grandes, qui auraient pour effet d'altérer sa sensibilité, car il ne reprendrait plus sa position initiale lorsqu'il serait abandonné à lui-même, on a disposé sur l'arc gradué un talon saillant qui, en venant buter contre la branche supérieure, empêche un trop grand rapprochement des deux lames.

16. — On emploie quelquefois un peson (*fig.* 3) formé d'un ressort en hélice enfermé dans une boîte cylindrique en cuivre terminée à sa partie inférieure par un crochet auquel on applique la force à évaluer. Le ressort est fixé d'une part au couvercle supérieur de son enveloppe et de l'autre à un disque cylindrique

formant piston, muni d'une tige dont l'axe correspond à celui du ressort. Cette tige est terminée en dehors de la boîte par un anneau servant à maintenir l'appareil.

Une force plus ou moins considérable, agissant à l'extrémité du crochet inférieur, aura pour effet de comprimer le ressort, et la tige sortira de son enveloppe d'une quantité d'autant plus grande que la flexion sera plus forte.

La graduation se fera d'une manière analogue à celle indiquée précédemment, en suspendant des poids au crochet inférieur et en indiquant les divisions correspondantes aux différents points d'affleurement de la tige et du couvercle supérieur du cylindre.

Les deux dynamomètres que nous venons de décrire ne permettent d'évaluer que des efforts peu considérables; ils sont d'un usage fréquent dans le commerce. Si les forces que l'on veut évaluer sont très-grandes, on se sert du dynamomètre Régnier.

Fig. 3.

17. Dynamomètre Régnier.— Cet instrument (*fig. 4*) est formé de deux lames d'acier AB et CD, légèrement convexes, réunies à leurs extrémités par deux pièces recourbées G et F; l'une d'elles F est maintenue à un point fixe et l'autre G reçoit l'effort que l'on veut mesurer. Au milieu de la branche CD est articulé un levier LM se reliant avec un levier coudé KIL dont la grande branche déplace une aiguille OE mobile autour du point O. Celle-ci peut parcourir les divisions d'un limbe gradué faisant partie d'une pièce fixée sur la branche supérieure AB du dynamomètre.

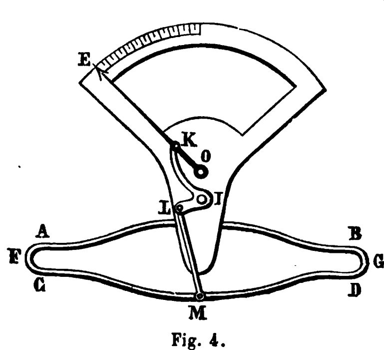


Fig. 4.

Pour se servir de l'appareil, on fixe d'abord l'extrémité F et on applique en G la force dont on veut connaître l'intensité; sous l'influence de cette force ou de cette traction, les lames tendent à se rapprocher; l'extrémité L du levier LM agit sur le levier KIL pour ramener la pointe E de l'aiguille vers la droite et

celle-ci parcourt un arc variant avec la grandeur de l'effort.

Le mode de graduation est identique au précédent.

La disposition du dynamomètre Régnier présente un inconvénient assez notable lorsqu'il est employé à l'évaluation des forces dont l'intensité varie à chaque instant, comme par exemple, dans le cas d'un cheval attelé à une voiture. L'action variable du cheval jointe aux inégalités que présente le sol font que, en aucun point du parcours, l'effort à vaincre n'est constant. Il résulte de là des oscillations permanentes de l'extrémité de l'aiguille, et par suite l'impossibilité d'apprécier exactement les indications qu'elle fournit. On remplace alors ce dynamomètre par le dynamomètre de traction à indications continues de M. Morin.

18. Représentation graphique des forces. — Considérons un corps M (*fig.* 5) auquel est appliquée une force F dont on connaît le point d'application, la direction, l'intensité et le sens. Pour représenter graphiquement cette force, on mène par son point d'application B une droite BF se confondant avec la direction de la force, et sur cette droite, on porte à partir du point B et dans le sens convenable indiqué par une flèche, une longueur BF proportionnelle à son intensité.

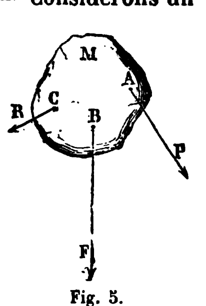


Fig. 5.

On adopte, pour représenter l'unité de force ou 1 kilogramme, une certaine longueur, $0^{m},01$ par exemple, et l'on porte sur la direction de BF autant de centimètres que la force mesure de kilogrammes.

Cette représentation graphique des forces sera d'un emploi continuel dans la suite du cours, et permettra une exposition claire et simple des principes de la statique.

19. Principes généraux. — Avant de commencer les différentes théories relatives aux forces, il est indispensable de faire connaître quelques principes nés de l'expérience et admis comme axiomes, sur lesquels on s'appuie constamment en statique.

1° *Deux forces égales et directement opposées appliquées en un même point d'un corps solide, ou agissant aux extrémités d'une même droite, se font équilibre.*

2° *Si un corps mobile autour d'un point fixe ou d'un axe fixe est sollicité par une seule force qui ne passe pas par ce point fixe*

ou qui n'est pas contenu dans un même plan avec l'axe fixe, ce corps n'est pas en équilibre.

3° *Si un corps mobile est en équilibre sous l'action de plusieurs forces, on ne détruit pas cet équilibre en fixant un ou plusieurs points du corps ou si l'on introduit entre ces points de nouvelles liaisons.*

4° *Si un corps solide est en équilibre sous l'action de plusieurs forces, on peut, sans changer l'état d'équilibre de ce corps, supprimer ou introduire des forces qui seraient elles-mêmes en équilibre si elles étaient seules appliquées au corps.*

20. Conséquences de ces principes. — *Si une force est appliquée à un corps solide on peut, sans changer l'état de ce corps, transporter le point d'application de la force en un point quelconque de sa direction, si ce point est invariablement lié au premier.*

En effet, soit F une force appliquée en un point A d'un corps solide (*fig.* 6) et B un point quelconque lié invariablement au premier, pris sur la direction de cette force. Appliquons aux points B deux forces F′ et F″ égales entre elles, égales à la force F et agissant dans sa direction; l'état du corps ne sera pas changé. Mais les forces F et F″ étant égales, directement opposées, et agissant aux extrémités d'une même droite, se détruisent ; il reste donc la force F′ appliquée au point B, qui n'est autre que la force F transportée en ce point.

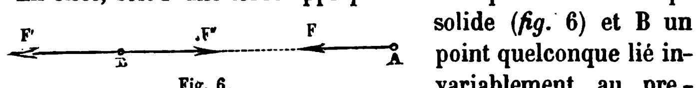


Fig. 6.

Si la direction d'une force passe par un point fixe, cette force est détruite. En effet, le point d'application de la force pouvant être transporté en un point quelconque de sa direction, ou au point fixe même, celui-ci détruit l'action de cette force.

Si la direction d'une force passe par un axe fixe, cette force est détruite. En effet, le point d'application de la force pouvant être transporté en un point quelconque de sa direction, si on transporte ce point à l'intersection de l'axe fixe et de la direction de la force, celle-ci sera détruite par la résistance de l'axe.

21. Division des forces. — Les forces se divisent en 3 classes :

1° Les forces *concourantes* dont les directions concourent en un même point ; nous les subdiviserons en forces *dirigées suivant*

une même droite et en forces *angulaires* dont les directions font entre elles un certain angle.

2° Les forces *parallèles* dont les directions sont parallèles.

3° Les forces *quelconques* qui ne sont ni concourantes ni parallèles.

22. Composition et décomposition des forces. — Quand on a un système de forces appliquées à un corps solide, il est souvent facile de les remplacer par une force unique produisant à elle seule le même effet que toutes les autres ; ce problème prend le nom de *composition des forces.*

Réciproquement, étant donnée une force agissant sur un corps solide, on peut se proposer de la remplacer par deux ou plusieurs autres forces satisfaisant à des conditions données et produisant sur le corps le même effet que la force unique primitive ; on donne à cette opération le nom de *décomposition des forces.*

23. Résultante et composantes. — Comme nous venons de le dire, il arrive souvent que plusieurs forces agissant sur un corps solide peuvent être remplacées par une seule force sans que l'effet produit sur le corps soit modifié. Toutes les fois qu'une force en remplace plusieurs autres, elle prend le nom de *résultante* des forces primitives auxquelles on donne le nom de *composantes.*

24. Lorsque plusieurs forces se font équilibre sur un corps solide, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. — Considérons un corps de forme invariable et parfaitement libre (*fig.* 7), sur lequel sont appliquées aux points D, C, B, A,... les forces en équilibre F, F′ F″.... Appliquons au point D une force R égale et directement opposée à la force F ; l'équilibre sera détruit et le corps se mouvra comme s'il n'était soumis qu'à l'action de cette force R dont l'effet se trouve annulé, d'un autre côté, par la force F. Les deux forces R et F se détruisant mutuellement, nous pouvons admettre que le corps n'est soumis qu'à l'action combinée des forces F′F″.... Si donc la force R produit à elle seule, sur le corps solide, le même effet que les forces F′, F″... elle peut les remplacer

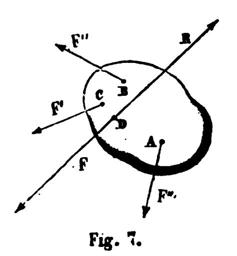


Fig. 7.

et la force F est bien égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres forces du système.

25. Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point matériel, elles admettent toujours une résultante unique. — Soit F, F′, F″, F‴, des forces appliquées à un point matériel A (*fig.* 8); ce point prendra sous l'action de ces forces une direction déterminée. Soit Ax cette direction ; il est évident qu'en appliquant au point A, dans la direction opposée Ay, une force d'intensité convenable, on pourra ramener ce point A au repos. Cette nouvelle force fera donc équilibre aux forces F, F′, F″, F‴ et par suite, elle sera égale et directement opposée à leur résultante. Donc cette résultante existe.

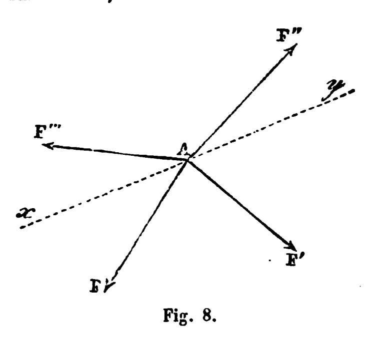


Fig. 8.

26. Quand un système de forces appliquées sur un corps solide admet une résultante, il ne peut en avoir qu'une. — En effet, supposons que le système quelconque de forces (*fig.* 9) puisse avoir deux résultantes, l'une R appliquée au point A et l'autre R′, appliquée au point B. Toutes les forces du système peuvent être remplacées par leur résultante R. Si nous appliquons au point B deux forces R′ et R″ égales et directement opposées, nous ne changerons rien à l'état du corps ; mais la force R′ étant, par hypothèse, une résultante du système, produit le même effet que l'autre résultante R. Par suite, les deux forces R et R″ doivent se faire équilibre sur le corps, ce qui exige que la force R″ soit égale et directement opposée à la force R, c'est-à-dire que les résultantes R et R′ se confondent en une seule et même force. Il ne peut donc y avoir qu'une seule résultante.

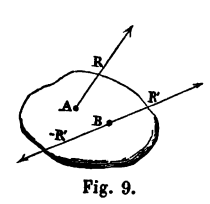


Fig. 9.

§ 2. — COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES CONCOURANTES

1° Forces dirigées suivant une même droite

27. Cas de deux forces de même sens. — Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 10) appliquées au même point A, dirigées suivant la droite Ax et dans le sens de A vers x. La résultante est égale à leur somme, dirigée suivant la même droite Ax, et elle agit dans le même sens que les composantes. En effet, supposons que les forces F et F′ soient commensurables et soit k leur commune mesure, de sorte que l'on ait :

X F F' A

Fig. 10.

$$F = ak \text{ et } F' = bk$$

D'après la définition des forces multiples, on peut remplacer la force F par a forces égales à k, et la force F′ par b forces égales aussi à k, toutes appliquées en A et dirigées de A vers x. Le point A se trouve ainsi soumis à l'action de $a+b$ forces égales à k, ou, ce qui revient au même, à l'action d'une seule force égale à la somme $(a+b)\,k$, c'est-à-dire à F + F′.

Cette proposition est également vraie lorsque les forces ne sont pas commensurables.

Si, au lieu de deux forces, il y en avait un plus grand nombre, F, F′, F″..., le même raisonnement ferait voir que la résultante R de toutes ces forces serait

$$R = F + F' + F'' + \ldots\ldots$$

28. Cas de deux forces de sens contraire. — Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 11) appliquées au point A et prenons F > F′. Nous pouvons supposer que la force F soit la résultante de deux forces, l'une égale à F′ et qui sera détruite par la force F′ et l'autre égale à F — F′ qui agira seule pour entraîner le point A. Donc *la résultante de*

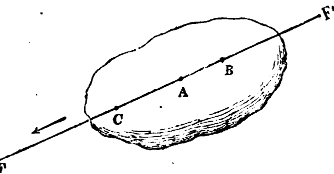


Fig. 11.

deux forces dirigées suivant une même droite, mais en sens contraire, est égale à leur différence, est dirigée suivant la même droite et agit dans le sens de la plus grande.

29. Cas de plusieurs forces dirigées suivant la même droite. — Soient F, F′, F″, F‴ et F^{IV}, différentes forces appli-

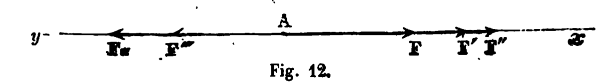


Fig. 12.

quées au point A (*fig.* 12) et dans la même direction. Considérons les forces qui agissent dans le sens de A vers x; nous pouvons les remplacer par leur résultante

$$R_1 = F + F' + F''$$

De même, les forces agissant suivant Ay peuvent être composées en une seule :

$$R_2 = F''' + F^{IV}$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent de deux forces dirigées en sens contraire et suivant la même droite. La résultante finale R du système sera égale à la différence entre R_1 et R_2. Donc, *la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et dirigées suivant la même droite est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur la somme de celles qui agissent en sens contraire et elle est dirigée dans le sens de la plus forte somme.*

Si l'on convient d'appeler *positives* les forces agissant dans un sens, et *négatives* celles qui agissent en sens contraire, on peut dire que la résultante est égale *à la somme algébrique des composantes.*

2° Forces angulaires

30. Direction de la résultante de deux forces. — Lorsque deux forces sont appliquées à un même point matériel, sous un angle quelconque, *leur résultante est comprise à l'intérieur de l'angle formé par la direction des deux forces et située dans leur plan.*

Soient les deux forces F et F′ (*fig.* 13) appliquées au point A; nous savons (25) que ces forces admettent une résultante; or, on

voit facilement que cette résultante ne peut se trouver qu'à l'intérieur de l'angle CAB, car si la force F agissait seule, elle entraînerait le point A dans la partie f'CB du plan de la figure; mais la force F′ tend, en même temps, à l'entraîner dans la partie CBf du même plan. Le point A se trouvant simultanément sollicité vers les parties f'CB et CBf, ne pourra évidemment se diriger que dans la partie commune, c'est-à-dire à l'intérieur de l'angle CAB. En outre, la résultante se trouve forcément dans le plan des forces, puisque tout étant symétrique de part et d'autre de ce plan, il n'y a pas de raison pour qu'elle soit plutôt d'un côté que de l'autre.

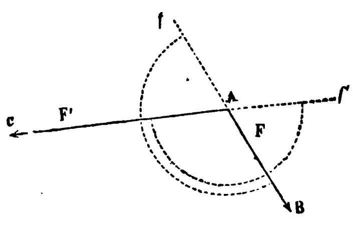


Fig. 13.

Cette même raison de symétrie fait voir que lorsque les forces F et F′ sont égales, leur résultante est dirigée suivant la bissectrice de l'angle (F,F′) formé par les directions des composantes. Donc nous connaissons déjà la direction de la résultante de deux forces angulaires, dans le cas particulier où les composantes sont égales. La proposition suivante nous permettra de trouver cette direction lorsque les forces seront entre elles dans un rapport quelconque.

21. Théorème fondamental. — *Parallélogramme des forces. La résultante de deux forces angulaires est donnée en direction et en grandeur par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent l'intensité des forces comme côtés.*

Pour démontrer la première partie de ce théorème, c'est-à-dire que *la résultante est dirigée suivant la diagonale*, nous prouverons d'abord que si l'on applique aux deux sommets opposés A et B (*fig.* 14) d'un parallélogramme rigide et invariable quatre forces dirigées suivant les côtés AC et AD, BC et BD, proportionnelles à

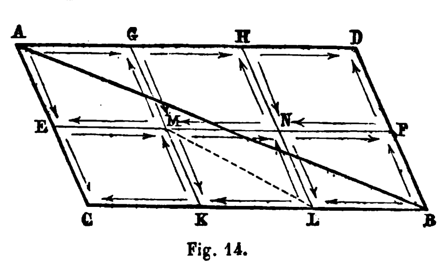


Fig. 14.

ces côtés et par suite égales deux à deux, le parallélogramme est en équilibre. Pour cela, supposons que les côtés et par suite les forces aient une commune mesure ; soient, par exemple, $AC = 2\,k$ et $AD = 3\,k$. Divisons les côtés AC et BD en deux parties égales aux points E et F et les côtés AD et BC en trois parties égales aux précédentes, aux points G, H, K et L; joignons tous ces points par des droites que nous supposerons aussi rigides et invariablement liées aux côtés; nous avons ainsi divisé la figure en 6 losanges égaux. Actuellement nous pouvons, sans rien changer au système, décomposer la force dirigée suivant AC en deux forces égales et appliquées l'une en A et l'autre en E; décomposons aussi la force dirigée suivant BD et appliquons les parties l'une en B et l'autre en F. Divisons également les forces dirigées suivant AD et BC, chacune en 3 parties égales à k, que nous appliquerons aux points A, G, H et B, L, K. Les quatre forces du système se trouvent ainsi divisées chacune en autant de parties égales qu'elles contiennent de fois la commune mesure k. Nous pouvons encore, sans rien modifier à l'état du système, appliquer en chacun des points M et N, quatre forces égales à k, directement opposées deux à deux et dirigées, les unes suivant les droites GK, HL, et les autres suivant la droite EF. De même, le système des quatre forces primitives restera tel qu'il était si nous appliquons aux extrémités des trois droites GK, HL et EF, dont nous venons de parler, deux forces égales à k et dirigées en sens contraire, suivant ces lignes. Or, par toutes ces divisions et ces additions successives, nous sommes arrivés à un système de 24 forces égales appliquées deux à deux aux sommets opposés des 6 losanges en lesquels se trouve décomposé le parallélogramme ABCD. Examinons en particulier l'un quelconque de ces losanges, celui MNLK, par exemple; les deux forces égales appliquées en M ont une résultante dirigée suivant la bissectrice de l'angle KMN et dans le sens de ML; les deux autres forces appliquées en L ont une résultante égale à la précédente et dirigée suivant LM ; ces deux résultantes égales et directement opposées se détruisent et le losange est en équilibre. Si donc chacun des losanges est séparément en équilibre, l'ensemble des 6 losanges l'est aussi, et par suite les 4 forces primitives appliquées en A et B se font équilibre; mais pour cela, il faut et il suffit que la résultante des deux forces appliquées en A soit égale

et directement opposée à la résultante des deux forces appliquées en B; ces résultantes sont évidemment égales puisque les composantes sont respectivement égales, et par suite elles sont dirigées suivant la diagonale AB.

Donc *la direction de la résultante de deux forces angulaires est donnée par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent l'intensité des forces comme côtés.*

Cette proposition est encore vraie lorsque les forces sont incommensurables; pour le démontrer, on peut se servir de la théorie des limites ou de la réduction à l'absurde.

22. Soient maintenant les deux forces F et F′ (*fig.* 15) appliquées au point A; nous savons déjà que leur résultante est dirigée suivant la diagonale AR du parallélograme AFRF′, mais nous ne connaissons pas son intensité. Pour la déterminer, supposons qu'elle soit connue et appliquons cette force au point A, en sens contraire de AR. Le système des trois forces F′, F, R′ sera en équilibre, et nous savons que, dans ce cas (24), l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres; par conséquent, en prolongeant F′A de A vers B, nous aurons la direction de la résultante des forces F et R′. Or cette direction doit être celle de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux composantes comme côtés; il s'agit donc de construire ce parallélogramme, connaissant le côté AF, la direction AB de la diagonale et celle AR′ de l'autre côté. Pour cela, par le point F menons la parallèle FB à AR′ jusqu'à la rencontre en B de la droite F′A prolongée, et par le point B, la parallèle BR′ à AF; la droite AR′ représente l'intensité de la force R′ égale et directement opposée à la résultante R des forces F et F′, car cette longueur est la seule qui, composée avec AF, donne un parallélogramme dont la diagonale soit dirigée suivant AB. De plus, cette diagonale est égale à AF′, puisque ces droites sont toutes deux égales à FR, comme parallèles comprises entre parallèles; donc AB, diagonale du parallélogramme construit sur les forces F et R′ représente

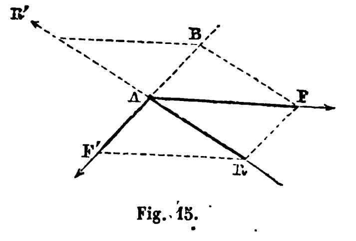


Fig. 15.

l'intensité de leur résultante. Par analogie, nous pouvons affirmer que la diagonale AR représente l'intensité de la résultante des forces F et F′, ce qui se voit encore en considérant les parallélogrammes ARFB et AFBR′, dans lesquels on a :

$$AR = BF \quad \text{et} \quad BF = AR' \quad \text{par suite} \quad AR = AR'$$

En résumé, *la résultante des forces* F *et* F′ *appliquées au point* A *sous un angle quelconque est donnée en grandeur et en direction par la diagonale* AR.

22. Relation entre la résultante et les composantes. — Soient F et F′ (*fig.* 16), deux forces appliquées au point A et R leur résultante. Les relations trigonométriques entre les côtés et les angles des triangles nous donnent :

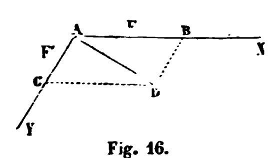


Fig. 16.

1° *Chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle formé par la direction des deux autres.* — On sait, en effet, que dans un triangle quelconque, chaque côté est proportionnel au sinus de l'angle opposé. Le triangle ABD donne :

$$\frac{AD}{\sin ABD} = \frac{AB}{\sin BDA} = \frac{BD}{\sin BAD}.$$

$$\text{or, } AD = R;\ AB = F;\ \text{et } BD = AC = F'$$

$$\text{et } \sin ABD = \sin BAC = \sin (FF')$$

$$\sin BDA = \sin DAC = \sin (F'R)$$

$$\sin BAD = \sin (FR)$$

En remplaçant on a :

$$\frac{R}{\sin (FF')} = \frac{F}{\sin (F'R)} = \frac{F'}{\sin (FR)}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2° *Le carré de la résultante est égal à la somme des carrés des composantes, augmentée de deux fois le produit de ces forces par le cosinus de l'angle compris.*

Le même triangle ABD donne :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BD \cos ABD$$

Mais $ABD = 180° - BAC$

Et par suite $\cos ABD = -\cos BAC = -\cos (FF')$

Donc il vient $R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' \cos (FF')$

Conséquences. — De cette dernière relation on déduit les conséquences suivantes :

1° Si les forces sont rectangulaires, l'angle (FF') $= 90°$ et comme $\cos 90° = 0$, il vient

$$R^2 = F^2 + F'^2$$

c'est-à-dire que *le carré de la résultante est égal à la somme des carrés des composantes.*

2° Si les forces sont dirigées suivant la même droite et dans le même sens, l'angle (FF') $= 0$ et $\cos 0$ étant égal à 1, on a :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' = (F + F')^2,$$

D'où en extrayant la racine carrée :

$$R = F + F'$$

c'est-à-dire que *la résultante est égale à la somme des composantes.*

3° Enfin, si les forces agissent suivant la même droite, mais en sens contraire, on a :

$$\text{angle (FF')} = 180° \quad \text{et} \quad \cos(FF') = -1$$

D'où il résulte $$R^2 = F^2 + F'^2 - 2FF' = (F - F')^2$$

D'où en extrayant la racine carrée :

$$R = F - F'$$

c'est-à-dire que *la résultante est égale à la différence des composantes.*

Ces deux derniers résultats confirment ce qui a été démontré (27) (28) dans la composition des forces agissant suivant la même droite.

34. La résultante de deux forces angulaires est représentée par la somme des projections de ces forces faites sur sa direction propre.

Considérons les deux forces angulaires F et F' (*fig.* 17) appliquées au point matériel A et leur résultante R. Des points F et F' abaissons des perpendiculaires Ff et $F'f'$; les longueurs Af, Af' seront les projections des composantes sur la direction de la résultante.

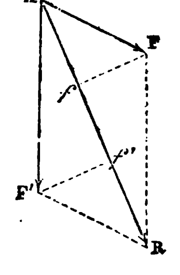


Fig. 17.

On a sur la figure :

$$AR = Af' + f'R$$

A cause de l'égalité des triangles AFf et $F'f'R$, on a :

$$Af = Rf'$$

Et en remplaçant dans l'équation précédente, il vient :

$$AR = Af' + Af$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le triangle AFR, les côtés AF, FR et AR représentent les intensités des deux composantes et de leur résultante, et on a les deux inégalités

$$AR < AF + FR \quad \text{et} \quad AR > FR - AF$$

Donc la résultante de deux forces angulaires est toujours moindre que leur somme et plus grande que leur différence.

On peut aussi faire voir que la résultante diffère d'autant plus de la somme des composantes que l'angle (FF′) qu'elles forment est plus ouvert. En effet, les angles F′AF et AFR étant supplémentaires, à mesure que le premier augmentera, le second diminuera et par suite le côté AR du triangle AFR, opposé à l'angle AFR, deviendra plus petit.

25. Composition d'un nombre quelconque de forces angulaires. — *Polygone des forces. La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel est représentée en grandeur et en direction par le côté qui ferme le polygone, dont les autres côtés sont respectivement égaux et parallèles aux droites qui représentent l'intensité des forces données.*

Nous pouvons étendre la règle du parallélogramme des forces à la composition d'un nombre quelconque de forces angulaires. Soient F, F′, F″, un système de forces appliquées au point matériel A (*fig.* 18). Composons les deux forces F et F′ en construisant le parallélogramme A*aeb*; nous obtenons une première résultante partielle *r* qui remplace, dans le système, ses deux composantes. En composant de même cette première résultante avec la force F″, on obtient une deuxième résultante partielle *r′* qui, composée enfin avec la force F‴, donne la résultante finale R du système.

En remarquant que les droites *ae*, *ef*, *fg* sont respectivement égales et parallèles aux forces F′,F″ et F‴, on en déduit la construction suivante : pour trouver la résultante R d'un système de forces F,F,F″,F‴ appliquées à un point matériel A, menez par l'extrémité *a* de la première force, la droite *ae* égale et parallèle à la seconde force F′; par le point *e* la droite *ef* égale et parallèle à la troisième force F″; enfin par le point *f*, la droite *fg* égale et parallèle à la quatrième force F‴; joignez le point *g* au point d'application A et la droite A*g* qui ferme le contour polygonal A*aefg*, est la résultante cherchée.

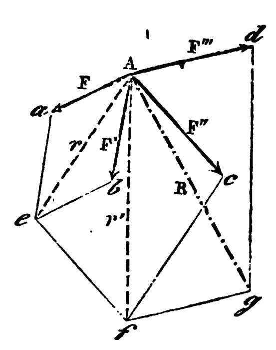


Fig. 18.

Il faut remarquer que les forces F, F′, F″... peuvent être situées dans des plans différents; dans ce cas, la construction est la même et le contour A*ae*... est un polygone gauche, c'est-à-dire que les différents côtés ne sont pas contenus dans le même plan.

36. Équilibre des forces angulaires. — Lorsque, dans la construction qui précède, le dernier point obtenu, tel que *g*, se confond avec le point d'application des forces, la résultante est nulle et par suite le système est en équilibre. Donc, *pour qu'un système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que la ligne brisée, formée en plaçant à la suite les unes des autres des droites égales et parallèles aux différentes forces, se ferme d'elle-même.*

37. Cas particulier. — *Parallélipipède des forces.* — Appliquons la règle que nous venons d'établir à la composition de trois forces F, F′, F″, appliquées à un même point matériel et non situées dans le même plan. Par l'extrémité H de l'une des forces, menons la droite H*a* égale et parallèle à l'autre force F′, et par le point *a*, la droite *a*B

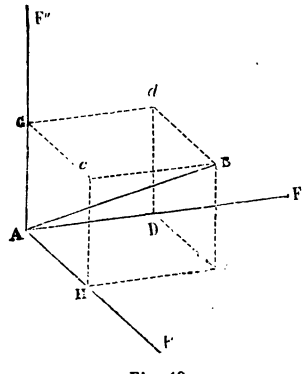


Fig. 19.

égale et parallèle à la troisième force F″; la droite AB, qui ferme le contour polygonal gauche AHaB, représente la résultante du système. D'ailleurs, cette résultante ne change pas, quelle que soit la force par laquelle on commence la composition et quel que soit l'ordre dans lequel on mène les parallèles; ainsi, en commençant par la même force F, au lieu des droites Ha et aB, on peut mener les droites Hc et cB; si on commence par la force F′, on obtiendra les droites Da et aB, ou Dd et dB; enfin, commençant par la force F″, on mènera les droites Gc et cB, ou bien les droites Gd et dB. Ainsi, de quelque manière qu'on opère, on arrive toujours au point B. Or la figure formée par toutes ces constructions est un parallélipipède dont AB est l'une des diagonales.

Donc, *la résultante de trois forces angulaires non situées dans un même plan est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède dont les composantes sont les trois arêtes consécutives issues du même sommet.*

Si les forces F, F′, F″ sont rectangulaires, la valeur numérique de la résultante est donnée par la formule :

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2 + F''^2}$$

29. Équilibre de trois forces angulaires. — Considérons les trois forces F, F′ et F″ (*fig.* 20) appliquées au point matériel A, et cherchons les conditions qu'elles doivent remplir pour que ce point A soit en équilibre. Supposons que cet équilibre existe, et, comme dans cette hypothèse nous savons que l'une quelconque de ces trois forces est égale et directement opposée à la résultante des deux autres, en prolongeant la direction de l'une d'elles, F par exemple, on aura la direction de la résultante R des deux autres; mais la résultante se trouve forcément dans le plan de ses composantes, et par suite les trois forces F, F′ et F″ se trouvent dans le même plan.

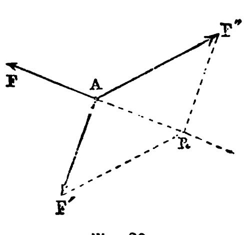


Fig. 20.

Dans le triangle AF′R, chaque côté est proportionnel au sinus

de l'angle opposé, et l'on a :

$$\frac{AR}{\sin AF'R}=\frac{AF'}{\sin ARF'}=\frac{F'R}{\sin F'AR}$$

Mais on a aussi :

$$AR = F;\ AF' = F' \text{ et } F'R = F''$$
$$AF'R = 180^\circ - F'AF''$$
$$ARF' = 180^\circ - FAF''$$
$$F'AR = 180^\circ - FAF'$$

Les sinus des angles supplémentaires étant égaux, il vient en remplaçant :

$$\frac{F}{\sin (F'F'')}=\frac{F'}{\sin (FF'')}=\frac{F''}{\sin (FF')}$$

Donc, pour que trois forces appliquées à un même point matériel soient en équilibre, il faut :

1° *Qu'elles soient dans un même plan ;*

2° *Que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

La première condition était facile à prévoir, sachant que trois forces non situées dans un même plan ont pour résultante la diagonale d'un parallélipipède, car cette résultante ne saurait être nulle.

29. Application de la composition des forces angulaires. — *Sonnette à tiraudes.* — L'appareil représenté par la figure 21, employé pour enfoncer des pieux dans le sol, est une application de la composition des forces angulaires. Il s'agit de soulever la masse A, qu'on nomme *mouton*, pour la laisser retomber ensuite sur la tête du pieu ; pour cela, on attache à la tête du mouton une corde qui vient passer sur une poulie fixée à la partie supérieure des jumelles ; cette corde se termine par plusieurs brins appelés *tiraudes*, sur chacun desquels agit un homme. A un moment donné, tous les hommes se baissent et élèvent ainsi le mouton à une hauteur de $1^m,20$ environ, pour le laisser retomber ensuite. Les forces exercées par les hommes et appliquées suivant les différentes tiraudes se composent en une résultante unique dont la direction est celle de la corde principale.

D'après ce qui a été dit (34), on voit qu'il convient, autant qu'on le peut, de rapprocher les ouvriers les uns des autres afin que les

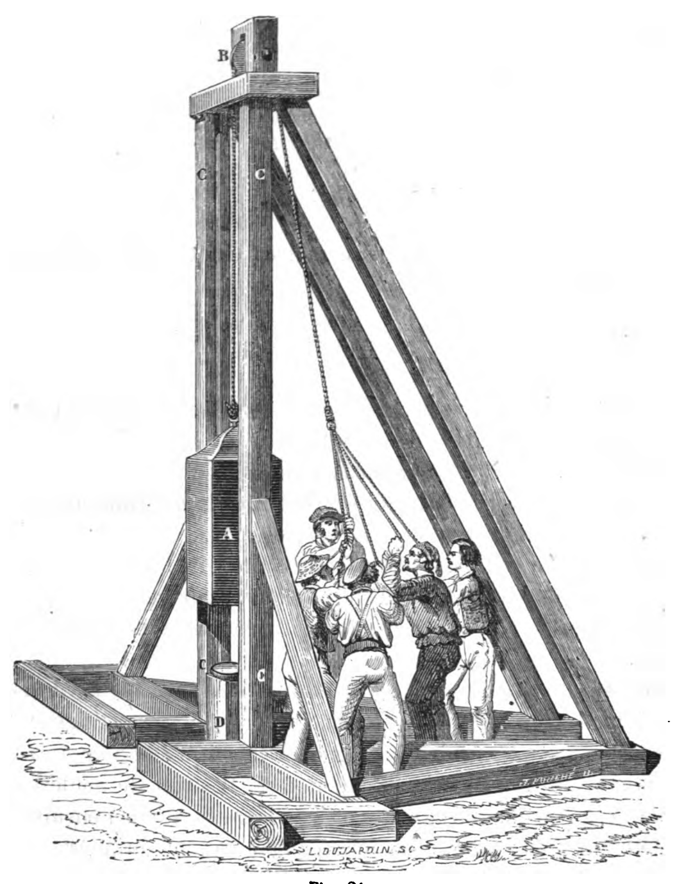


Fig. 21.

angles formés par les directions des tiraudes soient le plus petits possible.

§ 3. — DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES ANGULAIRES

40. Décomposition d'une force en deux autres appliquées au même point. — Lorsqu'on se propose le problème inverse de la composition de deux forces, c'est-à-dire de remplacer une force donnée par ses deux composantes, il peut se présenter quatre cas :

1° *Les directions des deux composantes sont données.* — Soit R (*fig.* 22) la force donnée, AF et AF′ les directions des composantes. D'abord, pour que le problème soit possible, il faut que ces deux directions soient dans un même plan avec la force R.

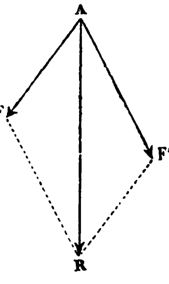


Fig. 22.

Par l'extrémité de la force donnée, menons la droite RF′ parallèle à la direction AF ; les longueurs AF′ et RF′ représentent l'intensité des composantes, car, si par le point R on mène la parallèle RF à AF′, on a :

$$AF = RF'$$

La relation trouvée précédemment (33) permet de déterminer analytiquement ces composantes. En effet, on a :

$$\frac{F}{\sin(F'R)} = \frac{F'}{\sin(FR)} = \frac{R}{\sin(FF')}$$

D'où l'on tire :

$$F = R\frac{\sin(F'R)}{\sin(FF')} \quad \text{et} \quad F' = R\frac{\sin(FR)}{\sin(FF')}$$

Si les deux directions AF et AF′ sont rectangulaires, les triangles AFR et AF′R sont rectangles et donnent :

$$F = R\cos(FR) \quad \text{et} \quad F' = R\cos(F'R)$$

Dans ce cas, *chaque composante est égale à la projection de la résultante sur sa direction.*

2° *L'intensité des composantes est donnée.* — Ce problème revient à construire un triangle, connaissant les trois côtés. On a vu en géométrie qu'il y a deux solutions ARB et ARC (*fig.* 23), sauf le cas

où l'intensité des composantes serait égale. D'ailleurs, pour que le problème soit possible, il faut que la force R à décomposer soit plus petite que la somme de ses composantes et plus grande que leur différence.

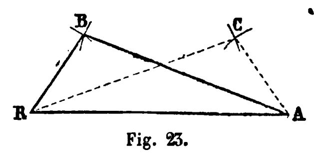


Fig. 23.

3° *L'une des composantes est donnée en grandeur et en direction.* — Soient R (*fig.* 24) la force que l'on veut décomposer, et F la composante donnée. Ce problème est toujours possible et n'admet qu'une solution; en effet, il suffit de construire un triangle, connaissant deux côtés AR, AF et l'angle compris. L'autre composante F′ sera donnée en grandeur et en direction par une droite issue du point A égale et parallèle à RF.

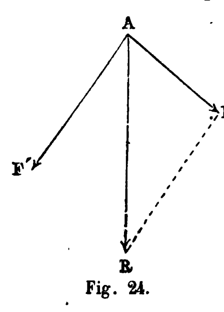


Fig. 24.

4° *L'une des composantes est donnée en direction et l'autre en intensité.* — Comme dans les cas précédents, ce problème revient à la construction d'un triangle, connaissant les côtés AR, RF (*fig.* 25) et l'angle RAF opposé à l'un d'eux. On sait qu'il peut y avoir ou deux solutions, ou une seule, ou aucune, suivant que le côté RF sera ou plus grand, ou égal, ou plus petit que la perpendiculaire Rr abaissée du point R sur la direction Ax.

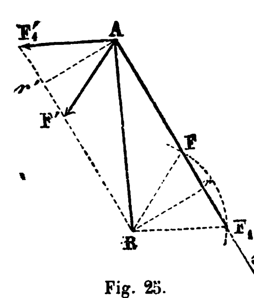


Fig. 25.

S'il y a deux solutions, les composantes de R seront AF et AF′ ou AF_1 et AF'_1; et, s'il n'y a qu'une solution, les composantes seront rectangulaires et seront représentées par les droites Ar et Ar'.

Si l'on veut décomposer une force donnée en plus de deux autres, toutes situées dans un même plan, le problème de la décomposition devient alors indéterminé.

41. Décomposition d'une force en trois autres non situées dans un même plan. — Nous savons qu'en construisant un parallélipipède ayant pour diagonale la force donnée, les trois arêtes

issues d'un même sommet représentent les composantes cherchées. On voit, d'après cela, que le problème n'est déterminé que si l'on s'impose la direction des composantes; car, même dans le cas où leur intensité serait connue, on pourrait avec ces données construire une infinité de parallélipipèdes ayant même diagonale.

Soit R (*fig.* 26) la force donnée représentée par la longueur AB, et proposons-nous de la décomposer en trois autres dirigées suivant Ax, Ay et Az. Pour opérer cette décomposition, il suffit de mener par l'extrémité B de la force R les trois plans BHD, BHE et BGC respectivement parallèles aux plans yAx, xAz, zAy; leur intersection avec les directions x, y et z déterminera l'intensité des trois composantes F, F′, F″ cherchées, car on obtient ainsi le parallélipipède de la figure qui a la force R pour diagonale.

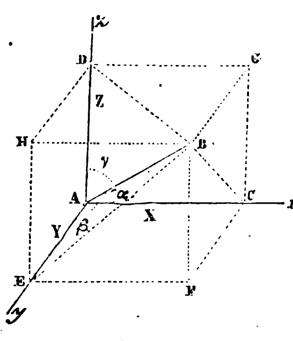


Fig. 26.

Cas particulier. — Lorsque les trois directions x, y et z sont rectangulaires, on en tire les conséquences suivantes :

1° *Chaque composante est égale à la projection de la force donnée* R *sur la direction de cette composante.*

En effet, les triangles DAB, EAB et BAC sont rectangles en D, E et C; on a donc, en désignant par α, β, γ les angles de la force R avec les trois directions données :

$$F = R\cos\alpha; \quad F' = R\cos\beta \quad \text{et} \quad F'' = R\cos\gamma$$

De ces égalités on tire :

$$\cos\alpha = \frac{F}{R}; \quad \cos\beta = \frac{F'}{R} \quad \cos\gamma = \frac{F''}{R}.$$

c'est-à-dire que, lorsqu'on connaît l'intensité des composantes, on peut en déduire l'angle que la résultante fait avec chacune d'elles.

2° *Quelle que soit la direction de la résultante, la somme des carrés des cosinus des trois angles qu'elle fait avec les composantes est égale à l'unité.*

Reprenons les égalités

$$F = R\cos\alpha$$
$$F' = R\cos\beta$$
$$F'' = R\cos\gamma$$

et ajoutons-les membre à membre, après les avoir élevées au carré ; il vient :

$$F^2 + F'^2 + F''^2 = R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

Mais on sait que, dans un parallélipipède rectangle, le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés de ses trois dimensions, c'est-à-dire que l'on a :

$$F^2 + F'^2 + F''^2 = R^2$$

Par conséquent, il faut que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

ce qu'il fallait démontrer.

42. Équilibre d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel. — Soient les forces F, F', F''... (*fig.* 27) appliquées au point matériel A. Menons par ce point les trois axes rectangulaires xx', yy', zz', et appelons a, b, c les angles respectifs que fait l'une des forces F avec chacun de ces axes ; a', b', c', les angles analogues pour une autre force F', et ainsi de suite. Chacune des forces peut être décomposée en trois autres dirigées suivant Ax ou Ax', Ay ou Ay', Az ou Az', qui seront respectivement égales aux produits

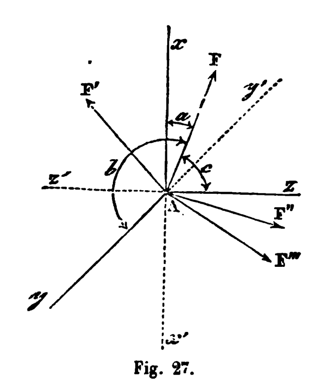


Fig. 27.

$$F\cos a, \quad F\cos b, \quad F\cos c$$

pour les composantes de la force F, et

$$F'\cos a', \quad F'\cos b', \quad F'\cos c'$$

pour les composantes de la force F', et ainsi de suite.

Toutes les composantes dirigées suivant un même axe peuvent être composées en une seule force égale à leur somme algébrique, et nous admettrons la désignation :

$$\Sigma \mathrm{F} \cos a$$

pour la résultante dirigée suivant l'axe xx' ;

$$\Sigma \mathrm{F} \cos b$$

pour la résultante dirigée suivant l'axe yy' ;

$$\Sigma \mathrm{F} \cos c$$

pour la résultante dirigée suivant l'axe zz'.

Le système des forces données se trouve ainsi réduit à trois forces dirigées suivant les axes rectangulaires que nous avons menés arbitrairement par le point A.

Maintenant, comme cela a été dit (37), ces trois dernières forces peuvent se composer en une seule, et la formule

$$\mathrm{R} = \sqrt{(\Sigma \mathrm{F} \cos a)^2 + (\Sigma \mathrm{F} \cos b)^2 + (\Sigma \mathrm{F} \cos c)^2}$$

donnera la résultante. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que cette résultante soit nulle et par suite que le parallélipipède construit sur les composantes ait une diagonale nulle, ce qui exige que les côtés soient égaux à 0, et l'on aura :

$$\Sigma \mathrm{F} \cos a = 0$$
$$\Sigma \mathrm{F} \cos b = 0$$
$$\Sigma \mathrm{F} \cos c = 0$$

Ainsi, *pour qu'un système quelconque de forces appliquées à un même point matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires quelconques menés par ce point soit égale à* 0 *pour chacun d'eux.*

On voit, par ce qui précède, qu'il est souvent utile de considérer la projection d'un système de forces sur un axe ; à cet effet, nous démontrerons la proposition suivante, dont on se sert souvent en mécanique.

42. La projection sur un axe de la résultante d'un système de forces appliquées à un point matériel est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur ce même axe.

— Considérons d'abord le cas où toutes les forces sont situées dans un même plan. Les forces données F, F′, F″, F‴, F^{IV} (*fig.* 28) étant représentées en grandeur et en direction par les droites A*a*, A*b*,

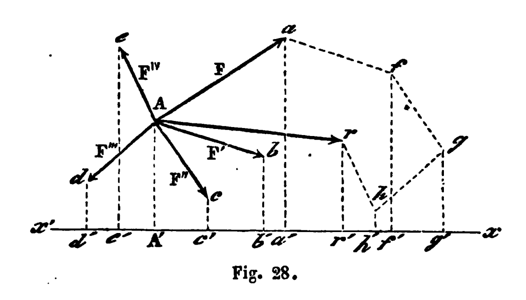


Fig. 28.

A*c*, A*d*, A*e*, leur résultante R sera représentée en grandeur et en direction par la droite A*r*, qui ferme le contour polygonal A*afghr*, dont les côtés *af*, *fg*, *gh*, *hr* sont respectivement égaux et parallèles aux droites A*b*, A*c*, A*d*, A*e* représentant les forces données.

Soit xx' l'axe de projection situé dans le plan des forces; projetons sur cet axe les forces données et leur résultante, ainsi que les droites *af*, *fg*, *gh*, *hr*. On a sur la figure :

$$A'r' = A'a' + a'f' + f'g' - g'h' - h'r';$$

mais on a aussi :

$$a'f' = A'b'; \quad f'g' = A'c'; \quad g'h' = A'd' \quad \text{et} \quad h'r' = A'e'$$

En remplaçant, il vient :

$$A'r' = A'a' + A'b' + A'c' - A'd' - A'e'$$

En convenant de considérer comme positives les forces agissant de A vers x, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on aura enfin :

$$A'r' = A'a' + A'b' + A'c' + A'd' + A'e'$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si les forces ne sont pas toutes comprises dans le même plan, le théorème subsiste encore, et, dans ce cas, la projection d'une force sur l'axe est la distance comptée sur cet axe entre deux plans

perpendiculaires à l'axe, menés par les deux extrémités de la droite qui représente la force.

Remarque. — Nous avons supposé, dans l'équilibre d'un point matériel, qu'on projette les forces sur trois axes rectangulaires. La proposition que nous venons de démontrer nous prouve que cette particularité n'est pas nécessaire, car, s'il y a équilibre, la résultante est nulle et sa projection sur un axe quelconque est également nulle.

Il peut arriver que la somme des projections des forces sur un axe soit nulle, sans que le point matériel soit en équilibre; car, si la résultante est perpendiculaire à l'axe de projection, sa projection est nulle sur cet axe. Mais la résultante ne pouvant pas être à la fois perpendiculaire aux trois arêtes d'un angle trièdre, il s'ensuit que, si sa projection sur trois axes quelconques est nulle pour chacun d'eux, la résultante est forcément nulle et l'équilibre existe.

Dans le cas d'axes quelconques, les composantes de la force F, suivant les axes, ne sont plus égales à F cos a, F cos b, F cos c, et les équations générales de l'équilibre d'un point matériel s'expriment par :

$$\Sigma Fx = 0$$
$$\Sigma Fy = 0$$
$$\Sigma Fz = 0$$

§ 4. — MOMENTS DES FORCES ANGULAIRES

44. Moment par rapport à un point. — On désigne sous le nom de *moment d'une force par rapport à un point, le produit de la force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de cette force.*

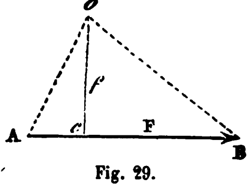


Fig. 29.

Ainsi, le moment de la force AB (*fig.* 29), par rapport au point O est

$$AB \times OC \quad \text{ou} \quad Ff$$

en désignant la force par F et la perpendiculaire OC par f. Le point O prend le nom de *centre des moments*, et la perpendiculaire f

celui de *bras de levier* de la force. Avec ces conventions on peut dire que le moment d'une force par rapport à un point est égal à l'*intensité de la force multipliée par son bras de levier.*

On peut encore exprimer ce moment d'une autre manière. En effet, joignons le point O aux extrémités A et B de la force : le produit Ff représente le double de l'aire du triangle AOB ; donc *le moment d'une force par rapport à un point est encore égal au double de l'aire d'un triangle ayant pour base la droite qui représente l'intensité de la force, et pour sommet le centre des moments.*

Lorsqu'on prend les moments de plusieurs forces contenues dans un même plan, par rapport à un même point situé dans ce plan, on ne peut plus considérer ces moments en valeur absolue.

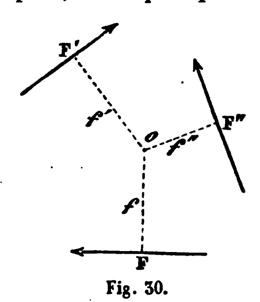


Fig. 30.

En effet, supposons que le point O soit fixe, que les perpendiculaires f, f', f'' (*fig.* 30), abaissées de ce point sur les forces F, F', F'', soient invariablement liées avec lui et que chaque force soit appliquée directement au pied de la perpendiculaire qui lui correspond. Si un observateur placé debout et les pieds sur le point O, regarde le système, les forces F et F' tendront à faire tourner leur bras de levier de gauche à droite par rapport à cet observateur, tandis que la force F'' tendra au contraire à faire tourner son bras de levier de droite à gauche. Cette opposition de sens dans les rotations fictives que nous avons supposées, a conduit à attribuer des signes aux moments, lorsqu'on les fait entrer dans les calculs ; on convient d'appeler *positifs* les moments des forces qui tendent à faire tourner leur bras de levier dans un certain sens (de gauche à droite par exemple), et *négatifs* les moments des forces qui tendent à produire une rotation contraire.

Ainsi, les moments des forces F et F' seront $+ Ff$ et $+ F'f'$ et le moment de la force F'' sera $- F''f''$.

Le moment d'une force étant un produit de deux facteurs, il suffit que l'un quelconque de ces deux facteurs soit égal à 0 pour que le moment soit nul. Ainsi, le moment d'une force peut être nul dans deux cas différents : 1° *lorsque l'intensité de la force*

est nulle, et 2° *lorsque le centre des moments est pris sur la direction de la force.*

45. Théorème de Varignon. — *Le moment de la résultante de deux forces concourantes par rapport à un point quelconque pris dans leur plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

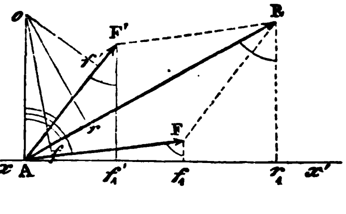


Fig. 31.

Soit O (*fig.* 31) le point par rapport auquel on veut prendre les moments, F et F′ les deux forces appliquées au point A, et R leur résultante. Il faut démontrer que l'on a :

$$Rr = Ff + F'f'$$

Pour cela, joignons le point O au point A, et menons dans le plan des forces, l'axe Ax perpendiculaire à OA ; projetons sur cet axe les forces F, F′ et leur résultante R. Nous savons que l'on a :

$$Ar_1 = Af_1 + Af'_1 \qquad (1)$$

c'est-à-dire que la projection de la résultante est égale à la somme des projections des composantes. Du reste, cela se voit aisément sur la figure, car on a :

$$Ar_1 = Af_1 + f_1r_1$$

mais $f_1\, r_1 = Af'_1$ comme étant les projections sur le même axe de deux droites égales et parallèles, et en remplaçant, on trouve l'équation (1).

Cela posé, remarquons que les triangles A0r et ARr_1, A0f et AFf_1, A0f' et AF′f'_1 sont semblables deux à deux, car ils sont rectangles, les premiers en r et r_1 ; les deuxièmes en f et f_1, les troisièmes en f' et f'_1, et de plus les angles en A sont respectivement égaux aux angles en R, en F et en F′ comme alternes-internes. Les côtés homologues étant proportionnels, on a, pour les triangles A0r et ARr_1

$$\frac{AO}{R} = \frac{r}{Ar_1} \qquad (2)$$

pour les triangles AOF et AFf_1

$$\frac{AO}{F} = \frac{f}{Af_1} \qquad (3)$$

et, pour les triangles AOf' et AFf'_1

$$\frac{AO}{F'} = \frac{f'}{Af'_1} \qquad (4)$$

Des égalités (2) (3) et (4) on tire :

$$AO \times Ar_1 = Rr; \quad AO \times Af_1 = Ff \quad \text{et} \quad AO \times Af_1 = Ff' \qquad (5)$$

Nous avons trouvé par l'équation (1)

$$Ar_1 = Af_1 + Af_1'$$

par suite, en multipliant tous les termes par AO, on a :

$$Ar_1 \times AO = Af_1 \times AO + Af'_1 \times AO$$

Et en remplaçant chaque terme par son égal tiré de l'équation (5), on a :

$$Rr = Ff + F'f'$$

Donc, *le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes.*

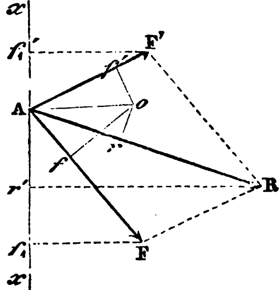


Fig. 32.

Lorsque le centre des moments est pris à l'intérieur de l'angle (FF') (*fig.* 32), on a pour l'équation (1)

$$Ar_1 = Af_1 - Af'_1$$

et par suite

$$Rr = Ff - F'f'$$

Donc, *le moment de la résultante est égal à la différence des moments des composantes.*

En remarquant que les forces F et R tendent à faire tourner leur bras de levier dans un sens, tandis que la force F' tend à faire tourner son bras de levier en sens contraire, on pourra encore écrire :

$$Rr = Ff + F'f'$$

en attribuant des signes aux moments. Donc, *le moment de la résultante est égal, dans tous les cas, à la somme algébrique des moments des composantes.*

Remarque. — On voit sur la figure que la résultante tend à faire tourner son bras de levier dans le même sens que la force qui a le plus grand moment.

Si le centre des moments est pris sur la direction de la résultante, on aura :

$$r=0 \quad \text{et par suite} \quad Ff=-F'f'$$

c'est-à-dire que les moments des composantes sont égaux et de signes contraires.

Cette proposition peut se démontrer directement en faisant abstraction des signes. En effet, soit F et F′ (*fig.* 33) les forces données et R leur résultante ; prenons, pour centre des moments, un point quelconque O sur la direction de la résultante, et par ce point O, menons les droites Oa et Ob, Oc et Od respectivement parallèles et perpendiculaires aux forces F et F′. Les deux triangles AOa et AOc étant égaux, donnent :

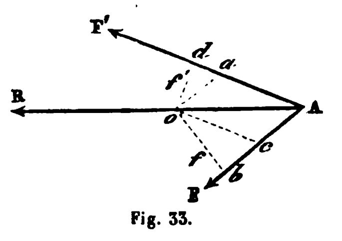


Fig. 33.

$$Aa \times Od = Ac \times Ob$$

mais Ac et Aa sont proportionnelles aux forces F et F′ ; en désignant Ob et Od par f et f', et en remplaçant il vient :

$$Ff=F'f'$$

46. Le théorème de Varignon peut s'étendre à un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel et situées dans un même plan. Soit F,F′,F″,F‴... toutes ces forces et R leur résultante ; appelons R′ la résultante des forces F et F′ ; R″ la résultante des forces R′ et F″ ; R‴ la résultante des forces R″ et F‴ et ainsi de suite.

On aura, d'après ce qui a été démontré, les égalités suivantes :

$$R'r'=Ff+F'f'$$
$$R''r''=R'f'+F''f''$$
$$R'''r'''=R''r''+F'''f'''$$
$$\ldots=\ldots\ldots$$
$$Rr=R^{n-1}r_{n-1}+F^nf_n$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre et supprimant es facteurs communs, il vient :

$$Rr = Ff + F'f' + F''f'' + F'''f''' + \ldots \ldots + F^n f_n$$

ce qu'il fallait démontrer.

47. Moment par rapport à un axe. — Lorsqu'on a un système de forces concourantes qui peuvent ne pas être situées dans un même plan, on ne peut plus prendre leurs moments par rapport à un point. On prend, dans ce cas, les moments par rapport à un axe.

On appelle *moment d'une force par rapport à un axe quelconque le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe par la plus courte distance de la projection à l'axe.*

Ainsi, le moment de la force F (*fig.* 34) par rapport à l'axe xx', n'est autre chose que le moment $F'f$ de la force F' par rapport au point O où l'axe perce le plan MN. Le sens de ce moment indique le signe du moment de la force par rapport à l'axe.

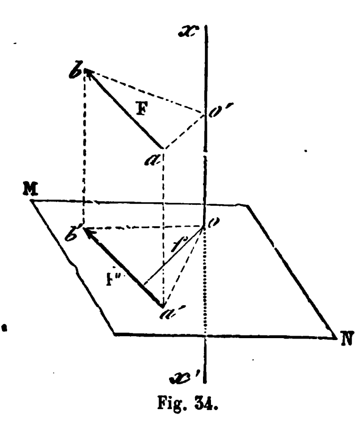


Fig. 34.

D'après la définition, on voit que le moment d'une force par rapport à un axe peut être nul de deux manières différentes : 1° *quand la force est nulle*, *et* 2° *quand la force est dans un même plan avec l'axe.* Dans le second cas, si la force est parallèle à l'axe, sa projection est nulle sur un plan perpendiculaire à l'axe, et si elle rencontre l'axe, c'est la perpendiculaire f qui devient nulle.

Remarque. — Prenons un point quelconque O′ sur l'axe, le triangle $a'Ob'$ est la projection sur le plan MN du triangle $aO'b$. On peut donc dire *que le moment d'une force par rapport à un axe est égal à la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe du moment de cette force par rapport à un point quelconque de cet axe.*

48. Théorème de Varignon. — Ce qui précède nous permet d'étendre directement le théorème de Varignon, pour ces nou-

veaux moments, à un nombre quelconque de forces concourantes.

Le moment par rapport à un axe quelconque de la résultante d'un système de forces concourantes est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même axe.

Soit à prendre les moments par rapport à l'axe XY d'un sys-

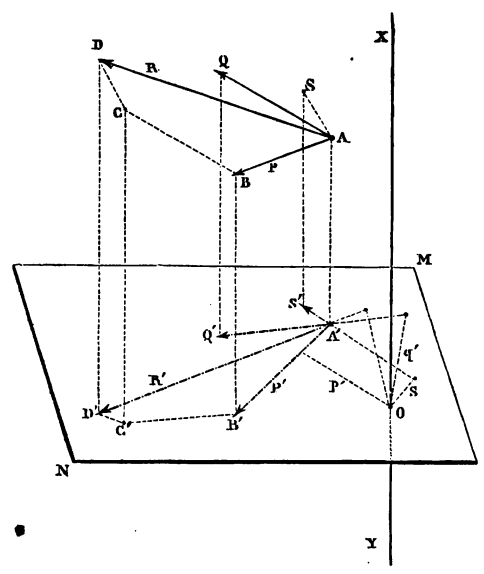


Fig. 35.

tème quelconque de forces PQS... (*fig.* 35), appliquées à un même point matériel A et de leur résultante R.

Prenons un plan MN perpendiculaire à l'axe XY, et soit O leur intersection ; si nous projetons toutes les forces sur ce plan, la projection R′ de la résultante R sera la résultante des projections P′Q′S′.... et comme elles se trouvent toutes dans un même plan, le théorème des moments par rapport au point O donne :

$$R'r' = P'p' + Q'q' + S's' \ldots\ldots$$

Mais, d'après la remarque ci-dessus, ces différents produits représentent les moments des forces R,P,Q,S..... par rapport à l'axe XY, ce qui démontre la proposition énoncée.

Le moment d'une force par rapport à un axe se représente par la lettre M affectée d'un indice rappelant l'axe auquel on a rapporté les moments. Ainsi

$$M_x F$$

indique le moment de la force F par rapport à l'axe x. De même,

$$M_x R = \Sigma\, M_x F$$

signifie que le moment de la résultante R par rapport à l'axe x, est égal à la somme algébrique des moments des forces telles que F rapportées au même axe.

§ 5. — COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES

49. Composition de deux forces parallèles et de même sens. — Théorème. *La résultante de deux forces parallèles et de même sens appliquées à un même corps solide, est parallèle à la direction des composantes, de même sens qu'elles, égale à leur somme, et son point d'application divise la droite qui joint les points d'application des composantes en deux parties inversement proportionnelles à l'intensité de ces composantes.*

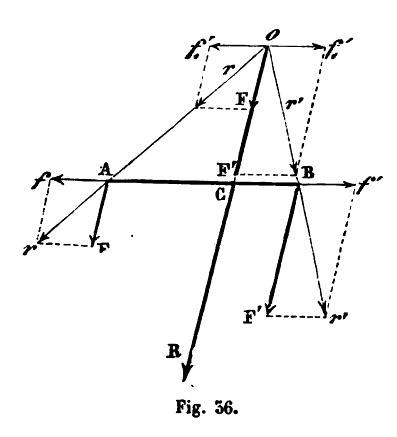


Fig. 36.

Soit F et F' (*fig.* 36) deux forces parallèles et de même sens appliquées aux points A et B invariablement liés entre eux. Nous allons d'abord démontrer que la résultante R est parallèle à la direction de ces forces, qu'elle est dirigée dans le même sens, et de plus qu'elle est égale à leur somme F + F'.

Appliquons aux points A et B deux forces f, f' de grandeur arbitraire, mais égales entre elles et directement opposées ; ces deux forces se détruisent mutuellement et ne changent pas l'état

du système ; mais il est évident que si les 4 forces F, F', f, f', situées dans un même plan, admettent une résultante, celle-ci sera également la résultante des deux forces données F et F'.

Or les deux forces F et f appliquées au même point A et les deux autres F' et f' appliquées au même point B, admettent des résultantes r et r' qui, se trouvant dans un même plan et n'étant pas parallèles, viennent concourir en certain point O, où nous pouvons les supposer appliquées. Maintenant, considérons séparément chacune de ces résultantes partielles et opérons leur décomposition suivant leurs composantes premières ; nous obtenons ainsi les deux forces f_1 et f'_1 dirigées en sens inverse, suivant la même droite et respectivement égales aux forces f et f' ; elles sont donc égales entre elles et par suite elles se détruisent. Le système se trouve donc réduit à deux forces respectivement égales aux forces données F et F' dirigées dans le même sens, et suivant la même droite OR parallèle à ces forces, et celles-ci se composent en une seule force R égale à leur somme $F + F'$. Donc les deux forces données ont une résultante R parallèle à leur direction, et dont l'intensité est égale à leur somme.

Il reste à démontrer que le point C de la droite AB, qui peut être considéré comme le point d'application de la force R, divise cette droite en deux parties AC et BC inversement proportionnelles aux intensités des composantes, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\frac{F}{F'} = \frac{BC}{AC}$$

Les deux triangles AFr et OCA étant semblables, donnent :

$$\frac{AF}{Fr} = \frac{OC}{AC} \qquad (1)$$

De même les deux triangles BF'r' et OCB donnent :

$$\frac{BF'}{F'r'} = \frac{OC}{BC} \qquad (2)$$

En divisant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient :

$$\frac{AF \times F'r'}{Fr \times BF'} = \frac{OC \times BC}{AC \times OC}$$

Remarquant que $Fr = F'r'$ et supprimant les facteurs communs, on a :

$$\frac{AF}{BF'} = \frac{BC}{AC} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{F'} = \frac{BC}{AC} \qquad (3)$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

Si dans l'égalité (3) on ajoute les numérateurs aux dénominateurs, on aura :

$$\frac{F}{F+F'} = \frac{BC}{BC+AC}$$

Mais $F + F' = R$ et $BC + AC = AB$; par suite

$$\frac{F}{R} = \frac{BC}{AB} \qquad (4)$$

Des égalités (3) et (4) on déduit :

$$\frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC} = \frac{R}{AB} \qquad (5)$$

ce qui montre que chacune des forces F,F′ et R est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.

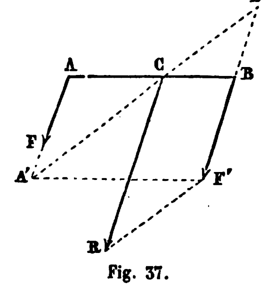


Fig. 37.

50. On peut déterminer le point d'application C de la résultante par une construction géométrique fort simple. Menons F′A′ (*fig.* 37) parallèle à AB jusqu'à sa rencontre au point A′ avec la direction de la force F; prolongeons F′B d'une quantité BB′ égale à la force F et joignons les points A′ et B′ ; le point C est le point cherché. En effet, les triangles semblables ACA′ et BCB′ donnent :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{F}{F'}$$

La longueur CR obtenue en menant F′R parallèle à CB′ donne l'intensité de la résultante, car on a :

$$CR = B'B + BF' = F + F'$$

51. Équilibre de trois forces parallèles. — Pour déterminer les conditions d'équilibre de trois forces parallèles, considérons le système des deux forces parallèles F et F′ (*fig.* 38) et de leur résultante R. Si au point d'application C de la résultante R nous appliquons une force F″ égale et directement opposée à cette résultante, le système des trois forces F, F′ et F″ sera évidemment en équilibre. Donc *pour que trois forces soient en équilibre, il faut qu'elles soient situées dans un même plan.*

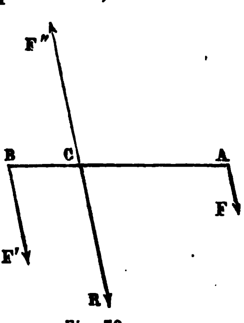


Fig. 38.

Nous avons trouvé, dans la composition des forces parallèles, pour la valeur de la résultante :

$$R = F + F'$$

et comme F″ est par hypothèse égale à R, il s'ensuit que

$$F'' = F + F'$$

d'où l'on tire :

$$F = F'' - F' \text{ et } F' = F'' - F$$

Par la relation (5) trouvée précédemment, on a :

$$\frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC} = \frac{R}{AB} = \frac{F''}{AB}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{F}{F'}; \frac{BC}{AB} = \frac{F}{F''}; \frac{AC}{AB} = \frac{F}{F''}$$

Donc, en résumé, pour que trois forces parallèles soient en équilibre il faut et il suffit :

1° *Qu'elles soient dans un même plan;*

2° *Que chacune d'elles soit égale à la somme ou à la différence des deux autres, suivant qu'elles agissent dans le même sens ou en sens contraire;*

3° *Que le point d'application de chacune d'elles partage la distance des points d'application des deux autres en segments* (additifs lorsqu'elles agissent dans le même sens, et soustractifs lorsqu'elles

agissent en sens contraire) *inversement proportionnels à ces forces.*

52. Composition de deux forces parallèles et de sens contraire. — THÉORÈME. *La résultante de deux forces parallèles et de sens contraire appliquées en deux points invariablement liés entre eux est égale à la différence des composantes, parallèle à leur direction, agit dans le sens de la plus grande, et le point d'application de cette résultante rencontre le prolongement de la droite qui joint les points d'application des composantes en un point tel, que ses distances à ces points sont inversement proportionnelles à l'intensité de ces forces.*

Soit F et F′ (*fig.* 39) deux forces parallèles et de sens contraire appliquées aux points A et B d'un même corps solide, et proposons-nous de trouver leur résultante.

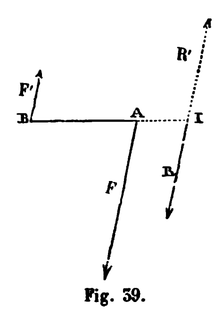


Fig. 39.

La composition de ces deux forces peut se déduire de celle de deux forces parallèles et de même sens. En effet, prenons sur le prolongement de la droite AB et du côté de la plus grande force un point I tel, que l'on ait :

$$\frac{AI}{AB}=\frac{F'}{F-F'} \qquad (1)$$

et appliquons en ce point deux forces R et R′ égales chacune à la différence F—F′, directement opposées et parallèles aux forces données ; ces deux forces, se détruisant, ne changent rien au système.

D'après la relation (1), on voit que les forces R′ et F′ sont inversement proportionnelles aux distances AI et AB de leur point d'application à celui de la force F, et puisque l'on a par hypothèse $R'=F-F'$ ou $F=R+F'$, on en conclut que la force F est égale et directement opposée à la résultante des forces R′ et F′. Donc le système des trois forces R′, F′ et F est en équilibre, et, comme dans tout système de forces en équilibre l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, nous pouvons dire que R′ est égale et directement opposée à la résultante des forces F et F′, et par suite la force R est la résultante cherchée. Cette force répond aux conditions de l'énoncé,

car elle est égale à la différence des composantes auxquelles elle est parallèle, et elle agit dans le sens de la plus grande ; de plus, les distances de son point d'application aux points d'application des composantes sont inversement proportionnelles à ces forces.

En effet, de la relation (1) qui nous a servi à déterminer le point I, on tire en ajoutant les numérateurs aux dénominateurs :

$$\frac{AI}{AB + AI} = \frac{F'}{F - F' + F'}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{AI}{IB} = \frac{F'}{F}$$

De même que dans le cas de la composition des forces parallèles et de même sens, chacune des forces F, F′ et R est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres, car la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{F}{IB} = \frac{F'}{AI} = \frac{F - F'}{BI - AI} = \frac{R}{AB}$$

52. On peut encore trouver géométriquement la position du point I. Pour cela, menons FB′ parallèle à AB (*fig.* 40) jusqu'à sa rencontre en B′ avec la direction de la force F′ ; prenons sur cette direction une longueur A′B′ égale à F′ et joignons le point A′ au point A. Si par le point B′ on mène la parallèle B′I à AA′ jusqu'à sa rencontre avec AB prolongée, le point I sera le point cherché. En effet, dans le triangle BIB′, on a :

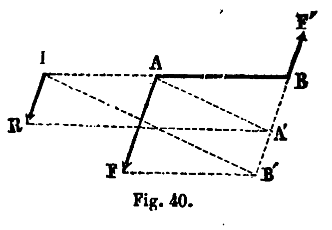


Fig. 40.

$$\frac{AI}{BI} = \frac{A'B'}{BB'} = \frac{F'}{F}$$

Pour avoir la résultante en grandeur et en direction, il suffit de mener IR et A′R respectivement parallèles à AF et à AB, car on a :

$$IR = BA' = BB' - A'B' = F - F'$$

54. Composition de deux forces parallèles égales et de sens contraire. — Couple. La composition de deux forces parallèles et de sens contraire présente un cas particulier très-remarquable; c'est celui où les deux forces sont égales.

Reprenons la relation précédente (1) :

$$\frac{AB}{AI} = \frac{F'}{F - F'}$$

et tirons la valeur de AI ; il vient :

$$AI = AB \times \frac{F'}{F - F'}$$

Supposons maintenant que la force F diminue graduellement, tandis que la force F′ reste constante. La différence $F - F' = R$ deviendra de plus en plus petite, et la distance AI de plus en plus grande. A la limite, lorsque F sera devenue égale à F′, on aura :

$$R = 0 \text{ et } AI = \infty$$

La résultante devient nulle et son point d'application s'éloigne à l'infini, ce que l'on exprime en disant que *deux forces égales, parallèles et de sens contraire, n'ont pas de résultante.*

Ce résultat était facile à prévoir, car tout étant symétrique de part et d'autre, il n'y a pas de raison pour que la résultante, si elle existait, agisse dans le sens de F plutôt que dans celui de F′, ou soit située du côté de A plutôt que du côté de B.

Ce système n'est évidemment pas en équilibre, car si on fixe le point A, ce qui détruit la force F, il faudrait, pour que l'équilibre existât, que la direction de la force F′ passât par le point fixe.

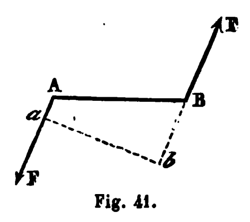


Fig. 41.

Poinsot, qui le premier s'est occupé des propriétés remarquables de ce système de forces, lui a donné le nom de *couple.*

On appelle *bras de levier* d'un couple la perpendiculaire *ab* (*fig.* 41) commune aux deux forces.

Le point d'application d'une force pouvant toujours être transporté en un point quelconque de sa direction, on peut considérer les forces F et F′ comme appliquées aux extrémités de leur bras de levier.

55. Équilibre d'un couple. — On voit, d'après ce qui précède, qu'un couple ne peut être équilibré par une force unique ; mais il peut être équilibré d'une infinité de manières par un second couple parallèle au premier et situé dans son plan.

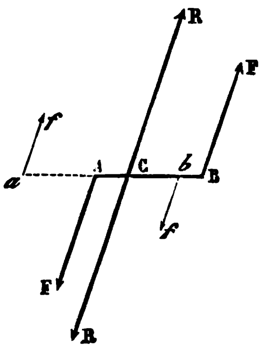


Fig. 42.

Ainsi, le couple FF (*fig.* 42) peut être équilibré par le couple ff ; pour cela, il suffit que la résultante R des forces F et f agissant de bas en haut et la résultante R′, égale à la première, des forces F et f agissant de haut en bas, passent par le même point C.

La seule inconnue qu'il s'agit de déterminer, c'est la longueur ab. Or, en composant deux à deux les forces de même sens, on a :

$$\frac{Cb}{AC}=\frac{F}{f} \quad \frac{Ca}{BC}=\frac{F}{f}$$

donc
$$\frac{Cb}{AC}=\frac{Ca}{BC} \quad \text{ou encore} \quad \frac{Cb}{Ca}=\frac{AC}{BC}$$

Ajoutant les dénominateurs aux numérateurs, il vient :

$$\frac{Cb+Ca}{Ca}=\frac{AC+BC}{BC}$$

ou, ce qui est la même chose :

$$\frac{ab}{F}=\frac{AB}{f}$$

d'où l'on tire :

$$ab=AB\times\frac{F}{f}$$

c'est-à-dire que la longueur ab, du second couple, est constante, quelle que soit sa position par rapport au premier, et elle varie en raison inverse de l'intensité des forces égales f qui sont appliquées à ses extrémités.

56. On peut encore équilibrer un couple FF en appliquant aux extrémités A et B (*fig.* 43) un second couple quelconque ff, à la

seule condition que les résultantes égales R des deux groupes de forces appliquées en A et B soient dirigées suivant le prolongement de AB, auquel cas correspond l'équilibre.

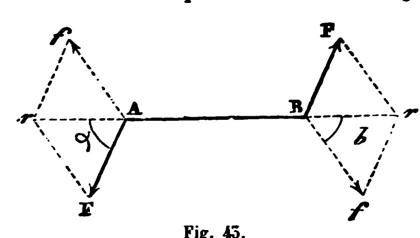


Fig. 43.

Il s'agit donc de déterminer l'angle b que les forces f du couple choisi font avec la direction Br. Le triangle Bfr nous donne la relation :

$$\frac{fr}{\sin f\mathrm{B}r} = \frac{\mathrm{B}f}{\sin \mathrm{B}rf}$$

Mais $fr = \mathrm{F}$; $\mathrm{B}f = f$ et $\sin \mathrm{B}rf = \sin \mathrm{FB}r$.
En remplaçant, il vient :

$$\frac{\mathrm{F}}{\sin b} = \frac{f}{\sin \alpha}$$

d'où l'on tire :

$$\sin b = \sin \alpha \frac{\mathrm{F}}{f}$$

57. Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — En appliquant les théorèmes qui précèdent, il est facile de trouver la résultante d'un système quelconque de forces parallèles. Supposons que toutes les forces soient de même sens et soient F, F′, F″... (*fig.* 44) des forces parallèles appliquées aux points a, b, c... d'un corps solide A. Pour trouver leur résultante, on composera d'abord les forces F et F′ ; on obtiendra ainsi une première résultante partielle $r = \mathrm{F} + \mathrm{F}'$ dont le point d'application sera donné par la relation :

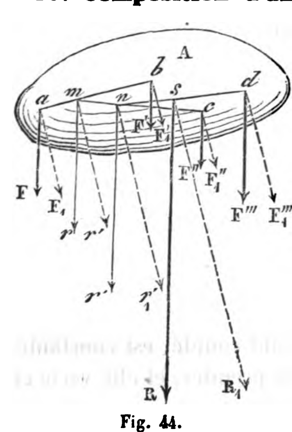


Fig. 44.

$$\frac{mb}{ma} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}$$

On composera ensuite cette résultante r avec la force F'', et le point d'application n de cette nouvelle résultante $r' = r + F''$ ou $r' = F + F' + F''$ s'obtiendra par la relation :

$$\frac{nc}{nm} = \frac{r}{F''} = \frac{F + F'}{F''}$$

Enfin, en composant r' avec F''', on aura la résultante finale du système, qui sera exprimée par les relations :

$$R = r' + F''' = F + F' + F'' + F'''$$

et

$$\frac{sd}{sn} = \frac{r'}{F'''} = \frac{F + F' + F''}{F'''}$$

Lorsque les diverses forces parallèles qui composent le système ne sont pas de même sens, on les divise en deux groupes : le premier formé des forces qui agissent dans un sens, et le second, des forces qui agissent en sens contraire. On compose alors chaque groupe séparément, et on réduit le système à deux forces R_1 et R_2 parallèles et de sens contraire. Si ces deux résultantes partielles sont inégales, elles pourront se composer en une seule $R = R_1 - R_2$ agissant dans le sens de la plus grande.

En regardant comme positives les forces qui agissent dans un sens, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on peut formuler l'énoncé suivant : *La résultante d'un système quelconque de forces parallèles appliquées aux différents points d'un même corps solide est égale à la somme algébrique des composantes*. Le signe de cette somme indique le sens de la résultante.

Il peut arriver que les résultantes R_1 et R_2 des deux groupes soient égales et directement opposées ; dans ce cas, elles se détruisent, et les forces proposées sont en équilibre.

Si les deux résultantes R_1 et R_2 sont égales, mais ne sont pas directement opposées, elles forment un couple, et par suite le système des forces proposées n'admet pas de résultante unique.

En résumé, un système quelconque de forces parallèles dirigées dans le même sens admet toujours une résultante unique. Un système de forces parallèles, dont les unes sont dirigées dans un sens et les autres en sens contraire, peut présenter trois cas : 1° avoir une résultante unique, 2° être en équilibre, et 3° se réduire à un couple.

58. Centre des forces parallèles. — Si on place successivement un système quelconque de forces parallèles dans différentes positions, de telle sorte qu'elles restent toujours parallèles entre elles en conservant leur grandeur et leurs points d'application, le point d'application de la résultante sera le même pour toutes ces différentes positions.

En effet, reprenons le système indiqué par la figure précédente, et soit F_1, F'_1, F''_1, F'''_1 les nouvelles positions des forces F, F′, F″, F‴ ; la résultante r_1 des forces F_1, F'_1 sera encore égale à leur somme, et son point d'application sera le point m, puisqu'il est donné par la relation :

$$\frac{mb}{ma} = \frac{F}{F'} = \frac{F_1}{F'_1}$$

De même, n sera encore le point d'application de la résultante r'_1 des forces r et F″ dans leur nouvelle position, et ainsi de suite pour toutes les autres résultantes partielles du système. Donc la nouvelle résultante définitive R_1 du système aura le même point d'application s que la première résultante R.

Il est facile de voir que le point d'application de la résultante est encore invariable de position lorsqu'on altère l'intensité des forces, pourvu qu'elles conservent toujours entre elles le même rapport; en effet, le point d'application de la résultante est donné par une suite de proportions telles que

$$\frac{mb}{ma} = \frac{F}{F'}$$

qui ne dépendent évidemment que de la position des points d'application des composantes et des rapports de grandeur qui existent entre elles. Ce point a reçu le nom de *centre des forces parallèles*. Donc, le *centre des forces parallèles est le point où passe constamment la résultante de ces forces lorsqu'elles changent d'intensité et de direction, tout en conservant leur parallélisme, leurs rapports de grandeur et leurs points d'application.*

§ 6. — DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES

59. Décomposition d'une force en deux autres forces parallèles. — De même que nous avons décomposé une force en plusieurs autres forces appliquées au même point, nous pouvons nous proposer de décomposer une force en plusieurs autres forces parallèles appliquées à des points différents d'un même corps solide.

Proposons-nous, en premier lieu, de décomposer une force donnée en deux autres forces parallèles appliquées en deux points déterminés. La condition nécessaire est que les deux points se trouvent dans un même plan avec la force, car nous savons que la résultante de deux forces parallèles est située dans le plan de ses composantes.

Deux cas peuvent se présenter dans la résolution de ce problème :

1° *Les deux points donnés sont situés de part et d'autre de la force qu'on se propose de décomposer.* — Soit R la force donnée (*fig.* 45), A et B les points d'application des composantes qu'il s'agit de déterminer. Joignons les points A et B et appliquons la force R au point C, où sa direction rencontre la droite AB. Le point d'application de la résultante devant être situé entre les points d'application des composantes, celles-ci seront de même sens et l'on aura :

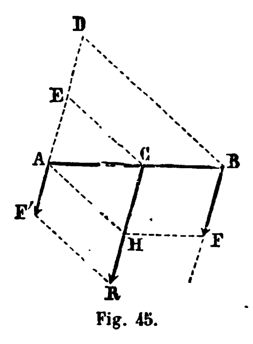


Fig. 45.

$$F + F' = R$$

et

$$\frac{F}{AC} = \frac{F'}{BC} = \frac{R}{AB}$$

d'où l'on tire :

$$F = R \times \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad F' = R \times \frac{BC}{AB}$$

On peut construire graphiquement ces deux composantes, pour cela, menons par le point A la droite AD égale et parallèle à la

force R, joignons les points D et B, et par le point C menons la droite CE parallèle à BD. Les longueurs AE et ED représentent les composantes F et F′ ; en effet, dans le triangle ADB, on a :

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Mais $$AE+ED=AD=R$$

et par suite $$AE=F \quad \text{et} \quad ED=F'$$

Pour avoir ces composantes appliquées aux points A et B, menons par le point A la droite AH parallèle à CE, et par les points H et R les droites FH et F′R respectivement parallèles à BC et à AH.

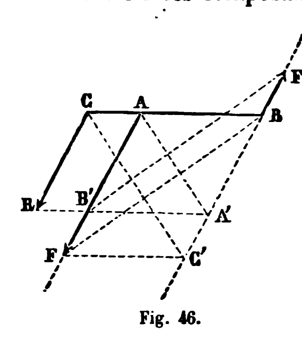


Fig. 46.

2° *Les deux points donnés sont situés d'un même côté de la force* R. — Dans ce cas, les composantes seront de sens contraire. Appliquons la force R au point C (*fig.* 46), où sa direction rencontre la droite AB prolongée; les deux composantes F et F′ seront données par les équations suivantes :

$$F-F'=R$$

$$\frac{F}{BC}=\frac{F'}{AC}=\frac{R}{AB}$$

d'où l'on tire : $$F=R\times\frac{BC}{AB} \quad \text{et} \quad F'=R\times\frac{AC}{AB}$$

Pour construire graphiquement ces deux composantes, menons par l'extrémité R de la force donnée la droite A′R parallèle à CB, joignons le point A′ ainsi obtenu au point A, et par le point C menons CC′ parallèle à AA′ ; les longueurs BC′ et A′C′ représentent les composantes cherchées. En effet, dans le triangle CBC′, on a :

$$\frac{BC'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

et $$BC'-A'C'=A'B=R$$

Par conséquent, $$BC'=F \quad \text{et} \quad A'C'=F'$$

Pour avoir ces composantes appliquées aux points A et B, me-

nons C'F parallèle à AB, joignons le point F au point B, et par le point B' menons B'F' parallèle à BF.

REMARQUE. — Au lieu de se donner les points d'application des composantes, comme nous l'avons supposé dans les deux cas qui précèdent, on peut se donner l'une d'elles et son point d'application.

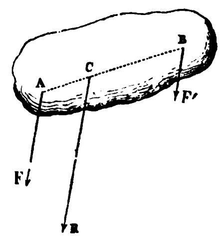


Fig. 47.

Soit R (*fig.* 47) la force que nous voulons décomposer, F la composante donnée, A son point d'application, et supposons $R > F$. L'autre composante F' sera de même sens que la première et elle aura pour valeur :

$$F' = R - F$$

Son point d'application B, situé à droite de la force R, se déterminera par la relation :

$$\frac{BC}{F} = \frac{AC}{F'} = \frac{AC}{R-F}$$

d'où l'on tire : $$BC = AC \times \frac{F}{F'} = AC \times \frac{F}{R-F}$$

60. Décomposition d'une force donnée en trois autres forces parallèles. — Ce problème peut présenter deux cas différents :

1° *La direction de la force donnée passe à l'intérieur du triangle formé par les points d'application.* — Les composantes sont de même sens. Soit A, B, C (*fig.* 48) les points où doivent être appliquées les composantes, R la force donnée, et O le point où la direction de cette force perce le plan ABC. Menons la droite OA prolongée jusqu'au point D, où elle rencontre la droite BC. Nous pouvons décomposer la force R en deux autres, l'une F appliquée au point A, et l'autre S appliquée au point D. Nous aurons :

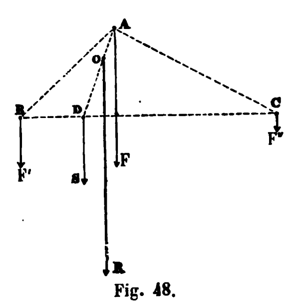


Fig. 48.

$$F + S = R$$

et $$\frac{F}{DO} = \frac{S}{AO} = \frac{R}{AD}$$

d'où l'on tire : $$F = R \times \frac{OD}{AD} \quad \text{et} \quad S = R \times \frac{AO}{AD}$$

La force S peut à son tour être décomposée en deux autres F′ et F″ appliquées aux points B et C ; ces composantes seront données par les relations :

$$F' + F'' = S$$

$$\frac{F'}{CD} = \frac{F''}{BD} = \frac{S}{BC}$$

d'où
$$F' = S \times \frac{CD}{BC} \text{ et } F'' = S \times \frac{BD}{BC}$$

La force R se trouve ainsi décomposée en trois autres F, F′, F″ appliquées aux points donnés A, B, C, et l'on a :

$$R = F + F' + F''$$

2° *La direction de la force R passe à l'extérieur du triangle ABC.* — Dans ce cas, l'une des composantes est de sens opposé aux deux autres. Soit O (*fig.* 49) le point où la direction de la force donnée rencontre le plan déterminé par les trois points d'application A, B, C des composantes inconnues. Joignons OB; la force R peut se décomposer en deux autres forces parallèles et de sens contraire appliquées aux points B et D, de façon que l'on ait

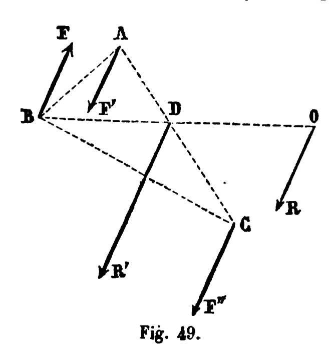


Fig. 49.

$$R = R' - F$$

$$\frac{R'}{OB} = \frac{F}{OD} = \frac{R}{BD}$$

d'où l'on tire :
$$R' = R \times \frac{OB}{BD} \quad \text{et} \quad F = R \times \frac{OD}{BD}$$

Les relations

$$R' = F' + F''$$

$$\frac{F'}{CD} = \frac{F''}{AD} = \frac{R'}{AC}$$

nous permettent de décomposer la force R′ en deux autres forces F′ et F″ qui lui sont parallèles, de même sens et appliquées aux points A et C. La force R se trouve par suite décomposée en trois

composantes parallèles appliquées aux points A,B,C et l'on a :

$$R = F' + F'' - F$$

61. Lorsqu'on se propose de décomposer une force donnée en plus de trois autres composantes parallèles, le problème devient indéterminé. En effet, supposons qu'on veuille décomposer la force R (*fig.* 50) en 4 composantes parallèles appliquées aux points A, B, C et D. Soit O le point où la direction de la force R perce le plan déterminé par les points d'application. Joignons OD et prolongeons cette droite jusqu'au point O′ pris arbitrairement sur cette droite à l'intérieur du triangle ABC. Décomposons la force R en deux autres forces parallèles F et R′ appliquées aux points D et O′; la force R′ étant inversement proportionnelle à la distance OO′, participe à l'indétermination de son point d'application. On pourra, si l'on veut, se donner la force R′ et le point O′ s'ensuivra. Cette force R′ se décompose, à son tour, en trois forces parallèles et de même sens appliquées aux points A, B et C, qui sont, comme nous venons de le voir, parfaitement déterminées.

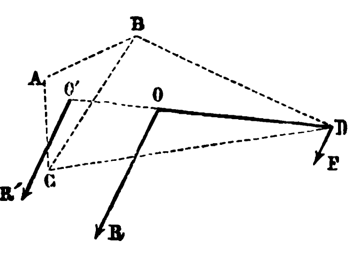


Fig. 50.

En général, lorsqu'on veut décomposer une force en plus de trois autres forces parallèles, on peut se donner d'une infinité de manières toutes les composantes moins trois.

62. Application. — *Répartition sur les murs d'appui de la charge supportée par une poutre en un point de sa longueur.* Une poutre AB (*fig.* 51) de 7m,50 de longueur, repose par ses extrémités sur les murs M et N; cette poutre est chargée au point C, distant du point B de 2m,50, d'un poids P = 600 kilogr. On demande, en faisant abstraction du poids de la pièce, quelle est la charge supportée par chacun des murs.

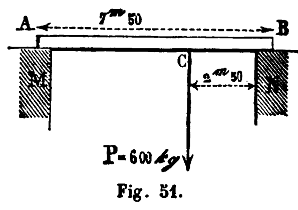


Fig. 51.

Le problème revient à trouver les deux composantes parallèles de la force P appliquées aux points A et B, En appelant F et F′ ces composantes, on aura :

$$F = P \times \frac{CB}{AB} = 600 \times \frac{2,5}{7,5} = 200 \text{ kilogr.}$$

$$F' = P \times \frac{AC}{AB} = 600 \times \frac{5}{7,5} = 400 \text{ kilogr.}$$

Ainsi, le mur N supporte une charge de 400 kilogr. et le mur M une charge de 200 kilogr.

Si on voulait tenir compte du poids propre de la poutre, on pourrait, comme nous le verrons plus loin, considérer ce poids comme appliqué au milieu de la longueur AB, et alors chacun des murs en supporterait la moitié.

§ 7. — MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES

63. Moment par rapport à un point. — Dans le cas particulier où toutes les forces du système que l'on considère sont contenues dans un même plan, on peut, comme pour les forces concourantes, prendre leurs moments par rapport à un point quelconque de leur plan.

Soit $OA = f$ (*fig.* 52) la distance de la force F au point O; son moment sera, en valeur absolue, égal à Ff. Mais il est évident que ce moment change de signe suivant que la force est dirigée dans un sens ou dans l'autre, et suivant que le point O se trouve d'un côté ou de l'autre du point A. Si donc on convient d'affecter les forces du signe + ou du signe — suivant qu'elles agissent dans un sens ou dans l'autre et de considérer comme positives ou comme négatives leurs distances au point O, suivant que ces distances sont comptées à droite ou à gauche de ce point, les moments seront positifs lorsque les deux facteurs seront de même signe et négatifs lorsqu'ils seront de signe contraire. Ainsi, en considé-

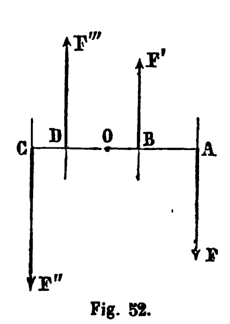


Fig. 52.

rant comme positif le moment Ff de la force F, le moment $F'''f'''$ de la force F''' sera aussi positif, tandis que les moments $F'f'$ et $F''f''$ des forces F' et F'' seront négatifs.

Ces conventions admises, on peut démontrer le théorème de Varignon qui s'énonce ainsi : *Le moment de la résultante de deux forces parallèles par rapport à un point quelconque de leur plan est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

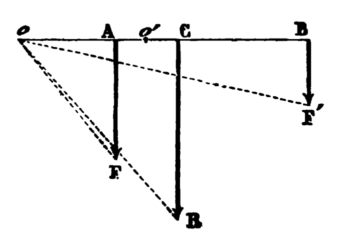


Fig. 53.

1° *Les deux forces sont de même sens*. Soit F et F' (*fig.* 53) les deux forces et R leur résultante. Du point O, centre des moments, abaissons la perpendiculaire OB sur la direction des forces. Les forces F, F' et R peuvent être considérées comme étant appliquées aux points A, B et C et l'on a, d'après ce qui a été vu précédemment :

$$R = F + F'$$

et

$$\frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC}$$

De cette deuxième relation on tire :

$$F \times AC = F' \times BC$$

Mais on a :

$$AC = OC - OA \quad \text{et} \quad BC = OB - OC .$$

En remplaçant AC et BC par leurs valeurs, il vient :

$$F(OC - OA) = F'(OB - OC)$$

De cette égalité on tire successivement :

$$F \times OC - F \times OA = F' \times OB - F' \times OC$$
$$F \times OC + F' \times OC = F' \times OB + F \times OA$$
$$R \times OC = F \times OA + F' \times OB$$

En appelant f, f' et r les distances OA, OB et OC, on aura :

$$Rr = Ff + F'f' \qquad (1)$$

Si le centre des moments était au point O′ on trouverait encore la même équation (1), mais le moment Ff serait négatif.

Les aires des triangles OAF, OBF′ et OCR étant respectivement égales à la moitié des produits $F \times OA$, $F' \times OB$ et $R \times OC$, on voit que l'aire du dernier triangle est égale à la somme des aires des deux autres, c'est-à-dire *que le triangle construit sur la résultante est égal à la somme des triangles construits sur les deux composantes.*

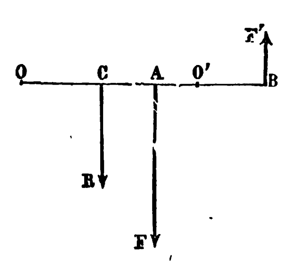


Fig. 54.

Nous avions trouvé cette même propriété pour les forces concourantes.

2° *Les forces sont de sens contraire.* Dans ce cas, on a d'après la composition des forces antiparallèles (*fig.* 54).

$$R = F - F' \quad \text{et} \quad F \times AC = F' \times BC$$

Mais on a sur la figure $AC = OA - OC$ et $BC = OB - OC$

En remplaçant AC et BC par leur valeur, il vient :

$$F\,(OA - OC) = F'\,(OB - OC)$$

D'où l'on tire successivement :

$$F \times OA - F \times OC = F' \times OB - F' \times OC$$
$$F \times OA - F' \times OB = F \times OC - F' \times OC$$
$$F \times OA - F' \times OB = R \times OC$$

Et en adoptant les mêmes notations que précédemment :

$$Ff - F'f' = Rr$$

c'est-à-dire *que le moment de la résultante est égal à la différence des moments des composantes.*

Mais en remarquant que le moment de la force F′ est négatif, on peut dire *que le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Si le centre des moments était situé en O′ tous les moments seraient négatifs et on retrouverait l'équation (1) du cas précédent.

64. Moment d'un couple. — Lorsque les forces F et F′ (*fig.* 55) parallèles et de sens contraire sont égales, la résultante est nulle et le théorème ne subsiste plus. Cependant on est convenu d'appeler *moment du couple* la somme algébrique

$$F \times OA - F' \times OB$$

des moments des deux forces qui forment ce couple. Or cette somme est constante quel que soit le point O du plan des forces, car on a :

$$OA = OB + AB$$

En remplaçant et remarquant que $F' = F$, il vient :

$$F(OB + AB) - F \times OB = F(OB + AB - OB) = F \times AB$$

Donc *le moment d'un couple est constant et égal au produit de l'une des forces par le bras de levier du couple.*

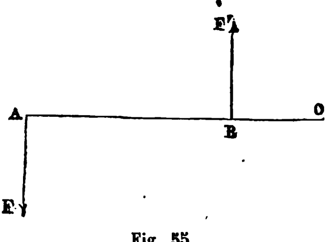


Fig. 55.

65. Il est facile d'étendre le théorème de Varignon à un système quelconque de forces parallèles situées dans un même plan. En effet, soit $F, F', F'' \ldots F^n$ les forces proposées et R leur résultante ; appelons R′ la résultante des forces F et F′ ; R″ la résultante des forces R′ et F″ ; et ainsi de suite. On aura, eu égard aux signes des moments :

$$R'r' = Ff + F'f'$$
$$R''r'' = R'r' + F''f''$$
$$R'''r''' = R''r'' + F'''f'''$$
$$\ldots = \ldots\ldots$$
$$Rr = R^{n-1}r_{n-1} + F^n f_n$$

Ajoutant toutes ces équations et supprimant les facteurs communs, on a :

$$Rr = Ff + F''f'' + F'''f''' + \ldots\ldots + F^n f_n$$

66. Moment par rapport à un plan. — Lorsqu'on a un système de forces parallèles non situées dans le même plan, on ne peut plus prendre leurs moments par rapport à un point.

On prend alors les moments par rapport à un plan quelconque que l'on appelle plan des moments.

On désigne sous le nom de *moment d'une force par rapport à un plan, le produit de l'intensité de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan.*

Ainsi le moment de la force F (*fig.* 56) par rapport au plan MN est égal au produit Ff.

Si l'on ne considère que le moment d'une seule force par rapport à un plan, ce moment sera exprimé en valeur absolue; mais lorsqu'on a à prendre les moments de plusieurs forces parallèles de même sens ou de sens contraire situées d'un côté ou de l'autre du plan des moments, on est forcé d'attribuer des signes aux moments. On considère comme positives les forces qui agissent dans un sens et comme négatives celles qui agissent en sens contraire. De même, on donne le signe + aux perpendiculaires dirigées dans un sens par rapport au plan des moments et le signe — à celles qui sont dirigées en sens contraire. Ainsi, en admettant comme positives la force F et la perpendiculaire f abaissée de son point d'application sur le plan MN, on regardera comme négatives la force opposée F″ et la perpendiculaire f'' dirigée en sens inverse de la précédente.

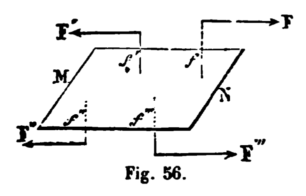


Fig. 56.

Un moment sera dès lors *positif* ou *négatif* suivant que ses deux facteurs seront de même signe ou de signe contraire. Ainsi, le moment Ff de la force F est positif; celui F″f'' de la force F″ est aussi positif et les moments F′f' et F‴f''' des forces F′ et F‴ sont négatifs.

67. Cela posé, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le moment de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles par rapport à un plan quelconque* MN *est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

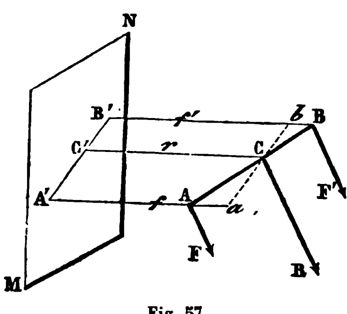


Fig. 57.

1° *Cas de deux forces parallèles de même sens.* — Considérons les deux forces F et F′ (*fig.* 57) et leur résultante R. Soit A, B et C les points d'application de ces trois forces et abaissons de ces points les perpendiculaires f,f' et r sur le plan des moments MN ; les pieds A′,B′,C′ de ces

perpendiculaires se trouveront sur une même ligne droite A′B′. Par le point d'application C de la résultante, menons la droite *ab* parallèle à A′B′.

D'après ce qui a été dit pour la composition des forces parallèles, on a :

$$\frac{F}{F'}=\frac{BC}{AC} \qquad (1)$$

Mais les triangles semblables B*b*C et A*a*C donnent :

$$\frac{Bb}{Aa}=\frac{BC}{AC}$$

En remplaçant dans l'équation (1) il vient :

$$\frac{F}{F'}=\frac{Bb}{Aa}$$

D'où l'on tire $F\times Aa=F'\times Bb$

Or, on a sur la figure $Aa=r-f$ et $Bb=f'-r$

Et par suite $F(r-f)=F'(f'-r)$

D'où l'on tire successivement :

$$Fr-Ff=F'f'-F'r$$
$$Fr+F'r=Ff+F'f'$$
$$Rr=Ff+F'f'$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2° *Cas de deux forces parallèles de sens contraire.* — Considérons maintenant deux forces F et F′ (*fig.* 58) parallèles de sens contraire et leur résultante R. Des points d'application B,A,C de ces forces, abaissons sur le plan des moments MN les perpendiculaires $f, f'r$ et par le point C menons la parallèle C*b* à la droite C′B′ passant par les pieds des perpendiculaires.

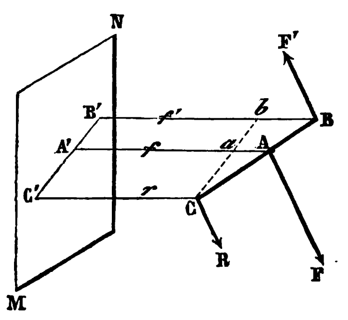


Fig. 58.

Dans le triangle BC*b* on a les

rapports égaux

$$\frac{Aa}{Bb}=\frac{AC}{BC}$$

Mais d'après la composition des forces parallèles, on a :

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F'}{F}$$

Et par suite

$$\frac{Aa}{Bb}=\frac{F'}{F}$$

ou

$$F\times Aa=F'\times Bb \qquad (2)$$

Or, on a sur la figure $Aa=f-r$ et $Bb=f'-r$

En remplaçant dans l'égalité (1), il vient :

$$F(f-r)=F'(f'-r)$$

D'où l'on tire successivement :

$$Ff-Fr=F'f'-F'r$$
$$Ff-F'f'=Fr-F'r=Rr$$

équation qui nous montre que le moment de la résultante est égal à la différence des moments des composantes.

Mais d'après les conventions adoptées (66) le moment $F'f'$ de la force F' est négatif et l'on peut dire que dans tous les cas, *le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

3° *Cas d'un nombre quelconque de forces parallèles.* — Soit $F, F', F'', F'''....F_n$ des forces parallèles et antiparallèles et R leur résultante. Appliquons la formule précédente à la résultante R' des forces F et F', puis à la résultante R'' des forces R' et F'' et ainsi de suite. Il vient :

$$R'r'=Ff+F'f'$$
$$R''r''=R'r'+F''f''$$
$$R'''r'''=R''r''+F'''f'''$$
$$\ldots=\ldots\ldots$$
$$Rr=R^{n-1}r_{n-1}+F'''f'''$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre et supprimant les facteurs communs, on aura :

$$Rr=Ff+F'f'+F''f''+F'''f'''+\ldots\ldots+F^nf_n$$

68. Application du théorème des moments à la recherche du centre des forces parallèles. — Soit F,F′,F″... (*fig.* 59) un système de forces parallèles appliquées aux points A,A′,A″.... et proposons-nous de déterminer le point d'application C de leur résultante, à l'aide du théorème des moments.

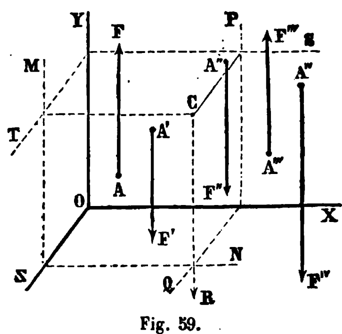


Fig. 59.

Pour cela, prenons deux plans XOY et YOZ parallèles à la direction des forces et un troisième plan XOZ perpendiculaire à cette direction. Prenons les moments des forces par rapport à ces trois plans; en appelant x,x',x''....X les distances des forces et de leur résultante au plan YOZ, le théorème des moments donne l'équation :

$$RX = Fx + F'x' + F''x'' + \ldots \quad (1)$$

En désignant par y,y',y''....Y les quantités analogues par rapport au plan ZOX, on aura :

$$RY = Fy + F'y' + F''y'' + \ldots \quad (2)$$

Et en appelant z,z',z''....Z les mêmes quantités par rapport au plan YOX, il vient :

$$RZ = Fz + F'z' + F''z'' + \ldots \quad (3)$$

En considérant comme positives les forces qui agissent dans un sens et comme négatives celles qui agissent en sens contraire, on a :

$$R = F + F' + F'' + \ldots \quad (4)$$

En combinant cette équation (4) avec les équations (1) (2) (3), on a :

$$X = \frac{Fx + F'x' + F''x'' + \ldots}{F + F' + F'' + \ldots}$$

$$Y = \frac{Fy + F'y' + F''y'' + \ldots}{F + F' + F'' + \ldots}$$

$$Z = \frac{Fz + F'z' + F''z'' + \ldots}{F + F' + F'' + \ldots}$$

Donc, en connaissant les valeurs numériques des forces F, F′, F″.... et leurs distances respectives aux trois plans, on pourra calculer les quantités X, Y, Z et le point d'application C de la résultante sera par suite déterminé.

Ainsi, la quantité X indique que le point d'application C de la résultante R se trouve sur le plan PQ mené parallèlement au plan YOZ et à une distance X de ce plan.

La quantité Y indique que ce même point se trouve aussi sur le plan ST mené parallèlement au plan ZOX et à une distance Y de ce plan.

Enfin la quantité Z indique que ce même point C se trouve encore sur le plan MN mené parallèlement au plan YOX et à une distance Z de ce plan.

Par conséquent, le centre cherché se trouve au point C, intersection des trois plans PQ, ST, MN et la direction de la résultante est déterminée par l'intersection des deux plans MN et PQ parallèles à la direction des forces ; quant à son intensité, elle est donnée par la formule (4).

69. Cas particulier. — Si toutes les forces F, F′, F″.... sont égales et de même sens et que l'on prenne les moments par rapport à un seul plan, l'équation

$$RX = Fx + F'x' + F''x'' + \dots$$

devient :

$$RX = F(x + x' + x'' + \dots) \qquad (1)$$

Si n représente le nombre de forces, on aura :

$$R = nF$$

En remplaçant et en divisant dans (1) les deux membres par F, il vient :

$$X = \frac{x + x' + x'' + \dots}{n}$$

Ce qui montre que *la distance du centre des forces parallèles à un plan quelconque est la moyenne arithmétique de toutes les distances* x, x', x''.... et ce point prend le nom de *centre des moyennes distances*.

CHAPITRE II

§ 1. — CENTRE DE GRAVITÉ

70. Pesanteur. — La *pesanteur* est une force sous l'action de laquelle tous les corps tombent à la surface de la terre si aucune cause ne les maintient à distance ou si cette cause vient à disparaître, c'est-à-dire si les corps sont abandonnés à eux-mêmes. Cette force agit indistinctement et de la même manière sur tous les objets quelle que soit leur nature. La pesanteur n'est qu'un cas particulier de la gravitation universelle dont les lois, posées par Newton, régissent le mouvement des corps célestes.

Les corps, comme nous l'avons vu (2), sont tous formés par la réunion d'un très-grand nombre de molécules ; or, si en divisant les corps à l'infini, on parvenait à isoler toutes leurs molécules, on verrait que celles-ci se trouvent encore soumises à l'action de la pesanteur qui s'exerce sur toutes les molécules composant les corps.

On désigne la direction de la pesanteur sous le nom de *verticale ;* or la simple observation nous apprend que cette direction est perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, et cette surface pouvant être considérée comme celle d'une sphère, il en résulte que toutes les verticales concourent au même point qui est le centre de la terre. La pesanteur attire donc les corps vers le centre de la terre; mais celle-ci ayant des dimensions incomparablement plus grandes que celles de tous les corps que nous observons à sa surface (car le rayon terrestre a environ 6,366 kilomètres), nous pouvons admettre, sans erreur sensible, que toutes les actions dues à la pesanteur sur les différentes molécules d'un corps, ont des directions parallèles. Donc les corps abandonnés à l'action de la pesanteur tombent sous l'influence d'une infinité

de forces parallèles de même sens se composant en une seule résultante parallèle aux composantes et égale à leur somme. La valeur de cette composante est appelée le *poids du corps.*

71. Centre de gravité. — On désigne sous le nom de *centre de gravité* d'un corps, le point d'application de toutes les actions exercées par la pesanteur sur ce corps.

72. Analogie entre le centre de gravité et le centre des forces parallèles. — L'étude de la composition des forces parallèles nous a fait voir que la résultante d'un système de forces parallèles appliquées à un corps solide passe constamment par le même point lorsqu'on fait tourner toutes les forces du système autour de leurs points d'application, en conservant leur parallélisme et leur intensité : ce point a été appelé le centre des forces parallèles. Ce principe s'applique également au cas où les forces parallèles qui agissent sur un corps solide invariable, sont dues à l'action de la pesanteur ; en effet, si nous donnons aux corps différentes positions par rapport à un plan quelconque, le poids de ces différentes molécules, ainsi que la direction de la pesanteur, ne changeront pas, et nous serons dans les mêmes conditions que si, le corps restant fixe, nous avions fait varier la direction des actions de la pesanteur, en conservant leur parallélisme et leur intensité. Il résulte de là que dans un corps solide et invariable, la position du centre de gravité ou le point d'application de la résultante de toutes les forces dues à la pesanteur sur les diverses molécules du corps, est constamment un point fixe, quelle que soit la position que l'on fasse occuper à ce corps par rapport à la verticale.

On peut donc dire que *le centre de gravité d'un corps est le centre des forces parallèles dues aux actions de la pesanteur sur ce corps.*

73. Conséquences de la position invariable du centre de gravité. — 1° Un corps soumis à l'action de la pesanteur peut être considéré comme étant sollicité par une force unique égale à son poids, appliquée à son centre de gravité et agissant verticalement.

2° Si on applique au centre de gravité d'un corps une force égale et directement opposée à l'action de la pesanteur sur ce corps, il y aura équilibre.

Réciproquement, lorsqu'une force unique fait équilibre au poids d'un corps, on peut affirmer que la direction de cette force passe par le centre de gravité du corps. Ainsi, en suspendant un corps à l'extrémité d'un fil, celui-ci aura la direction verticale lorsqu'il y aura équilibre entre le poids du corps et la réaction exercée par le point de suspension du fil et, à cet instant, le centre de gravité sera situé sur le prolongement du fil.

3° Si l'on fixe le centre de gravité d'un corps, celui-ci reste en équilibre dans toutes les positions qu'on lui fait prendre autour du point fixe, car, dans ce cas, la résultante des actions de la pesanteur est détruite par la résistance du point fixe.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le centre de gravité était un des points du corps ; il arrive quelquefois, comme nous le verrons plus tard, que ce point est situé en dehors du corps ; dans ce cas, on admet qu'il se trouve invariablement lié au corps et alors le centre de gravité jouit de toutes les propriétés que nous venons d'exposer.

La notion du centre de gravité ne suppose pas nécessairement la solidité des corps ; un système non solide peut être aussi considéré comme ayant un centre de gravité, en supposant qu'on ait solidifié ce système sans changer sa forme ; seulement, si l'on vient à altérer la forme de ce système, le centre de gravité variera.

74. Détermination expérimentale du centre de gravité des corps. — Les conséquences que nous venons d'exposer nous permettent de déterminer expérimentalement le centre de gravité des corps solides de forme quelconque.

1er Procédé. — On suspend le corps par un point de sa surface à l'aide d'un fil suffisamment résistant, et lorsque ce corps est au repos, le centre de gravité se trouve sur la direction du fil; si l'on imagine alors cette direction prolongée à l'intérieur du corps suivant la droite AB (*fig.* 60), cette droite contiendra le centre de gravité du corps. On suspend de nouveau le même corps par un autre point C (*fig.* 61), et en supposant le même fil prolongé à l'intérieur du corps, on obtiendra une autre droite CD contenant aussi le centre de gravité. Donc ce point se trouve à leur intersection G.

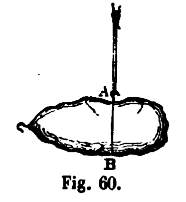


Fig. 60.

Cette méthode, quoique simple, ne peut être mise en pratique que sur des corps dont le poids est peu considérable.



Fig. 61.

2e Procédé. — Lorsque le corps sur lequel on veut expérimenter est lourd et volumineux, on peut employer le procédé suivant : on appuie le corps sur un plan horizontal par une de ses arêtes vives ou par une de ses faces sur un support en biseau; la position d'équilibre étant obtenue par un moyen quelconque, le plan vertical, passant par l'appui, contient le centre de gravité. En répétant cette opération pour deux autres positions du même corps, on aura les traces de trois plans passant par le centre de gravité, et celui-ci se trouvera à leur intersection.

75. Corps homogènes. — On dit qu'un corps est *homogène* lorsque les différentes parties qui le composent ont des poids proportionnels à leurs volumes.

Nous ne nous occuperons, dans la recherche des centres de gravité, que des corps homogènes, c'est-à-dire formés d'une matière uniformément répartie dans l'espace réel que ces corps occupent. Dans la détermination du centre de gravité des corps hétérogènes, il faut tenir compte de la loi suivant laquelle le poids spécifique varie d'une molécule à une autre. Ce problème devient alors très-complexe et ne saurait trouver sa place dans ce cours élémentaire.

76. Extension de la recherche du centre de gravité aux surfaces et aux lignes. — Quoique les surfaces et les lignes ne soient ni matérielles ni pesantes, on leur attribue aussi, par extension, des centres de gravité et l'on désigne sous le nom de centre de gravité d'une surface ou d'une ligne, le centre des forces parallèles que l'on imagine appliquées aux différents points de cette surface ou de cette ligne, de manière que des aires ou des portions équivalentes correspondent à des résultantes égales.

Cette extension de la notion du centre de gravité aux lignes et aux surfaces facilite, comme nous le verrons plus loin, la détermination du centre de gravité des volumes.

77. Recherche des centres de gravité. Méthode générale. — Considérons un corps homogène de forme quelconque. Pour trouver le centre de gravité de ce solide, il suffit de supposer appli-

quées aux différentes molécules qui le composent, des forces parallèles et de même sens proportionnelles aux poids de ces molécules. On applique alors le théorème des moments par rapport à trois plans rectangulaires, à la recherche du centre du système des forces parallèles, et on obtient ainsi les coordonnées X, Y et Z du centre de gravité cherché.

Soit, pour fixer les idées, n le nombre de molécules du corps considéré, dont les poids spécifiques sont $p, p', p'' \ldots p^n$, et dont les distances respectives aux trois plans des moments sont x, y, z; x', y', z'; $x'', y'', z'' \ldots x^n, y^n, z^n$. La somme des moments de toutes ces différentes molécules, par rapport à chacun des plans, sera égale au moment du poids total P du corps par rapport au même plan, et les coordonnées du centre de gravité seront données par les équations

$$X = \frac{px + p'x' + p''x'' + \ldots + p^n x^n}{P} = \frac{\Sigma px}{P}$$

$$Y = \frac{py + p'y' + p''y'' + \ldots + p^n y^n}{P} = \frac{\Sigma py}{P}$$

$$Z = \frac{pz + p'z' + p''z'' + \ldots + p^n z_n}{P} = \frac{\Sigma pz}{P}$$

Le nombre des molécules qui composent un corps étant infini, quelque petit qu'il soit, les sommes précédentes se composent d'une infinité de termes, et il devient impossible, en pratique, de les calculer rigoureusement. On se contente de les calculer approximativement en les ramenant à des quadratures de courbes; nous emploierons pour cela la méthode imaginée par Thomas Simpson, et dont voici l'énoncé :

78. *L'aire comprise entre une portion de courbe, une ligne d'abscisses et deux ordonnées quelconques, est égale au produit de la base* (qu'il faut diviser préalablement en un certain nombre pair de parties égales) *par un facteur composé,* 1° *de la somme des ordonnées extrêmes;* 2° *de deux fois la somme des ordonnées de rang impair;* 3° *de 4 fois la somme des ordonnées de rang pair, ce produit divisé par trois fois le nombre de parties égales en lesquelles on a divisé la base.*

Pour démontrer ce théorème, considérons trois points très-voisins l, m, n (*fig.* 62) situés sur la courbe, et dont les projections l', m', n' sur la ligne des abscisses ou sur la base sont équidistantes.

Joignons le point l au point n; prolongeons la droite mm' d'une quantité $mx' = mx$ et divisons xx' en un certain nombre de parties égales, en 4 par exemple. Tirons, 1° les droites lx' et nx' et,

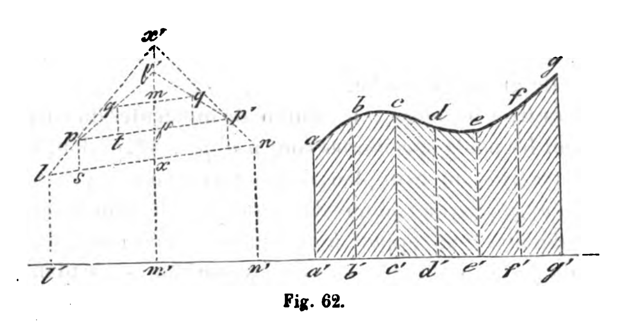


Fig. 62.

par le point y, la droite pp', parallèle à ln; 2° les droite py' et $p'y'$ et par le point m la droite qq' parallèle à pp'. Nous formons ainsi une ligne brisée $lpqm\ q'p'n$ passant par les points l,m,n et dans laquelle, à cause de l'égalité,

$$xl = xn$$

on aura $$yp = yp' \quad \text{et} \quad mq = mq'$$

Lorsque les divisions de la droite xx' seront très-nombreuses, les côtés lp, pq, qm deviendront très-petits et la ligne brisée se transformera en une courbe que l'on pourra regarder comme se confondant avec la courbe donnée. Dans cette hypothèse, on peut substituer aux trapèzes $lxyp$, $pymq$... les parallélogrammes $sxyp$, $tymq$... et comme ces parallélogrammes sont respectivement doubles des triangles $px'y'$, $qy'm$... qui ont même base et même hauteur, il s'ensuit :

$$lpqmx = 2pqmx' = \frac{2}{3} \text{ triangle } lxx' = \frac{2}{3} mx \times l'm'$$

Et par conséquent on a :

$$lpqmq'p'n = \frac{4}{3} mx \times l'm$$

L'aire du trapèze $ll'\ nn'$ a pour mesure

$$m'x \times l'n'$$

ou bien encore $$m'x \times 2l'm'$$

Par conséquent, l'aire S comprise entre les trois points considérés et l'abscisse correspondante est :

$$S = \frac{4}{3} mx \times l'm' + m'x \times 2l'm'$$

Cette équation peut s'écrire :

$$S = \frac{l'm'}{3}(4mx + 6m'x) = \frac{l'm'}{3}(4mx + 4m'x + 2m'x)$$

Mais on a sur la figure :

$$4mx + 4m'x = 4mm'$$
$$2m'x = ll' + nn'$$

En remplaçant, il vient :

$$S = (ll' + nn' + 4mm')\frac{l'm'}{3}$$

Cela posé, considérons la surface totale $aa'gg'$ qu'il s'agit d'évaluer; divisons l'abscisse $a'g'$ en un certain nombre pair de parties égales, 6 par exemple, et élevons des ordonnées en chacun des points de division; nous aurons, d'après ce qui vient d'être démontré :

$$\text{surf}\, aa'cc' = (aa' + cc' + 4bb')\frac{a'b'}{3}$$
$$\text{surf}\, cc'ee' = (cc' + ee' + 4dd')\frac{c'd'}{3}$$
$$\text{surf}\, ee'gg' = (ee' + gg' + 4ff')\frac{e'f'}{3}$$

Ajoutant et remarquant que

$$\frac{a'b'}{3} = \frac{c'd'}{3} = \frac{e'f'}{3} = \frac{a'g'}{3 \times 6}$$

On a enfin :

$$\text{surf}\, agg'a' = \left[aa' + gg' + 2(cc' + ee') + 4(bb' + dd' + ff')\right]\frac{a'g'}{3 \times 6}$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 2. — CENTRES DE GRAVITÉ DES LIGNES, SURFACES ET VOLUMES NON DÉFINIS GÉOMÉTRIQUEMENT

79. Centre de gravité d'une ligne courbe. — Soit la courbe AB (*fig.* 63) supposée plane; son centre de gravité se trouve situé dans son plan. Prenons deux plans des moments MO, NO perpendiculaires au plan de la figure, et, pour plus de simplicité, per-

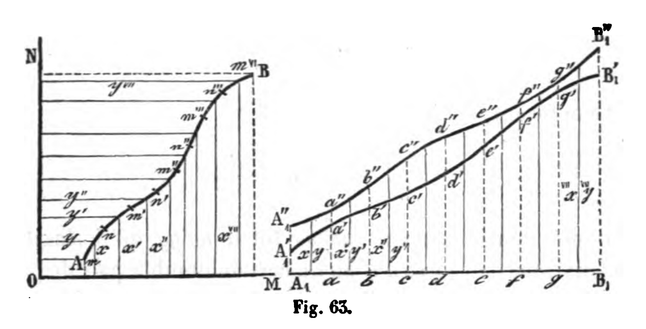


Fig. 63.

pendiculaires entre eux. Soit mn, nm' $n'm'$... des éléments de la courbe, assez petits pour être regardés comme rectilignes, et désignons ces éléments par $l, l', l'' \ldots l^{\text{vii}}$; soit $x, x', x'' \ldots$ x^{vii} et $y, y', y'' \ldots y^{\text{vii}}$ les distances de leurs milieux aux plans MO et NO, et soit enfin X et Y les distances inconnues du centre de gravité de la courbe aux plans des moments.

La somme des moments des différents éléments sera égale au moment de la courbe; en désignant celle-ci par C, on aura :

$$X = \frac{lx + l'x' + l''x'' + \ldots + l^{\text{vii}}x_{\text{vii}}}{C}$$

$$Y = \frac{ly + l'y' + l''y'' + \ldots + l^{\text{vii}}y_{\text{vii}}}{C}$$

Il nous reste maintenant à apprécier les numérateurs; pour cela, portons sur une droite indéfinie, et à la suite les uns des autres, les différents éléments mn, nm'... de la courbe de manière que l'on ait $A_1B_1 = C$ égale à la courbe rectifiée. Aux points

correspondants au milieu de ces éléments, élevons des ordonnées respectivement égales à $x, x', x'' \dots x^{\text{VII}}$; en joignant les extrémités de ces ordonnées par un trait continu, on obtient la courbe $A'_1B'_1$ et l'aire $A_1B_1A'_1B'_1$ représente le moment de la courbe C par rapport au plan MO.

Si, aux mêmes points que précédemment, on élève des ordonnées égales à $y, y', y'' \dots y^{\text{VII}}$, on obtiendra la courbe $A''_1B''_1$ et l'aire $A_1B_1A''_1B''_1$ exprime le moment de la courbe C par rapport au plan NO.

Calculons l'aire de ces surfaces à l'aide de la formule de Thomas Simpson. Pour cela, partageons la base A_1B_1 en un nombre pair de parties égales, en 8 par exemple, et élevons des ordonnées aux points de division, on aura :

$$\text{surf}\, A_1B_1A'_1B'_1 = \frac{A_1B_1}{3 \times 8}\left[A_1A'_1 + B_1B_1' + 2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')\right]$$

$$\text{surf}\, A_1B_1A''_1B''_1 = \frac{A_1B_1}{3 \times 8}\left[A_1A''_1 + B_1B''_1 + 2(bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'')\right]$$

En remplaçant dans les valeurs de X et de Y, il vient :

$$X = \frac{A_1B_1[A_1A_1' + B_1B_1' + 2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ec' + gg']}{24C}$$

$$Y = \frac{A_1B_1[A_1A_1'' + B_1B_1'' + 2(bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'']}{24C}$$

Remarquant que $A_1B_1 = C$, on a finalement :

$$X = \frac{A_1A_1' + B_1B_1' + 2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')}{24}$$

$$Y = \frac{A_1A''_1 + B_1B_1'' + 2(bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'')}{24}$$

Équations déterminant les distances X et Y des centres de gravité de la ligne courbe à chacun des plans des moments.

80. Centre de gravité d'une surface plane quelconque. — Soit à déterminer le centre de gravité de la surface S (*fig.* 64). Prenons, comme précédemment, deux plans des moments MO et NO perpendiculaires au plan de la surface et perpendiculaires entre eux. Menons une série de droites équidistantes $l, l_1 l_2 \dots l_6$ parallèles au plan OM et divisant la surface S en un nombre pair de tranches

de même hauteur, et soit $x_1, x_2 \ldots x_6$ les distances de ces droites au plan des moments.

Cela posé, construisons une courbe ABC ayant pour abscisses la hauteur commune des tranches, et pour ordonnées les différents

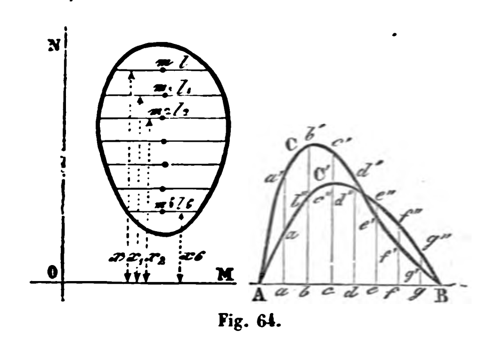


Fig. 64.

produits lx_1, l_1x_1, $l_2x_2 \ldots l_6x_6$; l'aire ABC représente le moment de la surface S par rapport au plan MO. Si donc X est l'ordonnée de son centre de gravité, on aura, en appliquant la formule de Thomas Simpson et en remarquant que les ordonnées extrêmes sont nulles :

$$SX = \frac{AB}{3 \times 8}\left[2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')\right]$$

$$X = \frac{\frac{AB}{3 \times 8}\left[2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')\right]}{S}$$

Pour trouver la distance Y du centre de gravité au plan NO, on peut décomposer la surface S en tranches parallèles à ce plan; mais il est plus simple de se servir des mêmes droites $l, l_1 l_2 \ldots l_6$ et de prendre les distances de leurs milieux m, $m_1 m_2 \ldots m_6$ au plan NO; soit $y, y_1 y_2 \ldots y_6$ ces distances. En construisant, comme nous l'avons fait plus haut, une courbe ayant pour abscisses la hauteur des tranches et pour ordonnées les produits $ly, l_1y_1, l_2y_2 \ldots l_6y_6$, l'aire AC′B représentera le moment de la surface S, par rapport au plan NO, et l'on aura :

$$Y = \frac{\frac{AB}{3 \times 8}\left[2(bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'')\right]}{S}$$

La surface S peut aussi s'évaluer par la méthode de Thomas Simpson en se servant des droites $l, l_1 l_2 \ldots l_6$ comme ordonnées. Les ordonnées extrêmes sont encore nulles et l'on a :

$$S = \frac{AB}{3 \times 8}\left[2(l_1 + l_3 + l_5) + 4(l + l_2 + l_4 + l_6)\right]$$

Remplaçant cette valeur de S dans les expressions de X et de Y, celles-ci deviennent :

$$X = \frac{2(bb' + dd' + ff') + 4(aa' + cc' + ee' + gg')}{2(l_1 + l_3 + l_5) + 4(l + l_2 + l_4 + l_6)}$$

$$Y = \frac{2(bb'' + dd'' + ff'') + 4(aa'' + cc'' + ee'' + gg'')}{2(l_1 + l_3 + l_5) + 4 + (l + l_2 + l_4 + l_6)}$$

Équations déterminant les distances X et Y du centre de gravité de la surface plane à chacun des plans des moments.

81. Centre de gravité d'un corps quelconque. — Soit V (*fig.* 65) le corps donné. Prenons pour plans des moments les trois

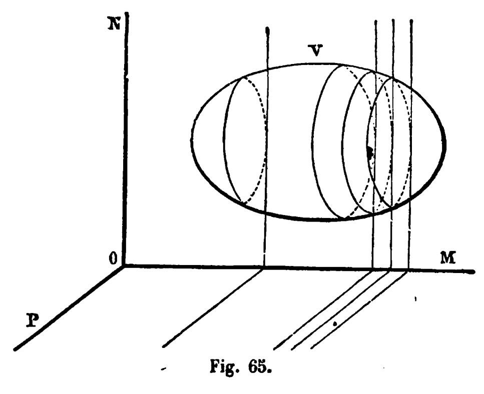


Fig. 65.

plans rectangulaires NOP, NOM et MOP ; divisons le corps en tranches de même épaisseur, par des plans équidistants parallèles au plan NOP. Supposons ces plans très-rapprochés, et soit d leur distance commune ; à chacun de ces plans correspond une section dont la surface peut s'évaluer au moyen de la méthode de Thomas Simpson. Si $S, S', S'' \ldots S^n$ sont les surfaces de ces sections, on aura pour le volume du corps :

$$V = d(S + S' + S'' + \ldots + S^n)$$

Soit $x, x', x'' \ldots x^n$ les distances de ces sections au plan NOP et X l'ordonnée du centre de gravité du corps, on aura :

$$VX = Sdx + S'dx' + S''dx'' + \ldots + S^n dx^n$$

En combinant cette équation et la précédente, on tire

$$X = \frac{Sx + S'x' + S''x'' + \ldots + S^n x^n}{S + S' + S'' + \ldots + S^n}$$

En répétant la même opération pour les plans NOM et MOP, on obtiendra les deux autres ordonnées Y et Z du centre de gravité à chacun de ces plans ; ainsi l'on aura :

$$Y = \frac{Sy + S'y' + S''y'' + \ldots + S^n y^n}{S + S' + S'' + \ldots + S^n}$$

$$Z = \frac{Sz + S'z' + S''z'' + \ldots + S^n z^n}{S + S' + S'' + \ldots + S^n}$$

Les numérateurs et les dénominateurs de ces équations s'obtiendront par la méthode de Thomas Simpson.

§ 3. — CENTRES DE GRAVITÉ DES LIGNES, SURFACES ET VOLUMES DÉFINIS GÉOMÉTRIQUEMENT

82. Principes relatifs à la position du centre de gravité. — Nous venons de voir que, quelle que soit la ligne, la surface ou le volume que l'on considère, on peut toujours trouver son centre de gravité par la méthode générale que nous avons exposée. Mais, dans le cas particulier où les lignes, les surfaces et les volumes sur lesquels on veut expérimenter sont définis géométriquement, on peut se dispenser d'employer cette méthode générale et se servir de procédés plus simples, que nous allons faire connaître, en s'appuyant sur les principes suivants :

1° *Toute figure qui est décomposable en plusieurs parties ayant leur centre de gravité dans un même plan ou sur une même droite, a son centre de gravité dans ce plan ou sur cette droite.*

Le poids de chacune des parties obtenues par la décomposition du corps pouvant être considéré comme appliqué à son centre de

gravité, si les points d'application de toutes ces forces parallèles sont situés dans un même plan ou sur une même droite, il est évident que le point d'application de la résultante de toutes ces composantes, ou le centre de gravité du système total, sera dans ce plan ou sur cette droite.

2° *Toute figure qui a un plan de symétrie a son centre de gravité situé dans ce plan.* Considérons deux molécules du corps, situées sur un même plan perpendiculaire au plan de symétrie et à égale distance de ce plan; le centre de gravité se trouve situé dans le plan de symétrie, car les poids de ces molécules ont pour résultante une force égale à leur somme et appliquée au milieu de la droite qui joint leurs points d'application. Chaque couple de molécules, constituant le corps, donne ainsi une résultante dont le point d'application est situé sur le plan de symétrie; donc le point d'application de la résultante totale ou le centre de gravité du corps sera également dans ce plan.

3° *Toute figure qui a un axe de symétrie a son centre de gravité situé sur cet axe.* L'axe de symétrie étant l'intersection de deux plans de symètrie, et le centre de gravité devant se trouver sur chacun d'eux, il sera forcément à leur intersection.

4° *Toute figure qui a un centre de symétrie a son centre de gravité situé en ce point.* Le centre de symétrie étant déterminé par l'intersection de deux ou plusieurs axes de symétrie, et chacun d'eux devant contenir le centre de gravité, celui-ci se trouve à leur intersection commune.

82. On déduit de là les conséquences suivantes :

1° *Le centre de gravité d'une droite est en son milieu.*

2° *Le centre de gravité d'un carré, d'un rectangle, d'un parallélogramme, est au point d'intersection des diagonales et au milieu de chacune d'elles.*

3° *Le centre de gravité d'une circonférence ou d'un cercle est situé au centre de figure.*

4° *Le centre de gravité du contour ou de la surface d'une ellipse est situé au point de rencontre des deux axes.*

5° *Le centre de gravité d'un parallélipipède est situé au point de rencontre des trois diagonales.*

6° *Le centre de gravité de la surface ou du volume d'une sphère, d'un ellipsoïde de révolution, est situé au centre de figure.*

7° *Le centre de gravité d'un cylindre droit ou oblique est situé au milieu de la droite qui joint les centres des deux bases, c'est-à-dire au milieu de son axe.*

8° *Le centre de gravité d'un anneau est situé au centre de cet anneau.*

Centre de gravité des lignes.

84. Centre de gravité du périmètre d'un triangle : 1° géométriquement. — Soit le triangle ABC (*fig.* 66); le centre de gravité de chacun des côtés se trouve en son milieu *a*, *b*, et *c*. Nous avons donc à composer trois forces parallèles appliquées aux points *a*,*b* et *c*, représentées par le poids des côtés respectifs, et par conséquent, proportionnelles à leur longueur. La résultante des forces appliquées en *c* et *b* se trouvera sur la droite *cb* et son point d'application *g* la partagera en deux parties telles, que l'on aura :

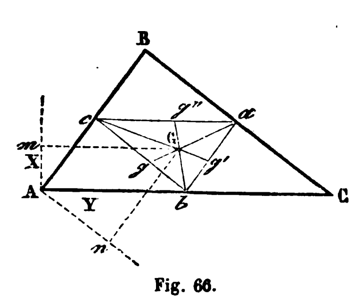


Fig. 66.

$$\frac{bg}{cg}=\frac{AB}{AC}$$

Mais ce point *g* est le pied de la bissectrice de l'angle *cab*; en effet, dans le triangle ABC, on a :

$$ab=\frac{AB}{2} \quad \text{et} \quad ac=\frac{AC}{2}$$

d'où $$\frac{ab}{ac}=\frac{AB}{AC} \quad \text{et par suite} \quad \frac{bg}{cg}=\frac{ab}{ac}$$

En composant actuellement la force appliquée en *g* et représentée par AB + AC avec la force appliquée en *a*, représentée par BC, on trouvera la résultante finale dont le point d'application donnera le centre de gravité cherché; ce point se trouve donc sur la bissectrice *ag*. On démontrerait de même qu'il se trouve sur une autre bissectrice *cg'*, par exemple, et par suite il se trouve au point de concours des bissectrices des angles du triangle *abc*.

Donc, *le centre de gravité du périmètre d'un triangle est le centre du cercle inscrit au triangle que l'on forme en joignant les milieux des côtés du triangle donné.*

2° **Par le théorème des moments.** — Soit P,P' et P'' les poids des trois côtés AB, BC, AC; prenons les moments par rapport à un plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par le côté AC. En appelant R la résultante P+P'+P'' et X la distance de son point d'application au plan des moments, on aura :

$$RX = (P + P')\frac{h}{2}$$

puisque le moment de la force P'' est nul. De cette équation, on tire :

$$X = \frac{h}{2}\left(\frac{P \times P'}{R}\right)$$

En prenant ensuite les moments par rapport à un plan passant par le côté AB, on trouverait de même :

$$Y = \frac{h'}{2}\left(\frac{P + P''}{R}\right)$$

Connaissant les distances X et Y, le point G est parfaitement déterminé. Il suffit de mener par le sommet A les droites A*m* et A*n* respectivement perpendiculaires aux côtés AC et AB, de prendre, sur ces droites, des longueurs A*m* et A*n* égales à X et Y, et par les points *m* et *n* tracer les parallèles *m*G et *n*G aux mêmes côtés; l'intersection G de ces deux droites déterminera la position du centre de gravité.

85. Centre de gravité d'une ligne polygonale régulière. — Soit ACD...B (*fig.* 67) le contour polygonal donné et O son centre de figure. Le centre de gravité de cette ligne se trouvera sur le rayon OE, passant en son milieu, car ce rayon est un axe de symétrie : il suffit donc de déterminer sa distance X au centre O. Pour cela, appliquons le théorème des moments par rapport à un plan.

Prenons pour plan des moments le plan MN passant par le centre O et perpendiculaire au plan de la figure, ainsi qu'à la ligne OE; le centre de gravité de chacun des côtés l se trouve en son milieu; soit x, x', x''... les distances de ces milieux au plan MN. Si L re-

présente la longueur totale de la ligne brisée, l'équation des moments donnera :

$$LX = l(x + x' + x'' + \ldots)$$

Ce que l'on peut écrire en abrégé

$$LX = \Sigma\, lx \qquad (1)$$

Prenons maintenant l'un quelconque des côtés CD, par exemple, et soit $cd = l'$ sa projection sur le plan des moments. Par le mi-

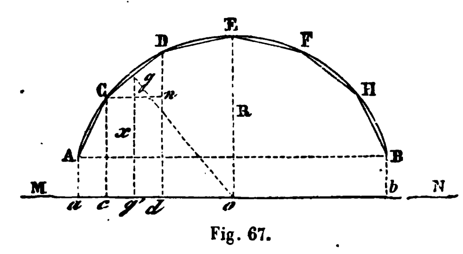


Fig. 67.

lieu g de ce côté, menons la perpendiculaire $gg' = x$ sur MN et l'apothème Og; traçons aussi la droite Cn parallèle à MN. Les triangles semblables CDn et Ogg' donnent

$$\frac{CD}{Og} = \frac{Cn}{gg'} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{Og} = \frac{l'}{x}$$

d'où $\qquad l \times x = l' \times Og$ et par suite $\Sigma\, lx = \Sigma\, l' \times Og$

Mais $\Sigma\, l' = ab$ et en remplaçant dans l'équation (1), on tire :

$$X = \frac{ab \times Og}{L}$$

Ainsi, *la distance du centre de gravité au centre* O *est une quatrième proportionnelle à la ligne, à sa corde et à son apothème.*

86. Centre de gravité d'un arc de cercle. — Pour passer du cas précédent à celui d'un arc de cercle, il suffit de supposer que le nombre des côtés du polygone augmente indéfiniment. A la limite, la ligne brisée se confondra avec l'arc de cercle circonscrit et l'apothème deviendra égal au rayon R. On aura alors pour la

distance du centre de gravité au centre O :

$$X = \frac{\text{rayon R} \times \text{corde AB}}{\text{arc AB}}$$

Donc, *le centre de gravité d'un arc de cercle se trouve sur le rayon qui passe en son milieu, et sa distance au centre de l'arc est une quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde et au rayon.*

Dans le cas d'une demi-circonférence, on a :

$$\text{arc AB} = \pi R$$

et

$$\text{corde AB} = 2R$$

La formule précédente devient donc :

$$X = \frac{R \times 2R}{\pi R} = \frac{2R}{\pi} = 0{,}6366\,R$$

Centre de gravité des surfaces.

87. Centre de gravité de l'aire d'un triangle. — Soit le triangle ABC (*fig.* 68). Supposons que sa surface soit décomposée en tranches infiniment minces parallèles à l'un des côtés BC ; chacune de ces tranches ou filets élémentaires pourra être considérée comme une ligne homogène et aura son centre de gravité en son milieu. Le lieu des points milieux de toutes ces tranches étant la médiane AD, il s'ensuit que cette droite contient le centre de gravité G du triangle. On démontrerait de même que ce point doit se trouver sur la médiane BE et par suite il est à leur point de concours.

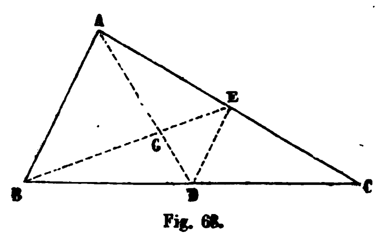


Fig. 68.

Les triangles semblables ABG et GED donnent :

$$\frac{ED}{AB} = \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}.$$

Donc, *le centre de gravité de l'aire d'un triangle se trouve sur l'une*

quelconque des médianes et au 1/3 de cette ligne à partir de la base.

88. Remarque. — Le centre de gravité d'un triangle se confond avec le centre de trois forces parallèles égales appliquées aux trois sommets. En effet, soit F chacune de ces forces ; le point d'application de la résultante égale à 2F des forces appliquées aux sommets A et C partagera la droite AC en deux parties égales ; il se confondra avec le pied E de la médiane BE. En composant ensuite la résultante partielle 2F avec la force F appliquée au sommet B, on obtiendra la résultante finale dont le point d'application sera donné par la relation :

$$\frac{F}{2F} = \frac{GE}{GB} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, le centre des forces parallèles considérées se trouve au 1/3 de la médiane BE ; il se confond donc avec le centre de gravité du triangle ABC.

89. Centre de gravité d'un trapèze. — Soit le trapèze ABCD (*fig.* 69) ; son centre de gravité se trouve sur la droite EF passant par le milieu des deux bases, car cette ligne partage en deux

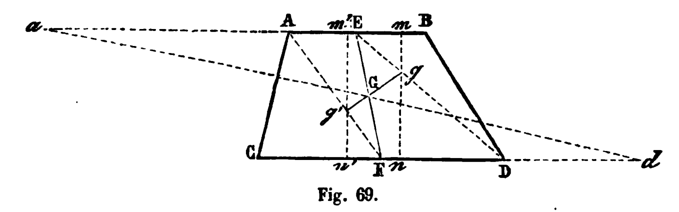


Fig. 69.

parties égales l'infinité de droites parallèles aux bases, en lesquelles on peut décomposer la surface du trapèze. Menons la diagonale AD qui divise la figure ABCD en deux triangles ADB et ADC ; le centre de gravité du premier se trouve sur la médiane DE et au tiers *g* de cette droite à partir de la base AB ; le centre de gravité du second triangle est situé sur la médiane AF et au point *g'* situé au tiers de cette ligne à partir de la base CD. Le centre de gravité du trapèze se trouvera sur la ligne *gg'* qui joint les centres de gravité des deux triangles ; devant se trouver à la fois sur les droites *gg'* et EF, il sera forcément à l'intersection G de ces deux droites.

On peut encore déterminer le centre de gravité d'un trapèze en considérant ce trapèze et les deux triangles ADB et ADC comme des poids ou forces proportionnelles à leur surface, appliquées à leur centre de gravité respectif, et prenant successivement les moments par rapport à deux plans passant par les bases AB et CD.

Posons $AB = b$, $CD = B$; désignons par h la hauteur du trapèze, et par x et y les distances de son centre de gravité aux plans des moments. Nous aurons par rapport au plan AB

$$\text{surf ABCD} \times x = \text{surf ADB} \times gm + \text{surf ADC} \times g'm' \qquad (1)$$

Mais à cause des triangles semblables on a :

$$\frac{gm}{gn} = \frac{Eg}{Dg} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{g'm'}{g'n'} = \frac{Ag'}{Fg'} = \frac{2}{1}$$

En ajoutant les numérateurs aux dénominateurs, il vient :

$$\frac{gm}{gn + gm} = \frac{Eg}{Eg + Dg} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{g'm'}{g'n' + g'm'} = \frac{Ag'}{Ag' + Fg'} = \frac{2}{3}$$

D'où l'on tire : $gm = \frac{h}{3}$ et $g'm' = \frac{2h}{3}$

En substituant dans l'équation (1) et en remplaçant les surfaces par leur valeur, il vient :

$$(B + b)\frac{h}{2} \times x = B\frac{h}{2} \times \frac{2h}{3} + b\frac{h}{2} \times \frac{h}{3}$$

Ou en supprimant le facteur commun $\frac{h}{2}$.

$$(B + b)x = B\frac{2h}{3} + b\frac{h}{3} \qquad (2)$$

On trouverait de même en prenant les moments par rapport au plan CD :

$$(B + b)y = B\frac{h}{3} + b\frac{2h}{3} \qquad (3)$$

Des équations (2) et (3) on tire :

$$x = \frac{h}{3}\ \frac{2B + b}{B + b} \qquad y = \frac{h}{3}\ \frac{B + 2b}{B + b}$$

Divisant ces deux égalités membre à membre, on a :

$$\frac{x}{y}=\frac{2B+b}{B+2b}$$

Cette dernière relation conduit à la construction suivante : prolongez chaque base, et en sens contraire, d'une longueur égale à l'autre, puis joignez les extrémités a et d de ces prolongements ; cette droite va couper la ligne EF au centre de gravité. En effet les triangles EGa, FGd sont semblables et donnent :

$$\frac{EG}{FG}=\frac{Ea}{Fd}=\frac{B+\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}B+b}=\frac{2B+b}{B+2b}=\frac{x}{y}$$

Ainsi, *le centre de gravité d'un trapèze est situé sur la ligne qui joint les milieux des deux bases et il divise cette droite en deux segments qui sont entre eux comme le double de la grande base augmenté de la petite est au double de la petite augmenté de la grande.*

On voit que le rapport de ces deux segments est indépendant de la hauteur du trapèze.

90. Centre de gravité d'un quadrilatère quelconque. — Pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 70), menons les deux diagonales AC et BD. Si nous considérons les deux triangles ABC et ACD déterminés par la diagonale AC, leurs centres de gravité se trouveront sur les médianes BE et DE et au 1/3 de ces lignes à partir du point E ; prenons $EG_1=\frac{BE}{3}$ et $EG_2=\frac{DE}{3}$. La droite G_1G_2 sera parallèle à la diagonale BD et contiendra le centre de gravité G du quadrilatère ; ce point la divisera en deux parties inversement proportionnelles aux surfaces des deux triangles ABC et ACD ; on aura donc :

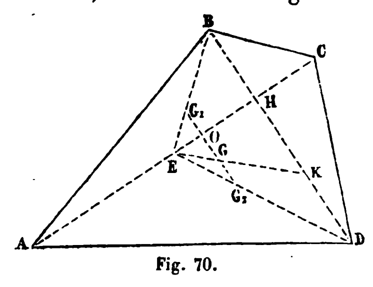


Fig. 70.

$$\frac{GG_1}{GG_2}=\frac{ACD}{ABC}$$

Mais ces triangles ayant même base AC sont entre eux comme leur hauteur, ou comme les segments DH et BH de l'autre diagonale ou

bien encore comme les parties G_1O et G_2O de la droite G_1G_2 qui lui est parallèle ; donc

$$\frac{ACD}{ABC} = \frac{OG_2}{OG_1}$$

Et en remplaçant on a : $\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{OG_2}{OG_1}$ et par suite $GG_1 = OG_2$

De là résulte la construction suivante : pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque, menez l'une des diagonales AC et joignez les sommets B et D au milieu E de cette diagonale ; prenez $EG_1 = \frac{BE}{3}$ et $EG_2 = \frac{ED}{3}$ puis portez $GG_1 = OG_2$; le point G sera le centre de gravité cherché.

On peut encore trouver ce point plus simplement. Prenons $DK = BH$, et joignons KE ; on a :

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{BK}{DK} = \frac{DH}{BH} = \frac{ACD}{ABC}$$

ce qui montre que le point de rencontre G des droites EK et G_1G_2 est le centre de gravité du quadrilatère et en remarquant que l'on a :

$$\frac{EG}{EK} = \frac{EG_2}{ED} = \frac{1}{3}$$

on en conclut la construction suivante : menez les diagonales qui se coupent en un point H ; prenez $DK = BH$ et joignez le point K au milieu E de l'autre diagonale ; enfin portez EG = au 1/3 de EK. Le point G est le centre de gravité du quadrilatère.

91. Centre de gravité d'un polygone quelconque. — Pour trouver le centre de gravité d'un polygone quelconque, on le divise en triangles par des droites issues d'un même sommet, puis on détermine l'aire et le centre de gravité de chacun de ces triangles. On suppose alors appliquées à ces différents centres de gravité, des forces parallèles proportionnelles aux aires des triangles respectifs et on applique la méthode indiquée pour la recherche du centre des forces parallèles.

92. Centre de gravité d'un secteur circulaire. — Soit le secteur circulaire ACBO (*fig.* 71) ; divisons l'arc AB en un très-grand

nombre de parties égales *ab*, *bc*.... et menons des rayons à tous les points de division. Le secteur donné se trouve ainsi divisé en un grand nombre de secteurs élémentaires égaux et comme les arcs *ab*, *bc*.... sont supposés très-petits, on peut regarder ces secteurs comme des triangles rectilignes. Les centres de gravité tels que *g* de tous ces triangles seront situés sur les médianes telles que O*n* et aux 2/3 de ces droites à partir du centre O ; ils seront donc tous à égale distance de ce centre, et par suite se trouveront uniformément répartis sur l'arc A′B′ décrit du point O avec $\frac{2OC}{3}$ pour rayon. Il résulte de là que le centre de gravité du secteur ACBO est le même que celui de l'arc A′B′ ; il est donc sur le rayon OC, et d'après ce que nous avons vu (86), sa distance X au centre O sera donnée par la formule

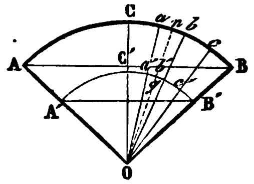


Fig. 71.

$$X = \frac{\text{rayon OC}' \times \text{corde A}'\text{B}'}{\text{arc A}'\text{B}'}$$

Mais $$OC' = \frac{2OC}{3};\ A'B' = \frac{2AB}{3};\ \text{arc A}'\text{B}' = \frac{2\,\text{arc AB}}{3},$$

donc $$X = \frac{2}{3}\ \frac{\text{rayon OC} \times \text{corde AB}}{\text{arc AB}}$$

Ainsi, *le centre de gravité d'un secteur circulaire est situé sur la bissectrice de son angle, et sa distance au centre est une quatrième proportionnelle à l'arc à sa corde et aux 2/3 du rayon.*

Si le secteur considéré est un demi-cercle, on a :

$$\text{corde AB} = 2R \quad \text{et} \quad \text{arc AB} = \pi R$$

par suite $$X = R\,\frac{4}{3\pi} = 0{,}425\,R$$

93. Centre de gravité d'une demi-couronne circulaire. — Si nous remarquons que l'aire de la couronne ACB *bca* (*fig.* 72) est la différence entre les aires des cercles de rayon R et *r*, il devient très-facile de déterminer son centre de gravité. Prenons les moments par rapport à un plan passant par le diamètre AB et perpendiculaire au plan de la

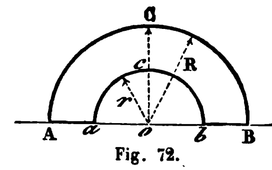


Fig. 72.

couronne. Nous aurons :

$$\frac{\pi}{2}\left(R^2 - r^2\right) X = \frac{\pi R^2}{2} \times 0{,}425R - \frac{\pi r^2}{2} \times 0{,}425r$$

En supprimant le facteur commun $\frac{\pi}{2}$ on tire :

$$X = 0{,}425\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Si $R = 2r$, on aura :

$$X = 0{,}425\,\frac{7r^3}{3r^2} = 0{,}99r$$

c'est-à-dire que X est dans ce cas très-approximativement égal à r.

94. Centre de gravité d'un segment de cercle. — La surface du segment ABDC (*fig.* 73) est égale à la différence des aires du secteur ACBO et du triangle AOB. Supposons que des poids proportionnels à ces surfaces soient appliqués aux centres de gravité respectifs des trois figures ; le théorème des moments par rapport à un plan XY perpendiculaire au plan de la figure, mené par le centre O et parallèlement à AB, donne :

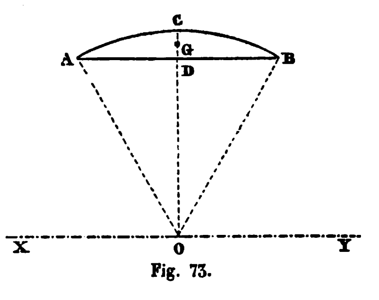


Fig. 73.

$$M \text{ segment} = M \text{ secteur} - M \text{ triangle}$$

En désignant par X la distance inconnue OG du centre de gravité du segment au centre O, on aura :

$$\left(\frac{AO \times \text{arc } AB}{2} - \frac{AB \times OD}{2}\right) X = \left(\frac{AO \times \text{arc } AB}{2} \times \frac{2}{3}\,\frac{AO \times AB}{\text{arc } AB}\right) - \left(\frac{AB \times OD}{2} \times \frac{2OD}{3}\right)$$

Et en réduisant :

$$\left(\frac{AO \times \text{arc } AB}{2} - \frac{AB \times OD}{2}\right) X = \frac{AO^2 \times AB}{3} - \frac{AB \times OD^2}{3}$$

$$\left(\frac{AO \times \text{arc } AB}{2} - \frac{AB \times OD}{2}\right) X = \frac{AB}{3}\left(AO^2 - OD^2\right) \qquad (1)$$

Remarquant que dans le triangle rectangle AOD, on a :

$$AO^2 - OD^2 = AD^2 = \frac{AB^2}{4}$$

En remplaçant dans l'équation (1) et tirant la valeur de X, il vient :

$$X = \frac{AB^3}{6(AO \times \text{arc } AB - AB \times OD)}$$

Connaissant cette longueur X, le centre de gravité du segment est parfaitement déterminé, car il doit se trouver, par raison de symétrie, sur le rayon OC perpendiculaire à la corde AB.

Ainsi, *le centre de gravité d'un segment de cercle se trouve sur le rayon perpendiculaire à sa corde et à une distance du centre égale au rapport du cube de cette corde à six fois le double de l'aire du segment.*

95. Centre de gravité d'une surface conique. — Proposons-nous de déterminer le centre de gravité de la surface conique engendrée par le côté SB (*fig.* 74) du triangle rectangle SOB, dans sa rotation autour du côté SO. Cette surface est celle d'un cône droit à base circulaire ; divisons cette base en très-petites parties égales *ab*, *bc*, *cd*.... et joignons les points de division au sommet ; nous décomposons ainsi la surface en petits triangles égaux S*ab*, S*bc*.... dont les centres de gravité g, g', g''.... sont situés sur les droites qui joignent les sommets au milieu de la base et au 1/3 de ces droites à partir de cette base. Ils se trouvent donc tous contenus dans un plan CD mené parallèlement à la base par le tiers de la hauteur, et le centre de gravité du système se trouve aussi dans ce plan ; or il doit également se trouver sur la droite SO qui est l'axe de symétrie du cône ; par suite, il est à l'intersection G de cette droite avec le plan CD.

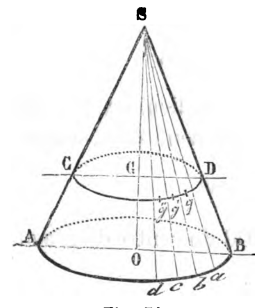


Fig. 74.

Ainsi, on peut dire que *le centre de gravité d'une surface conique est sur l'axe et au 1/3 de cet axe à partir de la base.*

Le centre de gravité d'une surface conique se confond avec celui de la section faite parallèlement à la base par le 1/3 de la hauteur.

Le centre de gravité d'une surface conique se confond avec celui du triangle ASB déterminé en coupant cette surface par un plan quelconque passant par l'axe.

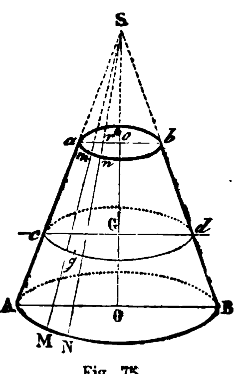


Fig. 75.

96. Centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de cône. — En raisonnant sur les petits trapèzes NM*mn*.... (*fig.* 75), en lesquels on peut décomposer la surface conique en menant les génératrices M*m*, N*n*.... comme nous l'avons fait pour les petits triangles du cas précédent, on trouverait que le centre de gravité de cette surface est situé sur l'axe à des distances x et y des bases AB et ab données par la relation

$$\frac{x}{y}=\frac{R+2r}{2R+r}$$

Ainsi, *le centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de cône se confond avec celui du trapèze AB*ab *déterminé en coupant cette surface par un plan quelconque passant par l'axe.*

Centre de gravité des volumes.

97. Centre de gravité d'un prisme triangulaire. — Soit le prisme triangulaire ABC A'B'C' (*fig.* 76); décomposons ce prisme en tranches infiniment minces, telles que *mn*, *m'n* parallèles à l'une des faces latérales. Ces tranches peuvent être considérées comme des parallélogrammes matériels et le centre de gravité de chacune d'elles est situé au milieu des lignes *df* que joignent les milieux de deux côtés opposés. Tous ces centres de gravité, et par suite le centre de gravité du prisme, se trouvent dans le plan diamétral CC'*r'r*, qui partage en deux parties égales toutes les droites parallèles à A'B', et dans le plan *ajc* passant par le milieu des arêtes latérales du prisme. Le centre de gravité du prisme est

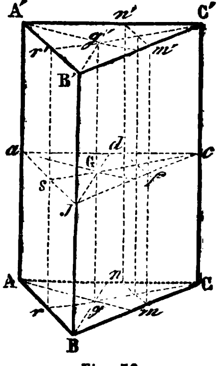


Fig. 76.

donc situé à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur la médiane *cs* de la section *ajc* faite à égale distance des deux bases. Par la même raison, e centre de gravité du prisme se trouve sur les deux autres médianes de cette section et par conséquent il est à leur point de concours.

On voit donc que le point G est le milieu de la droite *gg'* qui joint les centres de gravité des deux bases.

Ainsi, *le centre de gravité d'un prisme triangulaire se confond avec le centre de gravité de la section faite à égale distance des deux bases*, ou bien encore, *il est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

98. Centre de gravité d'un prisme quelconque. — Considérons par exemple, un prisme pentagonal ABCHK (*fig.* 77). Par l'arête latérale AF menons les plans diagonaux ACH et ADK ; ces plans divisent le prisme donné en trois prismes triangulaires dont les centres de gravité *g*,*g'*,*g''* seront dans la section *abcde* faite à égale distance des deux bases, et se confondront avec les centres de gravité des triangles *abc*, *acd*, *ade*. Ces triangles sont proportionnels aux volumes des prismes correspondants ; si donc nous appliquons aux points *g*,*g'*,*g''* des forces égales aux poids des différents prismes triangulaires, c'est-à-dire proportionnelles à la surface des triangles *abc*, *acd*, *ade*, le point d'application de la résultante de ces forces sera le centre de gravité du prisme pentagonal et coïncidera avec le centre de gravité G du polygone *abcde*.

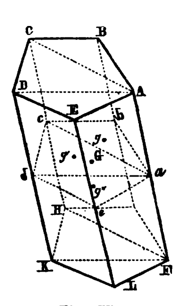


Fig. 77.

Donc, *le centre de gravité d'un prisme quelconque est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

On peut déduire de là que *le centre de gravité d'un cylindre est au milieu de son axe.* En effet, la position du centre de gravité dans un prisme étant indépendante du nombre de ses faces, et le cylindre étant la limite vers laquelle tend un prisme régulier dont le nombre des faces augmente indéfiniment, il en résulte que, à la limite, le centre de gravité sera encore au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.

99. Centre de gravité d'une pyramide triangulaire. — Soit ABCD (*fig.* 78), la pyramide triangulaire donnée. Menons la

médiane BE de la base BCD et prenons sur cette droite une longueur $EG_1 = \frac{BE}{3}$; le point G_1, est le centre de gravité du triangle BCD ; joignons ce point au sommet A, et menons des plans infiniment rapprochés parallèles à la base BCD ; ces plans décomposent la pyramide en tranches triangulaires infiniment minces, et tous ces triangles, par raison de similitude, ont leur centre de gravité sur la droite AG_1 et par suite le centre de gravité de la pyramide se trouve aussi sur c te droite.

En décomposant la pyramide en tranches parallèles à une autre face, celle ADC par exemple, on trouverait de même que le centre de gravité est sur la droite BG_2 qui joint le sommet B au centre de gravité de la face opposée. Les deux droites AG_1 et BG_2 évidemment contenues dans un même plan AEB se coupent au point G qui est le centre de gravité de la pyramide.

Comme pour la décomposition de la pyramide en tranches, nous avons mené les plans parallèlement à deux faces prises arbitrairement, on en conclut que *les quatre droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux centres de gravité des faces opposées se coupent en un même point qui est le centre de gravité du tétraèdre.*

Menons la droite G_1G_2 ; cette droite est égale au 1/3 de l'arête BA et lui est parallèle, car dans le triangle ABE, on a :

$$EG_1 = \frac{BE}{3} \quad \text{et} \quad EG_2 = \frac{AE}{3}$$

Les triangles GG_1G_2 et BGA étant semblables, donnent :

$$\frac{GG_1}{GA} = \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$$

Ajoutant les numérateurs aux dénominateurs, on aura :

$$\frac{GG_1}{GA + GG_1} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où} \quad GG_1 = \frac{1}{4} AG_1$$

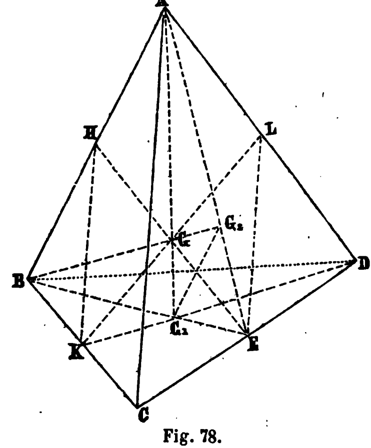


Fig. 78.

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est situe*

sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base et au 1/4 de cette ligne à partir de la base.

100. REMARQUE I.— *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire coïncide avec le centre de quatre forces parallèles appliquées aux quatre sommets.* En effet, supposons que l'on ait appliqué aux quatre sommets d'un tétraèdre ABCD quatre forces égales dont nous désignerons par F l'intensité commune. En composant d'abord les forces appliquées aux points D et C on obtiendra une résultante égale à 2F appliquée en E, au milieu de la droite DC ; pour trouver le point d'application de la résultante 3F des forces 2F et F appliquées l'une en E et l'autre en B, il faut diviser la droite BE en parties inversement proportionnelles à l'intensité des composantes, c'est-dire dans le rapport inverse des nombres 2 et 1 ; on obtiendra ainsi le point G_1 centre de gravité de la base BCD. Pour composer ensuite la force 3F appliquée en G_1 avec la dernière force F appliquée en A, il faudra diviser la droite AG_1 dans le rapport inverse des nombres 3 et 1, ce que donne précisément le point G, centre de gravité de la pyramide.

101. REMARQUE II. — De ce qui précède, on déduit la conclusion suivante : *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la droite qui joint le milieu de deux arêtes opposées et divise cette ligne en deux parties égales.*

Il est évident que, quel que soit l'ordre suivi pour la composition des quatre forces F, le point d'application de la résultante ne changera pas. Cela posé, composons les forces appliquées en A et en B ; le point d'application de la résultante 2F sera au point H, milieu de AB. Composons de même les forces appliquées en D et en C; leur résultante égale à 2F passera par le point E milieu de la droite CD. Il reste maintenant à composer les résultantes partielles égales chacune à 2F ; le point d'application de la résultante finale du système sera au milieu de la droite HE. Or, nous avons démontré que ce point coïncide avec le centre de gravité de la pyramide; donc le centre de gravité de la pyramide partage la droite HE en deux parties égales.

Au lieu de composer la résultante des forces appliquées en A et B avec celle des forces appliquées en D et C, on pourrait arriver au même résultat en composant A et C avec B et D, ou bien encore en composant A et D avec B et C ; on trouverait ainsi deux

autres droites analogues à la droite HE contenant le centre de gravité. On voit donc que ces trois droites se coupent en leurs milieux ; cette proposition se démontre aussi en géométrie.

La mécanique offre souvent des exemples de démonstrations simples de certains théorèmes de géométrie.

102. Centre de gravité d'une pyramide quelconque. — Soit SABC.... (*fig.* 79) la pyramide donnée; décomposons cette pyramide en tétraèdres en menant par l'une des arêtes SA les plans diagonaux SAC, SAD,... En suivant la même marche que pour le prisme quelconque, on démontrerait que les centres de gravité g,g',g'' de ces tétraèdres sont dans le plan *abcde* mené parallèlement à la base par le 1/4 de la hauteur de la pyramide; ce plan doit contenir le centre de gravité de la pyramide, et on verrait qu'il coïncide avec le centre de gravité du polygone *abcde*. D'un autre côté et par raison de similitude les centres de gravité de toutes les sections que l'on peut faire dans la pyramide, parallèlement à la base, sont sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base ; par suite le centre de gravité de la pyramide est aussi sur cette droite.

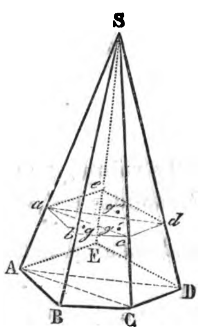


Fig. 79.

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide quelconque est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base et au 1/4 de cette droite à partir de la base.*

Le cône pouvant être considéré comme la limite vers laquelle tend une pyramide régulière à mesure qu'on augmente le nombre de ses faces, il s'ensuit *que le centre de gravité d'un cône est sur la droite qui joint le sommet au centre de la base et au 1/4 de cette droite à partir de la base.*

103. Centre de gravité d'un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles. — Soit ABCDEF (*fig.* 80) le tronc de pyramide donné. On voit de suite que, comme pour la pyramide, le centre de gravité est sur la droite IH qui joint les centres de gravité des deux bases. Pour connaître la position du centre de gravité G sur cette ligne, appliquons le théorème des moments par rapport aux deux bases. Désignons par B et par b les bases ABC et DEF ; par x et

par y la distance du centre de gravité du tronc à chacune de ses bases et soit h la hauteur de ce tronc.

Fig. 80.

Décomposons le tronc de pyramide en trois pyramides triangulaires en menant les plans AEC, AEF ; ces pyramides EABC, ADEF et EAFC sont les mêmes que celles servant à la détermination du volume du tronc. Leurs volumes respectifs sont comme on le sait :

$$v = \frac{BH}{3} \qquad v' = \frac{bh}{3} \qquad v'' = \frac{h}{3}\sqrt{Bb}$$

Le volume total V est égal à la somme des volumes des trois pyramides v, v', v''. Les distances du centre de gravité de ces pyramides aux plans des moments sont respectivement égales à $\frac{h}{4}$ et $\frac{3h}{4}$ pour la première ; $\frac{3h}{4}$ et $\frac{h}{4}$ pour la deuxième. Quant à la troisième on n'aperçoit pas immédiatement quelles sont les distances de son centre de gravité aux deux bases ; mais en se rappelant (101. Remarque II.) que ce centre de gravité est au milieu de la droite qui joindrait les milieux des deux côtés opposés AC et EF, on voit qu'il se trouve dans le plan mené à égale distance des deux bases et par suite sa distance à chacun des deux plans est $\frac{h}{2}$ ou $\frac{2h}{4}$.

Cela connu, l'équation des moments par rapport à la grande base donne :

$$Vx = \frac{Bh}{3} \times \frac{h}{4} + \frac{bh}{3} \times \frac{3h}{4} + \frac{h}{3}\sqrt{Bb} \times \frac{2h}{4}$$

Mettant $\frac{h^2}{12}$ en facteur commun dans le second membre, il vient :

$$Vx = \frac{h^2}{12}\left(B + 3b + 2\sqrt{Bb}\right)$$

Par rapport à la petite base, on aura de même :

$$Vy = \frac{h^2}{12}\left(b + 3B + 2\sqrt{Bb}\right)$$

En divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{x}{y}=\frac{B+3b+2\sqrt{Bb}}{b+3B+2\sqrt{Bb}}$$

On peut se dispenser de mesurer les bases B et b, car on sait que les aires de deux polygones semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues ; en désignant par L et l ces côtés, on pourra transformer la formule ci-dessus comme il suit :

$$\frac{x}{y}=\frac{L^2+3l^2+2Ll}{l^2+3L^2+2Ll}$$

104. Centre de gravité d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles. — Si l'on décompose le tronc donné en troncs de pyramides triangulaires par des plans diagonaux et si l'on remarque que les bases supérieures sont proportionnelles aux bases inférieures, on verra que le rapport $\frac{x}{y}$, des distances du centre de gravité de chacun d'eux aux deux bases, est constant. Il résulte de là que tous ces différents centres de gravité se trouvent dans un même plan parallèle aux bases et coïncident avec les centres de gravité des triangles en lesquels cette section est décomposée par les plans diagonaux ; le centre de gravité du tronc se trouvera aussi dans ce plan.

De plus, les volumes des troncs de pyramides triangulaires sont proportionnels aux aires des triangles de la section qui contient leur centre de gravité ; donc le centre de gravité du tronc de pyramide coïncide avec le centre de gravité de cette section.

Ainsi, *le centre de gravité d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles est sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases, et il divise cette droite en deux segments additifs donnés par la relation :*

$$\frac{x}{y}=\frac{L^2+3l^2+2Ll}{l^2+3L^2+2Ll}$$

dans laquelle L et l représentent des côtés homologues des bases.

Cette proposition s'étend au tronc de cône qui est la limite vers laquelle tend un tronc de pyramide lorsque le nombre de ses faces augmente indéfiniment.

Si le tronc de cône est à bases circulaires, les cercles étant proportionnels aux carrés de leurs rayons, la relation ci-dessus pourra s'écrire :

$$\frac{x}{y}=\frac{R^2+3r^2+2Rr}{r^2+3R^2+2Rr}$$

§ 4. — THÉORÈME DE GULDIN ET SES APPLICATIONS

Guldin a démontré un théorème qui permet de calculer la surface ou le volume engendré par la rotation d'une ligne ou d'une surface plane autour d'un axe fixe, lorsqu'on connaît la distance de son centre de gravité à cet axe. Il comporte deux propositions : l'une relative aux surfaces et l'autre relative aux volumes.

105. Proposition I. — *La surface engendrée par une ligne plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan et sans la couper, a pour mesure la longueur de la ligne génératrice multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité.*

Prenons une ligne plane quelconque AB (*fig.* 81) ; considérons un élément mn, de cette courbe, assez petit pour qu'il puisse être regardé comme rectiligne et soit x la distance de son milieu à l'axe OO′. L'élément mn, dans sa révolution autour de cet axe, engendre la surface d'un tronc de cône droit dont l'aire est égale à la génératrice mn multipliée par la circonférence moyenne.

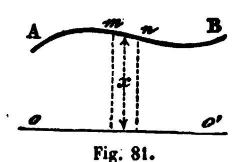


Fig. 81.

On a donc :

$$s=mn\times 2\pi x$$

En désignant par $m'n'$, $m''n''$... les différents éléments de la courbe, on aurait de même :

$$s'=m'n'\times 2\pi x'$$
$$s''=m''n''\times 2\pi x''$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$S=2\pi\,(mn\times x+m'n'\times x'+m''n''\times x''+\ldots)$$

Or la parenthèse exprime la somme des moments des différents éléments qui composent la courbe, par rapport à un plan mené suivant OO′ perpendiculairement au plan de la courbe. Si donc L est la longueur de la ligne et X la distance de son centre de gravité au plan des moments, on aura :

$$LX = mn \times x + m'n' \times x' + \ldots$$

et par suite

$$S = 2\pi X \times L$$

ce qu'il fallait démontrer.

106. PROPOSITION II. — *Le volume engendré par une figure plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan et sans la couper, a pour mesure l'aire de la figure génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Soit S (*fig.* 82) la surface génératrice et OO′ l'axe situé dans son plan. Décomposons la surface S en éléments rectangulaires tels que *abcd* au moyen de perpendiculaires et de parallèles à l'axe OO′.

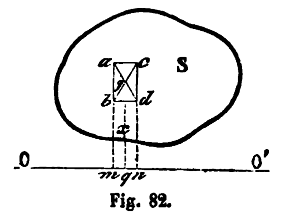


Fig. 82.

Le volume engendré par le petit rectangle *abcd* est égal à la différence des volumes de deux cylindres droits ayant pour hauteur commune *ac* et pour rayons *am* et *bm*; appelant *v* ce volume, on aura :

$$v = \pi(\overline{am}^2 - \overline{bm}^2) \times ac$$

ou

$$v = \pi(am + bm)(am - bm) \times ac$$

Or on a sur la figure :

$$am + bm = 2gq = 2x \quad \text{et} \quad am - bm = ab$$

En remplaçant il vient :

$$v = 2\pi x \times ab \times ac$$

Mais $ab \times ac$ est la surface s du petit rectangle *abcd* ; donc

$$v = 2\pi x \times s$$

Pour tout autre petit rectangle, on aurait de même :

$$v' = 2\pi x' \times s'$$
$$v'' = 2\pi x'' \times s''$$
$$\ldots = \ldots\ldots$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$V = 2\pi (sx + s'x' + s''x'' + \ldots)$$

Or la parenthèse exprime la somme des moments des différents petits rectangles en lesquels est décomposée la surface S, par rapport à un plan mené suivant OO′ et perpendiculairement au plan de la surface. Si donc X est l'ordonnée de son centre de gravité, on aura :

$$SX = sx + s'x' + s''x'' + \ldots$$

et par suite

$$V = 2\pi X \times S$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

107. Application à la détermination des surfaces et des volumes. — *Surface et volume du cône droit.* La surface latérale du cône est engendrée par la droite *ab* (*fig.* 83) tournant autour de l'axe *ao* passant par son extrémité *a*. Désignons *ab* par *l*, *bo* par *r* et *ao* par *h*. On a, d'après le théorème de Guldin :

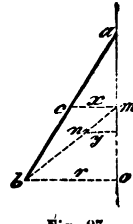


Fig. 83.

$$S = l \times 2\pi x$$

Or, dans le triangle *aob*, on a :

$$\frac{x}{r} = \frac{ac}{ab} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$x = \frac{r}{2}$$

En remplaçant, il vient :

$$S = l \times 2\pi \frac{r}{2} = \pi r l$$

Le volume est engendré par le triangle rectangle *aob* tournant autour du même axe *ao* ; on a donc :

$$V = \frac{rh}{2} \times 2\pi y$$

Mais le triangle *mob* donne :

$$\frac{y}{r} = \frac{mn}{mb} = \frac{1}{3}$$

d'où

$$y \times \frac{r}{3}$$

En remplaçant il vient enfin :

$$V=\frac{rh}{2}\times 2\pi\frac{r}{3}=\pi r^2\times\frac{h}{3}$$

108. Surface et volume de la sphère. — On a, d'après le théorème de Guldin (*fig.* 84) :

$$S=l\times 2\pi x$$

Or $$l=\pi r$$

Fig. 84.

et $$x=\frac{\text{rayon}\times\text{corde}}{\text{arc}}=\frac{r\times 2r}{\pi r}=\frac{2r}{\pi}$$

En remplaçant il vient :

$$S=\pi r\times 2\pi\frac{2r}{\pi}=4\pi r^2$$

On a de même pour le volume :

$$V=s\times 2\pi y$$

Mais $$s=\frac{\pi r^2}{2}\quad\text{et}\quad y=\frac{4r}{3\pi}$$

Et par suite $$V=\frac{\pi r^2}{2}\times 2\pi\frac{4r}{3\pi}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

109. Surface et volume engendrés par la rotation d'un hexagone régulier tournant autour d'un de ses côtés (*fig.* 85). — La surface sera donnée par la formule

$$S=l\times 2\pi x \qquad (1)$$

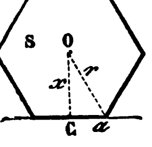


Fig. 85.

dans laquelle l est la longueur du contour et x la distance du centre de gravité à l'axe de rotation. Si r est le rayon du cercle circonscrit, on aura :

$$l=6r$$

Pour trouver x, remarquons que le triangle rectangle aOC donne :

$$x^2=r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

équation pouvant s'écrire sous la forme

$$x^2 = \left(r + \frac{r}{2}\right)\left(r - \frac{r}{2}\right) = \frac{3r}{2} \times \frac{r}{2} = \frac{3r^2}{4}$$

d'où

$$x = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

En remplaçant dans la formule (1) il vient :

$$S = 6r \times 2\pi \frac{r\sqrt{3}}{2} = 6\pi r^2 \sqrt{3}$$

Pour le volume, on a :

$$V = s \times 2\pi x$$

Or on sait que la surface s d'un hexagone régulier en fonction du côté est :

$$s = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

Par conséquent :

$$V = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \times 2\pi \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{9\pi r^3}{2}$$

Application à la recherche des centres de gravité. — Le théorème de Guldin permet encore, en le prenant à l'inverse, de déterminer le centre de gravité des lignes et des surfaces planes, lorsqu'on connaît les surfaces ou les volumes qu'elles engendrent dans leur révolution autour d'un axe situé dans leur plan. Voici quelques exemples.

110. Centre de gravité d'un arc de cercle. — L'arc l (*fig.* 86) en tournant autour de l'axe mn passant par son centre, engendre la surface d'une zone sphérique de rayon r et de hauteur ab; la géométrie nous apprend que cette surface est, en posant $ab = h$

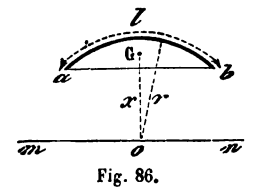


Fig. 86.

$$s = 2\pi r \times h$$

Cette même surface est, d'après le théorème de Guldin,

$$s = l \times 2\pi x$$

Par conséquent $$l \times 2\pi x = 2\pi r \times h$$

D'où l'on tire : $$x = \frac{rh}{l} = \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}}$$

Cette expression de x est la même que celle trouvée par l'application du théorème des moments.

111. Centre de gravité d'un trapèze. — Soit le trapèze ABCD (*fig.* 87) et proposons-nous de déterminer la distance x du centre de gravité à la grande base. Posons $AB = B$ et $CD = b$.

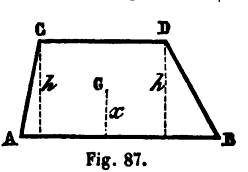


Fig. 87.

Le volume engendré par la rotation de ce trapèze en tournant autour de sa base AB, peut être considéré comme composé de deux parties : 1° du volume d'un cylindre droit de rayon h et de hauteur b ; 2° du volume engendré par la rotation d'un triangle ayant pour base $B - b$ et pour hauteur h ; ce dernier, donné par un théorème de géométrie, est :

$$\frac{1}{3}\pi h^2 (B - b)$$

On a donc :

$$V = \pi h^2 \times b + \frac{1}{3}\pi h^2 (B - b) = \frac{\pi h^2}{3}(B + 2b)$$

Ce même volume, exprimé par le théorème de Guldin, est :

$$V = \frac{B+b}{2} \times h \times 2\pi x$$

Par suite,
$$\frac{B+b}{2} \times h \times 2\pi x = \frac{\pi h^2}{3}(B + 2b)$$

D'où l'on tire :
$$x = \frac{h}{3} \times \frac{B + 2b}{B + b}$$

Expression déjà trouvée au (89) pour la valeur de la distance du centre de gravité à la grande base, distance que nous avons alors désignée par y.

CHAPITRE III

§ 1. — COMPOSITION ET RÉDUCTION AU MOINDRE NOMBRE D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE

112. Forces situées dans un même plan. — *Leur réduction à une résultante unique ou à un couple.* Soit F,F′,F″.... les forces données ; traçons, dans le plan de ces forces, deux axes rectangulaires Ox et Oy. Chaque force du système peut être décomposée en deux composantes respectivement perpendiculaires à chacun des axes et les points d'application de ces composantes peuvent se transporter aux points où leur direction rencontre l'axe. Le système primitif des forces F,F′,F″.... se trouve ainsi remplacé par deux groupes de forces parallèles dont l'un est formé par les composantes parallèles à l'axe Oy et appliquées aux différents points de l'axe Ox, et dont l'autre est formé par les composantes parallèles à l'axe Ox et appliquées aux différents points de l'axe Oy. Nous avons maintenant à composer ces deux groupes de forces parallèles ; cette composition présente trois cas différents :

Fig. 88.

1° *Chacun des groupes admet une résultante unique.* Soit X et Y (*fig.* 88) les résultantes des deux groupes. Ces deux forces peuvent être considérées comme appliquées au point C où leurs directions se coupent, et, là, elles peuvent se composer en une seule force R qui sera la résultante du système.

2° *L'un des deux groupes donne lieu à un couple, tandis que l'autre admet une résultante unique.* Soit $(X_1 — X_1)$ le couple

(*fig.* 89) et Y_1 la résultante de l'autre groupe. Les forces X_1 et Y_1 dont les directions se coupent au point I', se composent en une seule force R' que l'on peut appliquer au point I où sa direction rencontre celle de la force $-X_1$; en ce point I la résultante partielle R' peut être remplacée par ses composantes X_1 et Y_1. Mais les forces X_1 et $-X_1$ sont égales et directement opposées ; elles se détruisent et il ne reste que la force $R = Y_1$, appliquée au point I, qui est la résultante du système. Donc, dans ce cas, le système des forces données admet encore une résultante unique.

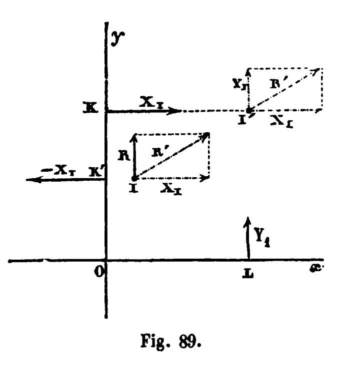


Fig. 89.

3° *Chacun des groupes se réduit à un couple.* Soit $(X_1 - X_1)$ (*fig.* 90) et $(Y_1 - Y_1)$ ces deux couples ; les forces X_1 et Y_1 se composent en une seule force R appliquée au point I, où leurs directions se rencontrent ; de même les forces $-X_1$ et $-Y_1$ se composent en une seule force R' qui est évidemment égale et parallèle à la force R ; ces deux forces étant de sens contraire et n'étant pas directement opposées, forment un couple.

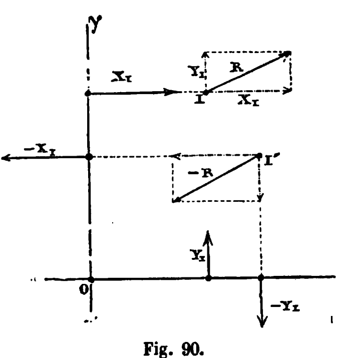


Fig. 90.

Donc, dans ce cas, le système des forces données n'admet pas de résultante unique.

118. Conditions d'équilibre. — Pour établir les conditions d'équilibre d'un corps solide soumis à l'action de plusieurs forces situées dans un même plan, remarquons que lorsque le système admet une résultante unique, la projection de la résultante sur l'un quelconque des deux axes est égale à la somme algébrique des projections des forces données sur ce même axe, car les composantes des forces F, F', F''... parallèles à l'axe des X par exemple, ne

sont autres que les projections de ces forces sur cet axe. On considère comme positives les projections dirigées de O vers x, et comme négatives les projections dirigées en sens inverse ; il en est de même pour l'axe Oy ; les projections dirigées de O vers y sont regardées comme positives, et les projections dirigées en sens contraire comme négatives.

Remarquons aussi que le moment de la résultante par rapport au point de rencontre des axes est égal à la somme algébrique des moments des forces proposées. En effet, d'après ce que nous avons démontré (48), on sait que le moment de chacune des forces F,F′,F″... est égal à la somme des moments de ses composantes parallèles aux axes ; on sait aussi (65) que la même égalité a lieu pour chacun des deux groupes de forces parallèles appliquées aux deux axes. Donc *la somme des moments des forces données par rapport au point* O *est égale à la somme des moments des forces* X *et* Y, *et par suite égale au moment de leur résultante* R.

Maintenant, pour que le corps solide sur lequel sont appliquées les forces F,F′,F″... soit en équilibre, *il faut et il suffit que ces forces se réduisent à une résultante unique*, *et que cette résultante soit nulle*. Or, quand ceci a lieu, la somme des projections de toutes les forces sur un axe quelconque est nulle, ainsi que la somme des moments par rapport à un point quelconque pris dans leur plan.

Donc, pour qu'un corps solide soumis à l'action de plusieurs forces situées dans un même plan soit en équilibre, il faut et il suffit que ces forces satisfassent aux deux conditions suivantes :

1° *Que la somme de leurs projections sur deux axes qui se coupent dans leur plan soit nulle pour chacun d'eux ;*

2° *Que la somme de leurs moments par rapport au point de rencontre de ces axes soit égal à* 0.

114. Forces dirigées arbitrairement dans l'espace. Leur réduction à trois. — Considérons un système quelconque de forces F,F′,F″... appliquées aux points *abc*... (*fig.* 91) d'un même corps solide. Prenons arbitrairement, dans ce corps, trois points O,O′,O″, non situés en ligne droite et joignons ces trois points aux points *a*,*b*,*c*... d'application des forces. Si la force F n'est pas située dans le plan O,O′,O″, on peut admettre que son point d'application ne s'y trouve pas, puisqu'il peut être situé en un point quelconque

de sa direction ; dans ce cas, la force F peut se décomposer, par la règle du parallélipipède des forces, en trois composantes f, f', f'' dirigées suivant aO, aO′ aO″ et pouvant être supposées appliquées aux points O,O′,O″.

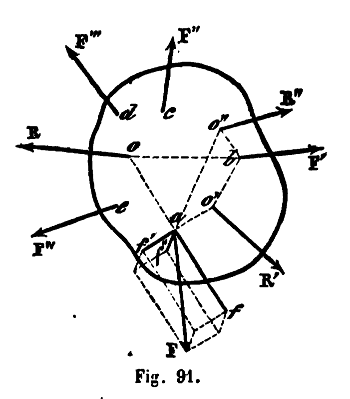


Fig. 91.

Si la force F est comprise dans le plan O,O′,O″, les trois droites aO, aO′, aO″, le sont aussi et la décomposition de la force peut s'effectuer d'une infinité de manières ; on peut, par exemple, décomposer la force suivant les deux directions aO et aO′, et supposer nulle la troisième composante. La force F′ peut à son tour se décomposer en trois autres dirigées suivant les trois droites bO, bO′ bO″ et que l'on peut considérer comme étant respectivement appliquées aux points O,O′,O″. Il en sera de même pour toutes les autres forces proposées. Le système primitif se trouvera ainsi remplacé par trois groupes de forces concourantes dont le premier, appliqué en O, donnera une résultante R ; le deuxième, appliqué en O′, donnera une résultante R′ et le troisième, appliqué en O″, fournira une résultante R″.

Ainsi, *un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable est toujours réductible à trois forces appliquées en trois points pris arbitrairement dans le corps.*

Remarque I. — La projection sur un axe quelconque de chacune des forces du système est égale à la somme des projections, sur le même axe, de ses composantes suivant les directions qui joignent leurs points d'applications aux points O,O′,O″. De plus, les projections des résultantes partielles R,R′,R″ sur le même axe sont respectivement égales à la somme des projections des composantes appliquées en O,O′,O″.

On conclut de là que *la somme des projections sur un axe quelconque des trois forces* R,R′,R″ *est égale à la somme des projections sur le même axe de toutes les forces du système.*

Remarque II. — Le même raisonnement que nous venons de faire pour la remarque précédente nous conduirait à la conclusion

suivante : *La somme des moments par rapport à un axe quelconque des trois forces* R,R′,R″ *est égale à la somme des moments par rapport au même axe de toutes les forces du système.*

115. Réduction d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide à deux forces dont l'une passe par un point pris arbitrairement. — Réduisons d'abord le système considéré à trois forces F,F′,F″ (*fig.* 92) appliquées en trois points M, M′, M″, pris arbitrairement dans le corps. Ces trois forces peuvent se réduire à deux.

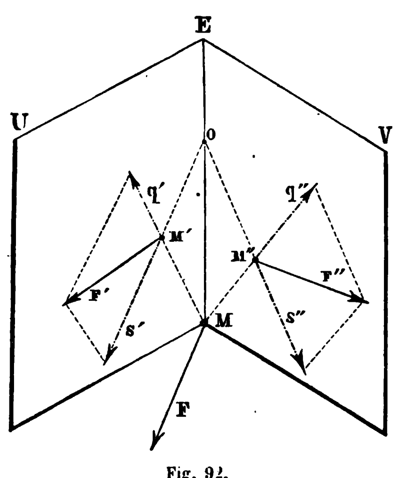


Fig. 92.

En effet, considérons les deux plans qui passent, le premier par le point M et la force F″, le deuxième par ce même point M et par la force F′; soit ME leur intersection, ou s'ils se confondent, une droite tracée dans le plan commun, et prenons sur cette droite un point quelconque O. La force F″ située dans le plan OMM″ peut se décomposer en deux composantes dirigées suivant OM″ et MM″ que l'on peut appliquer aux points M et O. La force F′ située dans le plan OMM′ peut, elle aussi, se décomposer en deux composantes appliquées aux mêmes points M et O. Le point M se trouve actuellement sollicité par trois forces, c'est-à-dire par la force F et par les deux composantes de F′ et de F″, et ces trois forces se composent en une seule S. Le point O est aussi sollicité par deux forces se composant en une seule T.

Donc, le système des forces proposées est remplacé par les deux forces S et T, dont l'une passe par le point M pris à volonté.

Ainsi, *un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable est toujours réductible à deux forces, dont l'une passe par un point pris arbitrairement.*

Généralement ces deux forces ne sont pas dans un même plan, et on ne peut pas pousser plus loin la réduction.

Remarque I. — La réduction à deux forces peut s'opérer d'une infinité de manières. En effet, on voit que sans changer le point M il suffit de déplacer le point O le long de la droite ME, pour que les composantes appliquées en O et en M varient et par suite leurs résultantes S et T varient aussi d'intensité et de direction.

On peut encore, sans même déplacer le point O, appliquer aux extrémités de la droite OM, et dans la direction de cette droite, deux forces égales et directement opposées ; ces forces ne changeront rien à l'état du corps, mais elles se composeront avec les forces S et T, et donneront lieu à deux nouvelles résultantes S′ et T′.

Remarque II. — On voit aisément que la somme des projections, sur un axe quelconque, des deux résultantes S et T est égale à la somme des projections, sur le même axe, des trois forces F,F′,F″ et par suite, à la somme des projections sur le même axe de toutes les forces du système.

On voit de même que la somme des moments des deux résultantes S et T par rapport à un axe qnelconque, est égale à la somme des moments par rapport au même axe, des trois forces F,F′,F″, et par suite, à la somme des moments par rapport au même axe, de toutes les forces du système.

On conclut de là : 1° *Quand un système quelconque de forces a été réduit à deux résultantes, la somme des projections de ces deux résultantes sur un axe quelconque est égale à la somme des projections, sur le même axe, de toutes les forces du système.*

2° *Quand un système quelconque de forces a deux résultantes, la somme des moments de ces deux résultantes, par rapport à un axe quelconque, est égale à la somme des moments, par rapport au même axe, de toutes les forces du système.*

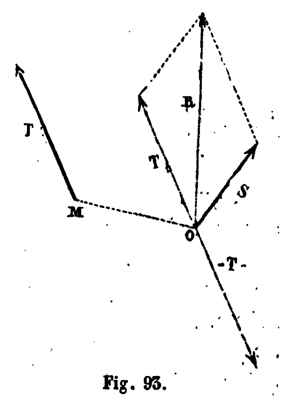


Fig. 93.

116. Réduction d'un système quelconque de forces à une force et à un couple. — Lorsqu'un système quelconque de forces a été réduit aux deux résultantes S et T, on peut encore remplacer ces deux forces par une force et un couple.

En effet, soit S et T (*fig.* 93) les deux résultantes auxquelles on a réduit le système ; appliquons au point O deux forces T et — T directement opposées, égales et parallèles à la force T appliquée en M ; ces forces ne changent rien à l'état du corps, et l'on peut composer la force T avec la force S en une résultante R, tandis que les forces T et — T forment un couple.

Donc, *un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable peut toujours se réduire à une force et à un couple.*

Remarque importante. — L'introduction des forces T et — T, dans le système, n'a changé en rien la somme des projections des forces S et T sur un axe quelconque, et par suite cette somme est égale à celle des projections, sur le même axe, de la force R et du couple (T — T) ; mais la somme algébrique des projections des deux forces d'un couple étant toujours nulle, on peut dire que la projection de la force R est égale à la somme des projections des forces S et T, qui elle-même est égale à la somme des projections de toutes les forces du système.

Il résulte de là que la projection de la force R sur un axe quelconque est indépendante de la position du point O pris arbitrairement dans le corps. Faisons passer par ce point O trois axes rectangulaires; les projections de la force R sur ces axes seront données par les équations :

$$Rx = \Sigma Fx$$
$$Ry = \Sigma Fy$$
$$Rz = \Sigma Fz$$

Mais une droite est déterminée en grandeur et en direction lorsqu'on connaît ses projections sur trois axes rectangulaires, puisqu'elle est la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois projections. Donc la force R est constante en grandeur et en direction, quel que soit le point O choisi. On a donné à cette force constante le nom de *résultante de translation.*

Remarque II.—La projection d'une droite sur un axe quelconque ne change pas quand on déplace cette droite parallèlement à elle-même. Donc, *la résultante de translation d'un système quelconque de forces est égale en grandeur et en direction, à la résultante qu'on obtiendrait en transportant au point O, et parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces du système, et en les composant en une seule.*

117. Condition pour qu'un système quelconque de forces admette une résultante unique. — Quand on a réduit le système proposé à deux résultantes S et T (*fig.* 94), il peut arriver que ces deux forces soient dans un même plan, ou bien dans des plans différents. Si elles sont dans un même plan, elles sont concourantes, et alors elles se composent en une seule force ; ou bien elles sont parallèles, et, dans ce cas, elles admettent aussi une résultante unique, sauf le cas où elles se réduisent à un couple.

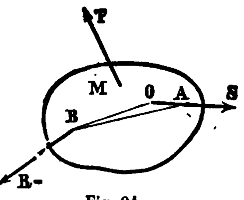


Fig. 94.

Si les deux forces S et T sont dans des plans différents, elles ne peuvent avoir de résultante unique. En effet, supposons que cette résultante existe, et appliquons au corps une force — R qui lui soit égale et directement opposée. Les trois forces S, T et — R se feront équilibre, et cet équilibre ne sera pas troublé en fixant le point d'application B de la force — R et un point quelconque O de la force S ; mais ces forces se trouvant détruites, il ne reste que la force T.

Le corps ne pouvant plus que tourner autour de la droite OB, il faut, pour que l'équilibre subsiste, que la force T soit dans un même plan avec cette droite (19). En fixant le point B et un autre point A pris sur la direction de S, on verrait de même que la force T doit se trouver dans un même plan avec la droite AB ; cette force se trouvera donc dans le plan OBA qui contient la force S ; mais, par hypothèse, les deux forces S et T ne sont pas dans un même plan, et, par suite, ces deux forces n'admettent pas de résultante unique.

Ainsi, *pour qu'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide invariable admette une résultante unique, il faut et il suffit que les deux résultantes auxquelles on peut réduire le système soient dans un même plan, et qu'elles ne forment pas un couple.*

Remarque. — Le point d'application B de la force —R étant pris quelconque sur la direction de cette force, il s'ensuit que, pour l'équilibre, la force —R doit être située dans le plan des deux autres.

Donc, *trois forces appliquées à un corps solide libre et non situées dans un même plan, ne peuvent se faire équilibre.*

§ 2. — ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES

118. Équilibre d'un corps solide libre. — Le corps étant libre, on réduit toutes les forces agissant sur lui à deux résultantes S et T, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que ces deux résultantes soient égales et directement opposées.

Ainsi, *pour qu'un corps solide libre dans l'espace, et soumis à l'action d'un système quelconque de forces, soit en équilibre, il faut et il suffit que les deux résultantes auxquelles on ramène le système soient égales et directement opposées.* Telle est la condition géométrique de l'équilibre.

Pour déterminer les conditions analytiques, remarquons que si les deux composantes S et T sont égales et directement opposées, il est évident que : 1° la somme algébrique de leurs projections sur un axe quelconque est nulle, 2° la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est également nulle.

Cela posé, rapportons le système des forces proposées à trois axes rectangulaires, et si l'équilibre existe, on aura pour chacun des axes :

$$Sx + Tx = 0 \quad (1)$$
$$Sy + Ty = 0 \quad (2)$$
$$Sz + Tz = 0 \quad (3)$$
$$MxS + MxT = 0 \quad (4)$$
$$MyS + MyT = 0 \quad (5)$$
$$MzS + MzT = 0 \quad (6)$$

Mais en vertu de ce qui a été dit (115, remarque II), ces six équations reviennent aux équations suivantes :

$$\Sigma Fx = 0$$
$$\Sigma Fy = 0$$
$$\Sigma Fz = 0$$
$$\Sigma MxF = 0$$
$$\Sigma MyF = 0$$
$$\Sigma MzF = 0$$

Ces six équations sont nécessaires et suffisantes. En effet, les relations (1) (2) (3) montrent que les deux résultantes sont égales

et de sens contraire, mais elles ne prouvent pas que les deux forces soient directement opposées, car ces trois relations seraient également satisfaites dans le cas où les deux forces formeraient un couple. D'un autre côté, les deux composantes S et T étant égales et de sens contraire, les relations (4) (5) et (6) ne peuvent être satisfaites qu'à la condition que ces deux forces soient appliquées au même point.

Donc, ces six équations sont nécessaires et suffisantes pour prouver que les deux résultantes S et T sont égales et directement opposées, auquel cas elles se font équilibre.

119. Cas particuliers. — Dans certains cas particuliers, que nous allons examiner, ces six équations peuvent se réduire à un nombre moindre.

1° *Les forces sont toutes dans un même plan.* Si, dans ce cas, on mène les deux axes x et y dans le plan des forces, les conditions d'équilibre se réduisent à trois :

$$\Sigma \mathrm{F}x = 0$$
$$\Sigma \mathrm{F}y = 0$$
$$\Sigma \mathrm{F}z = 0$$

car les trois autres sont satisfaites d'elles-mêmes.

2° *Les forces sont parallèles et situées dans un même plan.* Prenant encore le plan des forces pour plan des x et des y, et dirigeant l'axe y parallèlement à la direction des forces, on voit que les six équations d'équilibre se réduisent à deux,

$$\Sigma \mathrm{F}y = 0$$
$$\Sigma \mathrm{M}y\mathrm{F} = 0$$

car les quatre autres sont satisfaites d'elles-mêmes.

3° *Les forces sont parallèles, mais situées dans des plans différents.* Prenant pour plan des x et des y un plan perpendiculaire à la direction commune des forces, les conditions d'équilibre se réduisent, dans ce cas, aux trois équations suivantes :

$$\Sigma \mathrm{F}z = 0$$
$$\Sigma \mathrm{M}x\mathrm{F} = 0$$
$$\Sigma \mathrm{M}y\mathrm{F} = 0,$$

car les trois autres sont satisfaites d'elles-mêmes.

120. Équilibre d'un corps solide mobile autour d'un point fixe. — Considérons un corps solide mobile autour d'un de ses points O, rendu fixe. Nous savons que toutes les forces qui le sollicitent peuvent se réduire à deux, S et T, dont on fera passer l'une S, par le point fixe ; cette force sera détruite par la résistance de ce point, et le corps restera soumis à la seule action de l'autre force T. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut nécessairement que cette seconde force soit aussi détruite, ce qui exige qu'elle passe aussi par le point fixe. Les deux forces S et T, appliquées au même point fixe O, se composeront en une résultante R appliquée au même point.

Donc, *pour qu'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe soit en équilibre, il faut que les forces qui le sollicitent se réduisent à une résultante unique passant par le point fixe.*

Si nous faisons passer par le point fixe trois axes rectangulaires, les relations analytiques de l'équilibre se réduiront à trois :

$$\Sigma M_x F = 0$$
$$\Sigma M_y F = 0$$
$$\Sigma M_z F = 0$$

car elles expriment complétement que les deux résultantes S et T passent par le même point.

121. Pression sur le point fixe. — Le corps peut être considéré comme libre à la condition d'appliquer au point fixe une force —R égale et directement opposée à la résultante des forces S et T, car, dans ces conditions, l'équilibre ne cessera pas d'exister. La force —R mesurera donc la réaction du point fixe, et comme elle est toujours égale et contraire à l'action, on en conclut que la pression supportée par le point fixe est égale à la résultante de toutes les forces du système. Cette résultante n'est autre chose que la force que nous avons appelée résultante de translation, dans le cas où le couple résultant est nul. On peut donc l'obtenir en transportant au point fixe, et parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces du système, et en les composant par la règle du polygone des forces.

122. Cas où le corps est sollicité par son poids seul. — Le poids du corps pouvant être considéré comme une force verticale appliquée à son centre de gravité, *il faut, pour qu'il y ait équi-*

libre, que la verticale passant par le point fixe passe aussi par le centre de gravité du corps.

123. Équilibre d'un corps mobile autour de deux points fixes. — Considérons un corps M (*fig.* 95) ayant deux points fixes O et O′; tous les points de la droite OO′ sont nécessairement fixes, et le corps est assujetti à tourner autour de cet axe. Les deux résultantes S et T auxquelles se réduisent toutes les forces qui sollicitent le corps, peuvent être choisies de manière que l'une d'elles, S, par exemple, passe par l'un des points fixes O; cette force se trouve détruite par la résistance de ce point, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que l'autre résultante T soit aussi détruite, ce qui arrivera lorsque cette force se trouvera dans un même plan avec l'axe fixe.

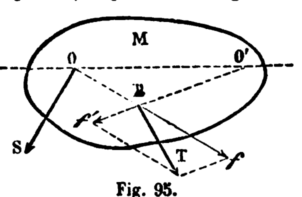


Fig. 95.

Donc, *pour qu'un corps solide, possédant deux points fixes, soit en équilibre, il suffit que l'une des deux résultantes auxquelles on réduit le système des forces qui le sollicitent, passe par l'axe fixe, et que l'autre résultante soit dans un même plan avec cet axe.*

Si l'on prend l'axe fixe OO′ pour l'axe des x, la seule relation analytique de l'équilibre

$$\Sigma M x F = 0$$

exprime complétement que les deux résultantes S et T sont situées dans des plans passant par l'axe fixe, auquel cas l'équilibre existe.

124. Pressions sur les points fixes. — Pour déterminer la pression supportée par chacun des points fixes O et O′, on décompose la force T appliquée au point B en deux composantes f et f' dirigées suivant BO et BO′. La composante f' représente la pression supportée par le point O′, et la pression sur le point O sera égale à la résultante des forces S et f.

125. Cas où le corps est sollicité par son poids seul. — Toutes les actions de la pesanteur sur le corps se réduisent à une résultante unique appliquée en son centre de gravité; or, cette résultante ne pouvant pas être nulle, il faut, pour qu'il y ait équilibre, qu'elle soit détruite par la résistance de l'axe fixe.

Donc, *pour qu'un corps solide mobile autour d'un axe fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que son centre de gravité soit dans le plan vertical passant par l'axe.*

126. Différentes sortes d'équilibre. — Nous venons d'établir la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un corps pesant mobile autour d'un point fixe ou d'un axe fixe; dans l'un des cas, comme dans l'autre, il faut que la verticale, passant par le centre de gravité, rencontre le point fixe ou l'axe fixe. Or cette condition peut être remplie de trois manières différentes, c'est-à-dire que le centre de gravité peut être soit au-dessus, soit au-dessous du point ou de l'axe fixe, ou bien il peut se confondre avec lui.

De là, trois sortes d'équilibre : 1° *équilibre stable*, 2° *équilibre instable* et 3° *équilibre indifférent.*

127. Équilibre stable. — On dit que l'équilibre est *stable* lorsque le corps étant écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné à lui-même, tend à revenir à cette position d'équilibre par une suite d'oscillations.

Soit M (*fig.* 96) un corps solide mobile autour du point O, et G son centre de gravité, situé au-dessous du point fixe ; cette position du centre de gravité relativement au point O, correspond à l'équilibre stable. En effet, si nous déplaçons le corps de manière à lui faire occuper la position M′, son centre de gravité viendra en G′, et son poids P, force qui est toujours dirigée verticalement, pourra être décomposé en deux composantes, dont l'une, dirigée suivant OG′, sera détruite, et dont l'autre, perpendiculaire à cette droite, aura pour effet de faire tourner le corps autour du point O, jusqu'à ce qu'il soit revenu à sa position primitive.

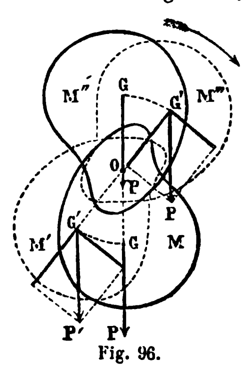


Fig. 96.

Ainsi, *pour que l'équilibre soit stable, il faut que le centre de gravité soit au-dessous du point fixe.*

128. Équilibre instable. — L'équilibre est dit *instable* lorsque le corps étant très-peu écarté de sa position d'équilibre, tend à s'en éloigner de plus en plus.

Cet équilibre a lieu lorsqu'on donne au corps M de la figure précédente la nouvelle position M″ dans laquelle le centre de gravité se trouve encore sur la verticale du point fixe, mais au-dessus de ce point. En effet, si nous dérangeons un peu le corps pour l'amener en M‴, par exemple, son poids P peut se décomposer en deux forces; l'une, passant par le point fixe, est détruite, et l'autre, perpendiculaire à la première, tend à faire continuer au corps la rotation commencée.

Remarque.—On voit, par les deux cas traités ci-dessus, que l'équilibre n'est stable que lorsque le centre de gravité du corps occupe la position la plus basse qu'il puisse prendre par rapport au point fixe. Cela était facile à prévoir, dès que nous savions que la pesanteur attire tous les corps vers le centre de la terre, et que son action sur un corps pouvait être considérée comme une force unique appliquée à son centre de gravité.

129. Équilibre indifférent. — L'équilibre est dit *indifférent* lorsque le corps est en équilibre dans toutes les positions qu'on lui fait prendre.

Lorsque le centre de gravité du corps coïncide avec le point fixe, on ne peut plus décomposer son poids en deux composantes, dont l'une tend à faire tourner le corps, et celui-ci reste en équilibre dans toutes les positions.

Ainsi, *quand on fixe le centre de gravité d'un corps, celui-ci reste en équilibre indifférent.*

Tout ce que nous venons de dire pour un corps possédant un point fixe, s'applique également, sans modification, à un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe.

130. Considérations sur l'équilibre instable et sur l'équilibre indifférent. — L'équilibre instable est, pour un corps, une position purement hypothétique, irréalisable en pratique. En effet, nous savons qu'un déplacement du corps, quelque petit qu'il soit, détruit cet équilibre; or plusieurs causes extérieures, les vibrations, les mouvements de l'air ambiant, la déformation des pièces qui fléchissent, etc., devant amener inévitablement un dérangement dans la position de ce corps, il s'ensuit que celui-ci ne peut pas conserver sa position primitive correspondant à l'équilibre instable.

L'équilibre indifférent est, au contraire, réalisé dans un grand

nombre de cas; il est surtout indispensable pour annuler l'action de la pesanteur sur les organes des machines animées d'un mouvement de rotation; pour cela, on fait en sorte que leur centre de gravité soit situé sur l'axe de rotation. Dans les machines à vapeur, le centre de gravité du volant se trouve sur l'axe de l'arbre moteur; s'il en était autrement, la pesanteur tendrait tantôt à accélérer, tantôt à ralentir le mouvement, ce qui amènerait des irrégularités nuisibles à la marche de la machine et en détériorerait les organes. Les roues d'engrenage, les poulies, les balanciers, doivent également satisfaire à cette condition; pour les pièces qui, par leur forme, ne s'y prêtent pas facilement, on emploie des contre-poids. Ainsi, pour les aiguilles des horloges de dimensions assez considérables, on dispose sur le prolongement de chacune d'elles et au delà du centre du cadran, une petite tige d'une faible longueur, mais assez pesante pour amener le centre de gravité du système sur l'axe de rotation; quelquefois, pour éviter ce prolongement, on dispose sur cet axe, et en arrière du cadran, une petite masse additionnelle destinée à remplir le même but.

131. Équilibre d'un corps assujetti à s'appuyer sur un plan fixe. — Proposons-nous de déterminer les conditions d'équilibre d'un corps solide astreint à s'appuyer constamment sur un plan fixe, en supposant ce plan parfaitement poli et indéformable, c'est-à-dire ne pouvant exercer que des réactions normales à sa surface.

Le corps considéré peut s'appuyer sur le plan, soit par un point, soit par deux points, soit par trois points, soit enfin par un plus grand nombre de points. De là différents cas à examiner suivant le nombre des points d'appui.

132. Corps s'appuyant par un seul point. — Soit C (*fig.* 97) un corps soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces F, F′, F″... et s'appuyant par le point O sur le plan MN. Ce plan exerce au point O une certaine réaction r égale et contraire à la pression qu'il éprouve de la part du corps. Si on suppose que cette force, représentant la réaction du plan, soit appliquée au point O du corps, on pourra supprimer le plan et considérer le corps comme entièrement libre. Il suffira, pour l'équilibre, que l'ensemble des forces F, F′, F″... r se réduisent à deux forces

égales et directement opposées; or, pour que cette condition soit remplie, il suffit que les forces F, F′, F″... admettent une résultante unique, normale au plan et tendant à appuyer le corps sur le plan.

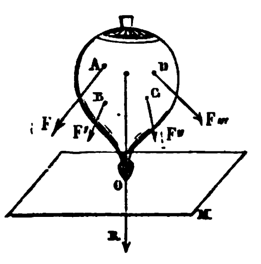


Fig. 97.

Donc, *pour qu'un corps s'appuyant sur un plan inébranlable, par un seul point, soit en équilibre, il faut et il suffit que toutes les forces qui le sollicitent aient une résultante unique, normale au plan et passant par le point d'appui.*

133. Cas où le corps est sollicité par son poids seul. — Ce que nous venons de dire s'appliquant à un système quelconque de forces, s'applique évidemment au cas où le corps n'est soumis qu'à la seule action de la pesanteur. Il faudra donc, pour l'équilibre, *que la verticale du centre de gravité passe par le point d'appui.*

La réaction du plan devant être directement opposée à la pression que le corps exerce sur lui, on voit qu'un corps soumis à l'action de la pesanteur ne peut être en équilibre que sur un plan horizontal.

134. Pression sur le point d'appui. — Il est évident que, dans le cas qui nous occupe, le point d'appui supporte tout le poids du corps et par suite *la pression supportée par le plan au point O est égale à ce poids.*

Remarque. — Si le point d'appui ne change pas lorsqu'on dérange le corps, l'équilibre sera forcément instable puisque le centre de gravité se trouve au-dessus du point d'appui. Pour le rendre stable, il faut abaisser le centre de gravité du système au-dessous du plan.

Si, au contraire, le point par lequel le corps s'appuie sur le plan horizontal change lorsqu'on dérange le corps, les trois sortes d'équilibre peuvent se présenter. En effet, la position d'équilibre étant déterminée, si le centre de gravité est plus rapproché du plan que dans toute autre position du corps, l'équilibre sera stable car le centre de gravité tendant toujours à descendre, ramènera le corps à sa position première.

Si le centre de gravité est plus éloigné du plan que dans toute autre situation du corps, l'équilibre est instable.

Enfin, si dans toutes les positions que peut prendre le corps, le centre de gravité reste à la même distance du plan, l'équilibre est indifférent.

Le premier cas se présente lorsque décrivant une sphère avec un rayon égal à la distance du centre de gravité au point d'appui, dans la position d'équilibre, cette sphère est entièrement comprise à l'intérieur du corps. Nous nous rappelons tous, étant enfants, d'avoir joué avec de petits pantins qui se tenaient toujours debout malgré nos efforts et nos petites colères pour les coucher sur le plan horizontal. Ce phénomène, incompréhensible alors pour nous, est une application bien simple de ce qui précède.

L'équilibre est instable lorsque la sphère dont nous venons de parler enveloppe le corps.

L'équilibre est indifférent lorsque la surface de la sphère coïncide avec celle du corps.

135. Corps s'appuyant par deux points. — Les conditions d'équilibre d'un corps reposant sur un plan horizontal, qu'il soit soumis à un système quelconque de forces, ou à l'action de la pesanteur, étant exactement les mêmes, comme on l'a vu dans le cas précédent, nous ne nous occuperons, dans ce qui suit, que des corps pesants.

Soit M (*fig.* 98) un corps pesant s'appuyant sur un plan horizontal par les deux points A et A'. Le corps exerce aux deux points de contact des pressions dirigées de haut en bas, et le plan réagit avec des forces N et N' égales et directement opposées à ces pressions ; pour l'équilibre, il faut que l'ensemble des trois forces représentant le poids P du corps et les deux réactions N et N' du plan se réduisent à deux forces égales et directement opposées. Or les deux réactions N et N', étant parallèles et de même sens, ont une résultante N+N' égale à leur somme et appliquée en un point de la ligne AA'.

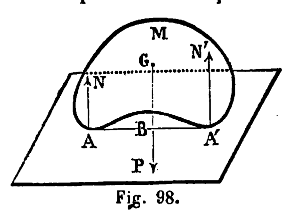


Fig. 98.

Donc, *pour que le corps soit en équilibre*, *il faut et il suffit que la verticale passant par son centre de gravité rencontre la droite AA' et tombe entre les deux points d'appui.*

136. Pressions sur les points d'appui. — Pour déterminer

les pressions supportées par les points A et A′, il suffit de décomposer le poids P du corps en deux forces parallèles et de même sens appliquées en ces deux points. Soit B le point où la verticale passant par le centre de gravité du corps rencontre la droite AA′; les deux composantes cherchées seront données par les relations :

$$\frac{N}{A'B}=\frac{N'}{AB}=\frac{P}{AA'}$$

d'où l'on tire

$$N=P\times\frac{A'B}{AA'}$$

et

$$N'=P\times\frac{BA}{AA'}$$

137. Corps pesants s'appuyant par trois points non en ligne droite. — Soit N, N′, N″ les trois réactions exercées par le plan aux points A,B,C (*fig.* 99), par lesquels le corps s'appuie sur le plan horizontal. Ces trois forces étant évidemment normales au plan puisqu'il est supposé parfaitement poli et indéformable, sont parallèles et de même sens; elles ont une résultante unique, égale à leur somme N+N′+N″, appliquée en un certain point situé à l'intérieur du triangle ABC; cette résultante doit faire équilibre au poids P du corps, appliqué en son centre de gravité.

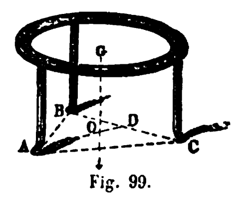


Fig. 99.

Donc, *pour qu'un corps pesant s'appuyant par trois points sur un plan horizontal, soit en équilibre, il faut et il suffit que la verticale passant par son centre de gravité rencontre le plan à l'intérieur du triangle formé par les trois points d'appui.*

138. Pressions sur les points d'appui. — Pour déterminer les pressions supportées par les points d'appui, il faut décomposer le poids P du corps en trois composantes parallèles appliquées aux points A,B,C (*fig.*100). Nous savons que ces composantes sont données

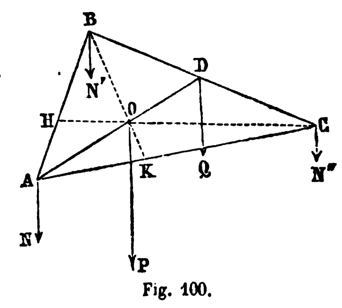


Fig. 100.

par les relations:

$$N + N' + N'' = P$$

$$N = P \times \frac{OD}{AD}; \quad N' = Q \times \frac{CD}{BC} \quad \text{et } N'' = Q \times \frac{BD}{BC}$$

ou bien encore

$$N = P \times \frac{OD}{AD}; \quad N' = P \times \frac{OK}{BK} \quad \text{et } N'' = P \times \frac{OH}{CH} \quad (1)$$

Ces différentes pressions jouissent d'une propriété remarquable. Les triangles BOC et ABC ayant même base, sont entre eux comme leur hauteur, ou comme les longueurs OD et AD; on a donc:

$$\frac{BOC}{ABC} = \frac{OD}{AD}$$

On trouvera aussi par la même raison

$$\frac{AOC}{ABC} = \frac{OK}{BK} \quad \text{et} \quad \frac{AOB}{ABC} = \frac{OH}{CH}$$

Par suite, les relations (1) peuvent s'écrire:

$$\frac{N}{P} = \frac{BOC}{ABC}; \quad \frac{N'}{P} = \frac{AOC}{ABC}; \quad \frac{N''}{P} = \frac{AOB}{ABC}$$

d'où .

$$\frac{N}{BOC} = \frac{N'}{AOC} = \frac{N''}{AOB} = \frac{P}{ABC}$$

Donc, *si l'on représente le poids P du corps par l'aire du triangle ABC formé par les points d'appui, les pressions supportées par ces points seront respectivement représentées par les aires des triangles partiels ayant pour bases les côtés opposés et pour sommet commun le point où la verticale passant par le centre de gravité du corps, perce le plan.*

139. Corps s'appuyant par un nombre quelconque de points. — Considérons un corps pesant reposant sur un plan horizontal par des points A,B,C,D... ce corps détermine en chacun des points de contact des réactions N, N', N''... de même sens, normales au plan et si nous substituons à ces réactions des forces verticales F, F', F''... respectivement égales à N, N', N''... le corps pourra être considéré comme entièrement libre. Mais ces forces

normales au plan se réduisent à une résultante R dont le point d'application doit forcément se trouver à l'intérieur du polygone convexe formé en joignant les différents points A, B, C, D. Il faut donc, pour qu'il y ait équilibre, *que la verticale du centre de gravité tombe à l'intérieur du polygone d'appui appelé base de sustentation*.

La tour de Pise, célèbre par les expériences qu'y fit Galilée, présente une remarquable application de ce principe. Dans cette tour de 59 mètres de hauteur, la verticale du centre de gravité est loin de tomber en dehors de la base, quoique son axe présente une inclinaison de $0^m,085$ par mètre.

Les mouvements des êtres animés sont de même soumis à cette loi. L'homme déplace instinctivement et sans s'en douter son centre de gravité, de manière que la verticale de ce point rencontre toujours le sol à l'intérieur du polygone convexe formé avec les contours extérieurs de ses pieds et qui constitue sa base de sustentation.

Lorsqu'un homme transporte un fardeau, il s'incline pour que la verticale du point d'application de la résultante du poids de son corps et de celui du fardeau, c'est-à-dire du centre de gravité du système, perce le sol entre ses pieds. S'il porte le fardeau sur son dos, il se penche en avant et d'autant plus que le fardeau est plus volumineux ; l'homme, chargé d'un seau ou portant un paquet à la main, écarte le bras libre et se penche du côté opposé à la charge. Pendant la marche, le corps de l'homme s'incline tantôt à droite, tantôt à gauche, suivant que le pied droit ou le pied gauche forme la base d'appui ; s'il monte une pente, il s'incline en avant, et si, au contraire, il la descend, il se penche en arrière.

Les danseurs de corde se servent, pour maintenir leur équilibre, d'un balancier qui ramène constamment la verticale de leur centre de gravité à l'intérieur du polygone d'appui.

140. Pressions sur les points d'appui. — Lorsqu'un corps repose sur un plan horizontal par un nombre de points supérieur à trois, ou seulement trois en ligne droite, le problème de la recherche des pressions supportées par les points d'appui est complétement indéterminé si l'on connaît simplement la position occupée par le centre de gravité.

En effet, si les trois points sont en ligne droite, on comprend que l'on puisse toujours décomposer, d'une infinité de manières, le

poids P du corps appliqué à son centre de gravité en trois composantes, parallèles et de même sens, appliquées aux trois points d'appui. Il en est de même si le corps s'appuie par un nombre quelconque de points, car la décomposition d'une force en plus de trois autres composantes parallèles est complétement indéterminée, comme nous l'avons vu (61).

En réalité, il est bien évident que chacun des points d'appui supporte une portion déterminée du poids du corps, et que la somme des pressions est égale à ce poids ; mais, pour déterminer ces pressions, il faut avoir égard à la constitution moléculaire des corps en contact.

Si nous considérons une table reposant par quatre pieds sur un plancher, celui-ci étant plus ou moins rigide, ainsi que la table, il en résulte une plus ou moins grande compression aux différents points d'appui et par suite des pressions différentes en chacun de ces points, pressions qui ne sont pas indéterminées et qu'on peut parfaitement calculer quand on connaît la loi physique suivant laquelle s'opère la déformation des parties en contact. La résolution de cette question nous entraînerait trop loin et sortirait du cadre que nous nous sommes tracés pour cet ouvrage.

141. Stabilité des corps pesants s'appuyant sur un plan horizontal. — Nous venons de prouver que, si un corps pesant est en équilibre sur un plan horizontal, la verticale passant par le centre de gravité tombe à l'intérieur de la base de sustentation. Mais, suivant la position du centre de gravité par rapport à cette base, le degré de stabilité de ce corps sera plus ou moins grand, c'est-à-dire que l'effort à exercer pour renverser le corps sera plus ou moins considérable. En effet, considérons un parallélipipède rectangle posé par une de ses faces sur un plan horizontal et supposons qu'on veuille le renverser en le faisant tourner autour de son arête AB (*fig.* 101) ; soit O le point où la verticale du centre de gravité perce le plan et OD la distance de ce point à l'arête AB. Le poids P du corps tend à appliquer celui-ci sur le plan horizontal et par suite s'oppose au mouve-

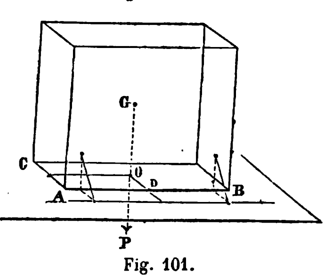


Fig. 101.

ment. Le moment de P par rapport à l'axe de rotation est

$$P \times OD$$

et pour renverser le corps, il faudrait lui appliquer une force dont le moment fût supérieur à celui de son poids. Ce moment varie avec l'arête autour de laquelle on veut opérer le renversement; pris avec sa valeur minimum, c'est-à-dire par rapport à l'arête la plus rapprochée du point O, on le nomme *moment de stabilité.*

Le moment de stabilité d'un corps varie avec son poids, mais aussi avec la distance OD et par suite avec la position du centre de gravité par rapport au contour de la base de sustentation. D'un autre côté, lorsque le corps tourne autour d'une arête, le poids P tend à le ramener à sa position première tant que le centre de gravité n'a pas dépassé le plan vertical passant par l'axe de rotation; à partir de cette position, la verticale du centre de gravité ne tombant plus à l'intérieur du polygone d'appui, l'équilibre ne peut plus subsister. L'angle dont un corps peut tourner autour d'une de ses arêtes, sans chavirer, mesure donc son degré de stabilité et on voit que cet angle sera d'autant plus grand que le centre de gravité sera plus rapproché de la base de sustentation.

Ainsi donc, la stabilité des corps pesants se détermine en considérant: 1° *la plus courte distance de la verticale du centre de gravité au contour de la base de sustentation*, 2° *la hauteur du centre de gravité au-dessus de cette base.*

Dans les constructions, afin de donner une grande stabilité aux murs, et principalement aux murs destinés à soutenir des terres, on dispose de distance en distance, et en saillie, des massifs en maçonnerie appelés *contre-forts*, ayant pour but d'augmenter la distance de la verticale du centre de gravité à l'arête de renversement.

Les étais ou pièces de bois que l'on dispose obliquement contre un mur qui menace de tomber ou qui ne présente pas toute la sécurité désirable, remplissent identiquement le même but.

On donne aux cheminées en briques des usines, la forme d'un tronc de cône dont la grande base forme la base d'appui, afin d'abaisser, autant que possible, le centre de gravité et augmenter, par là, leur moment de stabilité.

142. Application aux chargements des voitures. — Une

voiture en mouvement sur une route ordinaire restera en équilibre, c'est-à-dire ne versera point, tant que la verticale du centre de gravité tombera à l'intérieur du polygone formé par les points de contact des roues avec le sol. Mais la stabilité sera d'autant plus grande que le centre de gravité sera plus bas placé ; aussi doit-on, lorsqu'on charge une voiture, disposer au fond les objets les plus lourds. Une voiture chargée de paille ou de foin sera plus exposée à verser qu'une voiture transportant des barres de fer ou des pièces de bois. Les inégalités de la route et son inclinaison transversale modifient d'une manière notable le degré de stabilité des voitures. En effet, considérons une voiture (*fig.* 102) en mouvement sur une route inclinée de gauche à droite ; les irrégularités du sol, les ornières, feront plus ou moins pencher latéralement la voiture de manière que le centre de gravité parcourra un arc de cercle dont le centre sera situé au point de contact A de la roue la plus basse avec le sol. Si le centre de gravité ne dépasse pas le point C de l'arc, la voiture conservera sa position d'équilibre ; mais si une cause quelconque vient à soulever la roue de gauche, cause qui forcera le centre de gravité à dépasser le point le plus élevé B de l'arc, la pesanteur agissant toujours sur lui pour le faire descendre, fera inévitablement verser la voiture.



Fig. 102.

CHAPITRE IV

§ 1. — ÉQUILIBRE DES LIQUIDES

143. Hypothèses sur la constitution des liquides. — Les liquides se distinguent des solides en ce que leurs molécules cèdent à de très-faibles efforts tendant à les séparer ou à les faire glisser les unes sur les autres.

On admet qu'il n'existe aucun frottement, soit entre les portions d'un même liquide, soit entre celles-ci et les corps qui les environnent, surtout lorsque ce liquide est animé d'un mouvement très-lent relativement aux corps avec lesquels il se trouve en contact. Cette hypothèse de l'absence absolue du frottement des molécules liquides lorsqu'elles se déplacent, constitue *la fluidité parfaite*. Suivant la nature des liquides, nous nous rapprocherons plus ou moins de la réalité ; cette fluidité est plus parfaite dans l'eau, l'alcool, l'éther, que dans les liquides visqueux, tels que les huiles, les sirops ; mais comme nous les considérerons toujours en équilibre, nous pourrons supposer, sans erreur sensible, qu'ils jouissent de cette propriété.

On admet en outre que les liquides sont complétement incompressibles ; cette dernière hypothèse, admise depuis fort longtemps, ne concorde pas avec les résultats de l'expérience. Tous les liquides sont compressibles, mais cette compressibilité ne devient appréciable que lorsqu'ils sont soumis à des efforts très-considérables, et la diminution de volume ne peut s'observer qu'au moyen d'appareils très-précis.

144. Principe de Pascal. — De la nullité du frottement des molécules liquides entre elles, résulte le principe suivant énoncé par Pascal :

1° *Si l'on considère un liquide en équilibre dans un vase, un élé-*

ment quelconque de la paroi, ou un élément pris à l'intérieur de la masse liquide, supporte une pression normale à sa surface.

2° *Un élément quelconque pris dans l'intérieur de la masse liquide est soumis de la part des molécules environnantes à des pressions égales dans tous les sens.* S'il en était autrement, l'élément considéré serait entraîné dans le sens de la plus forte pression et il n'y aurait pas équilibre.

D'une manière plus générale, on dit que *les liquides transmettent les pressions en tous sens, et ces pressions*, toutes choses égales d'ailleurs, *sont proportionnelles aux surfaces*. Ainsi P,P',P'' étant les pressions supportées par des surfaces S,S',S'' d'un même vase contenant un même liquide, on doit avoir la relation :

$$\frac{P}{S}=\frac{P'}{S'}=\frac{P''}{S''}$$

c'est-à-dire que si la surface S est 10, 100, 1000 fois plus grande que la surface S', la pression P sera 10, 100, 1000 fois plus grande que la pression P' et réciproquement. Cette propriété de la transmission des pressions en tous sens, est utilisée dans un appareil très-puissant et d'un grand usage, *la presse hydraulique.*

145. Presse hydraulique. — La presse hydraulique, imaginée

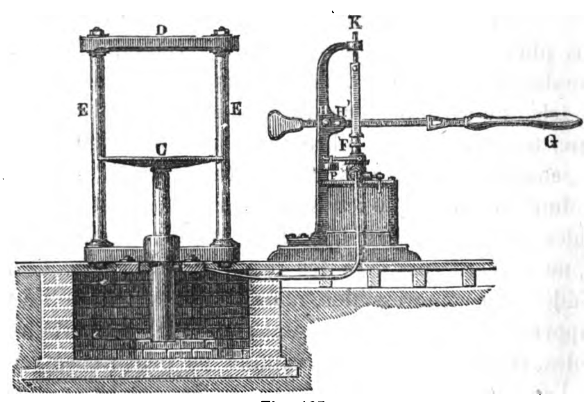


Fig. 103.

par Pascal, est représentée en projection verticale par la figure 103 et en coupe longitudinale par la figure 104.

Elle se compose, 1° d'une pompe à piston plongeur de faible

section, manœuvrée au moyen d'un levier G mobile autour du point H'; 2° d'un cylindre A à parois très-épaisses, dans lequel se meut un piston B terminé par un plateau C, et 3° d'un tuyau L destiné à conduire l'eau de la pompe dans le cylindre A; pour cela, deux soupapes placées, l'une M dans le tuyau d'aspiration et l'autre N dans le tuyau de refoulement L, servent à établir et à

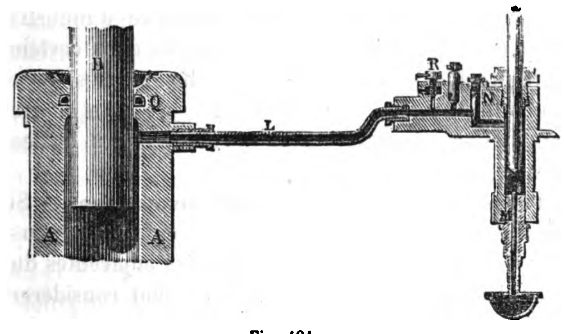


Fig. 104.

intercepter alternativement l'arrivée de l'eau sous le grand piston B. Une soupape de sûreté F, chargée d'un poids convenable P par l'intermédiaire d'un levier, empêche la rupture des cylindres et des conduits lorsque la pression devient trop forte.

En manœuvrant le levier G, la pompe aspire l'eau d'un réservoir peu profond pour la refouler ensuite sous le piston B; celui-ci s'élève d'une faible quantité à chaque course descendante du piston de la pompe et presse très-fortement des corps placés entre le plateau mobile C et le plateau fixe D. Quatre colonnes en fer relient solidement le plateau fixe au corps du cylindre A.

Ordinairement, un manomètre est placé sur le tuyau de communication L pour indiquer la pression à laquelle l'eau est soumise.

Cet appareil permet d'exercer de très-fortes pressions comparativement à l'effort moteur; en effet, les pressions étant proportionnelles aux surfaces, si le grand piston B a une section 150 fois plus grande que celle du piston plongeur, un effort de 5 kilogrammes appliqué à ce dernier, transmettra une pression de 5×150 ou 750 kilogrammes au piston B.

9

Pour empêcher l'eau de sortir autour du grand piston, Bramah a disposé, dans une gorge Q située à la partie supérieure du cylindre A et en dedans, un anneau en cuir embouti ouvert du côté du fond du cylindre. L'eau, fortement comprimée, presse l'un des bords de l'anneau contre le cylindre et l'autre contre le piston, de manière à rendre toute fuite impossible.

La presse hydraulique permet d'obtenir des pressions énormes; aussi est-elle employée dans un grand nombre d'industries. Elle sert soit pour extraire les liquides contenus dans certains végétaux, soit pour enlever aux graines oléagineuses les matières grasses qu'elles renferment; enfin, elle sert aussi à exercer de très-grands efforts de traction et à soulever des fardeaux d'un poids très-considérable.

146. Pression moyenne par unité de surface. — Si par un point pris à l'intérieur d'un liquide en équilibre, nous faisons passer une portion de plan, les deux parties adjacentes du liquide exerceront des actions mutuelles que l'on peut considérer comme des pressions égales supportées par les deux faces du plan. L'une de ces pressions P, exprimée en kilogrammes, divisée par l'aire Ω qui la supporte ou

$$\frac{P}{\Omega}$$

donne *la pression moyenne par unité de surface*, et la limite de cette pression, à mesure que l'on fait décroître indéfiniment l'étendue sur laquelle elle s'exerce, en y comprenant toujours le point considéré et en conservant au plan sa direction, est la *pression par unité de surface au point considéré.*

147. Équilibre des liquides soumis à la seule action de la pesanteur. — Nous avons, jusqu'ici, considéré les liquides sans nous occuper de leur poids; nous allons maintenant les considérer comme pesants, c'est-à-dire comme ils sont réellement. Dans ce cas, lorsqu'un liquide est en équilibre, il satisfait aux trois conditions suivantes :

1° *Tous les points d'une même couche horizontale supportent la même pression;*

2° *Tous les points d'une même couche horizontale ont la même densité;*

3° *La surface du liquide est horizontale.*

Pour démontrer la première condition, prenons deux points quelconques m et m', (fig. 105), sur un même plan horizontal AC, que nous considérerons comme les centres de deux cercles infiniment petits dont les plans sont perpendiculaires à la droite AC. Supposons que ces deux cercles soient les deux bases d'un cylindre droit à génératrices horizontales, constituant un solide cylindrique environné de toutes parts par le liquide. Si celui-ci est en équilibre, cette substitution du cylindre solide au cylindre liquide ne modifiera en rien l'équilibre. Or les forces qui sollicitent ce solide sont : 1° son poids P agissant à son centre de gravité ; 2° les pressions horizontales qui s'exercent normalement aux bases et 3° les pressions exercées perpendiculairement à sa surface convexe. Si P et P′ représentent les pressions par mètre carré sur chacune des bases de surface ω, les pressions horizontales qu'elles supportent seront exprimées par $P\omega$ et $-P'\omega$. Si nous projetons ces forces sur un axe quelconque, la somme de leurs projections doit être égale à 0 ; projetons, pour simplifier, sur l'axe du cylindre AC ; on aura :

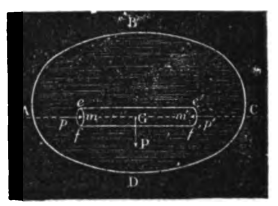


Fig. 105.

$$P\omega - P'\omega = 0$$

car le poids du cylindre et les pressions sur sa surface convexe, étant perpendiculaires à l'axe CA, ont une projection nulle.

Il résulte de cette égalité que $P = -P'$, c'est-à-dire que la pression est la même en tous les points d'une même couche horizontale.

2° Soit AC et A′C′ (fig. 106), deux plans horizontaux très-voisins situés à l'intérieur d'un liquide en équilibre, et isolons par la pensée deux cylindres verticaux de section droite ω, que nous supposerons comme solidifiés et ayant leurs bases inférieures et supérieures situées dans chacun de ces plans. Or les forces qui sollicitent le cylindre $efe'f'$ sont : 1° son poids p agissant à son centre de gravité ; 2° les

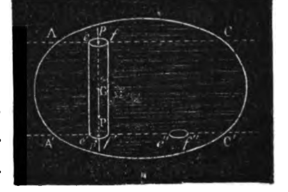


Fig. 106.

pressions qui s'exercent normalement aux bases et 3° les pressions horizontales qui s'exercent perpendiculairement à sa surface convexe. Si P et $-P_1$, représentent les pressions par unité de surface sur chacune des bases A et A', les pressions qu'elles supportent seront $P\omega$ et $-P_1\omega$. Projetant ces forces sur un axe quelconque, la somme de leurs projections devra être égale à 0; projetons, pour simplifier, sur l'axe même du cylindre; on aura pour l'équation des projections :

$$P\omega - P_1\omega + p = 0$$

car les pressions horizontales, étant perpendiculaires à l'axe, ont une projection nulle.

De cette égalité on tire :

$$p = (P_1 - P)\,\omega \qquad (1)$$

Les mêmes considérations s'appliqueraient au cylindre de base inférieure $e''f''$; P' et $-P'_1$ étant les pressions par unité de surface sur chacune des bases, on aurait de même, en désignant par p' le poids de ce cylindre :

$$p' = (P'_1 - P')\,\omega$$

Mais, d'après ce qui vient d'être énoncé, on doit avoir $P' = P$ et $P'_1 = P_1$; il en résulte $p = p'$, c'est-à-dire que les deux cylindres liquides ont même poids et, puisqu'ils ont même base et même hauteur, leurs volumes sont égaux et par suite ils ont la même densité.

Actuellement, si nous faisons décroître la distance très-petite qui sépare les deux plans horizontaux, les volumes des cylindres considérés iront toujours en diminuant sans cesser d'être égaux et à la limite, lorsque les deux plans coïncideront, la même conclusion subsistera toujours, c'est-à-dire que tous les points d'une même couche horizontale auront la même densité.

Remarque. Lorsqu'on compare les pressions par unité de surface en deux points situés sur une même verticale et à des profondeurs différentes dans un liquide en équilibre, on trouve que *la pression au point inférieur est égale à la pression au point supérieur augmentée du poids d'une colonne liquide ayant pour base l'unité de*

surface et pour hauteur la distance verticale comprise entre deux plans horizontaux menés par chacun de ces points.

En effet, reprenons la figure précédente et déterminons la pression sur le point inférieur. Pour cela, soit h la hauteur verticale séparant les deux points considérés et π la densité du liquide ; le poids du cylindre de base ω sera :

$$p = \pi\omega h$$

En remplaçant cette valeur de p dans l'équation (1) il vient :

$$\pi\omega h = (P_1 - P)\,\omega$$

Et en supprimant le facteur commun ω, on tire pour la valeur de P_1

$$P_1 = P + \pi h$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si $P = 0$, c'est-à-dire s'il ne s'exerce aucune pression sur le plan supérieur, il vient :

$$P_1 = \pi h \quad \text{d'où} \quad h = \frac{P_1}{\pi}$$

ce qui s'énonce en disant que *le quotient d'une pression P_1 rapportée à l'unité de surface, divisée par le poids de l'unité de volume, est la hauteur de ce liquide due à la pression P_1.*

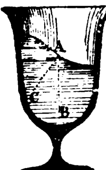
3° La troisième condition résulte de ce qui vient d'être exposé. En effet, reprenons l'égalité

$$P_1 = P + \pi h$$

Nous savons que la pression est la même en tous les points d'une même couche horizontale ; les pressions P et P_1 sont donc des quantités constantes ; il en résulte que la hauteur h est la même pour tous les points de cette couche, c'est-à-dire que la surface libre à tous ses points également distants de la tranche horizontale considérée ; la surface libre est donc située dans un plan parallèle à cette tranche et par suite elle est horizontale.

Pour le prouver directement, considérons un vase contenant un liquide dont la surface libre affecte la forme de la courbe MN ; (*fig.* 107) ; ce liquide ne peut pas être en équilibre. En effet, prenons une molécule quelconque A située à la surface libre ; le

poids p de cette molécule peut se décomposer en deux composantes, l'une AC, normale à la surface, qui sera détruite et l'autre suivant la tangente menée en A à la courbe MN ; cette seconde composante tend à entraîner la molécule et par suite il n'y a pas équilibre. Si la surface est horizontale, l'action de la pesanteur, normale au plan de niveau, ne peut plus se décomposer et ne peut avoir d'autre effet que d'entraîner la molécule vers le fond. Mais toutes les molécules qui l'avoisinent étant soumises à la même force et recevant des réactions égales et contraires des molécules qui se trouvent situées dans le plan immédiatement inférieur, l'équilibre aura lieu.


Fig. 107.

Donc, *la surface libre d'un liquide en équilibre est forcément horizontale.*

148. Pression sur le fond d'un vase. — *La pression exercée par un liquide sur le fond d'un vase est égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base la surface du fond et pour hauteur la distance verticale du fond à la surface de niveau.*

Considérons un vase quelconque ABCD (*fig.* 108) rempli d'un liquide dont la surface libre CD est située à une distance verticale h du fond BA. Nous savons déjà que la pression est la même en tous les points d'une même couche horizontale, car autrement, il n'y aurait pas équilibre : donc chaque unité de surface du plan BA, supporte une pression égale à πh, π étant la densité du liquide.

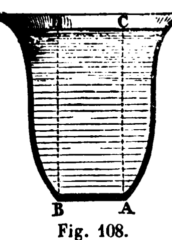


Fig. 108.

La pression totale exercée sur la surface Ω du fond du vase est égale à la somme de toutes les pressions élémentaires supportées par chacune de ses unités de surface et cette pression totale sera exprimée par

$$\pi \Omega h$$

c'est-à-dire que cette pression est égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base la surface du fond du vase et pour hauteur la distance verticale du fond à la surface de niveau.

Ce résultat suppose qu'il ne s'exerce aucune pression extérieure

sur le plan de niveau du liquide. La formule $\pi\Omega h$ nous montre que la pression est complétement indépendante de la forme du vase. Si l'on prend trois vases de même surface de fond, dont le premier soit cylindrique, le second très-évasé à la partie supérieure et le troisième au contraire étant rétréci, puis que l'on verse, dans chacun d'eux et à une même hauteur, un liquide de même densité, ces vases supporteront sur leur fond une pression égale, ce qui du reste est justifié par l'expérience. Ainsi, pour le vase élargi vers le haut, la pression sur le fond est moindre que le poids total du liquide qu'il contient ; pour le vase rétréci à sa partie supérieure, cette pression est plus grande que le poids total du liquide qu'il renferme, et enfin, dans le cas d'un vase cylindrique, la pression sur le fond est justement égale au poids du liquide qui y est contenu.

149. Pression sur les parois latérales. — *La pression supportée par une paroi latérale d'un vase ou par une surface plane inclinée est égale au poids d'une colonne liquide ayant pour base la surface pressée et pour hauteur la distance verticale du centre de gravité de cette paroi, ou de cette surface, au plan de niveau.*

Soit BC (*fig.* 109) la trace d'une surface plane rectangulaire perpendiculaire au plan de la figure, et supposons que la pression soit nulle au-dessus du niveau AB. Considérons un petit élément α de surface ω pris sur le plan BC; nous pouvons admettre que cet élément soit rendu horizontal, et dans ce cas la pression qu'il supportera sera :

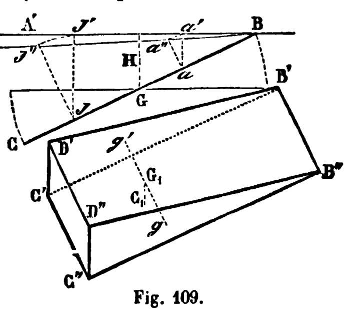


Fig. 109.

$$\pi \omega h$$

π étant la densité du liquide et h la hauteur verticale aa'. Mais la pression exercée sur cet élément étant normale à sa direction, la distance aa' sera représentée, lorsque l'élément sera revenu dans sa position première, par la perpendiculaire $aa'' = aa'$, élevée sur BC.

Si nous considérons un autre élément J, la hauteur du filet liquide

qu'il supporte sera représentée par la perpendiculaire $JJ'' = JJ'$, élevée en J sur BC.

Les triangles Baa' et BJJ' étant semblables comme ayant les angles égaux, donnent :

$$\frac{Ba'}{BJ'} = \frac{aa'}{JJ'} = \frac{aa''}{JJ''}$$

c'est-à-dire que les points a'' et J'' se trouveront sur un même plan passant par la droite projetée en B et par suite les extrémités des droites représentant les pressions supportées par chacun des éléments de la surface BC, seront toutes situées dans un même plan. Donc, la pression totale exercée sur la paroi rectangulaire, ou la somme de toutes les pressions élémentaires, est égale au poids d'un prisme triangulaire liquide ayant pour base la surface pressée. Mais ce prisme est équivalent à un prisme droit ayant même base que le précédent et pour hauteur la distance du centre de gravité au plan de niveau, car si nous rendons horizontale la surface BC, en la faisant tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité, la pression totale n'aura évidemment pas changé. Si nous désignons par Ω l'aire de cette surface et par H la distance du centre de gravité à la surface libre, la pression P sera exprimée par :

$$P = \pi \Omega H$$

c'est-à-dire par le poids du prisme dont nous venons de parler.

Si une pression quelconque, la pression atmosphérique par exemple, s'exerçait sur la surface de niveau, elle viendrait s'ajouter à la pression déterminée par le poids du liquide, et si P' désigne cette pression par unité de surface, on aura :

$$P = \Omega(P' + \pi H)$$

150. Centre de pression. — *On appelle centre de pression le point d'application de la résultante de toutes les pressions élémentaires supportées par une surface plane plongée dans un liquide ;* ou, en d'autres termes, les pressions élémentaires exercées sur chacun des éléments de la surface, pouvant être considérées comme des forces parallèles et de même sens, et la somme de toutes ces

forces représentant la pression totale, *le centre de pression est le point d'application de la résultante de toutes ces forces parallèles.*

151. Recherche du centre de pression qui est toujours plus bas que le centre de gravité. — Considérons le prisme triangulaire représentant la pression totale exercée sur la surface plane rectangulaire BC (*fig.* 109). Nous savons que le centre de gravité G_1 de ce prisme est situé sur la droite gg' qui joint les centres de gravité des deux faces triangulaires opposées et au milieu de cette droite; si de ce point G_1 on abaisse une perpendiculaire G_1C_1 sur la surface pressée B'C'C''B'', le point C_1, pied de la perpendiculaire G_1C_1 sera le centre de pression, car ce point C_1 est bien le point d'application de la pression totale exercée par le liquide. Ce point doit être plus bas que le centre de gravité, ce qui est évident sur la figure; on peut toutefois le démontrer d'une manière très-simple. En effet, faisons tourner la paroi BC autour d'un axe horizontal situé dans son plan et passant par son centre de gravité G, pour la rendre horizontale; la pression totale restera la même et les points G et C_1 se confondront. Or, pendant ce mouvement, la somme des pressions élémentaires supportées par la partie supérieure GB a augmenté, et, au contraire, la somme des pressions élémentaires supportées par la partie inférieure GC a diminué. Si nous ramenons la paroi à sa position première, l'inverse aura lieu; la partie inférieure recevra du liquide une pression plus grande que la partie supérieure, et par suite le centre de pression ou le point d'application des pressions élémentaires sera forcément plus bas que le centre de gravité.

Ainsi, lorsque la paroi BC est rectangulaire, l'un des côtés, projeté en B, étant situé dans le plan horizontal de niveau, le centre de pression se trouve sur la droite qui joint les milieux des arêtes C'C'' et B'B'' et aux $\frac{2}{3}$ de cette droite à partir de l'arête B'B''.

Si la paroi est un triangle isocèle dont le sommet est situé dans le plan de niveau, la base étant dirigée horizontalement, la pression supportée par cette paroi sera équivalente au poids d'une pyramide quadrangulaire liquide, et, dans ce cas, le centre de pression se trouve sur la droite qui joint le sommet de la paroi au milieu de sa base et au $\frac{1}{4}$ à partir de cette base.

Le même triangle occupant une position inverse de la précédente, c'est-à-dire ayant sa base dans le plan horizontal de la surface libre,

la pression supportée par cette paroi sera équivalente au poids d'une pyramide liquide ayant pour base la surface pressée, et, dans ce cas, le centre de pression se trouve au milieu de la droite qui joint le milieu de la base du triangle au sommet opposé.

Il résulte de là que, pour une même paroi plongée dans un liquide, mais occupant des positions différentes, le centre de pression varie suivant la place qu'elle occupe à l'intérieur du liquide.

§ 2. — ÉQUILIBRE DES CORPS PLONGÉS ET DES CORPS FLOTTANTS DANS LES LIQUIDES

152. Principe d'Archimède. — Le principe suivant, découvert par Archimède, peut s'énoncer ainsi : *Tout corps plongé dans un liquide est sollicité par une force verticale de bas en haut égale au poids du liquide qu'il déplace.* On l'énonce souvent d'une manière moins précise en disant que *tout corps plongé dans un liquide perd une partie de son poids égale au poids du liquide qu'il déplace.*

Le principe d'Archimède peut être établi par le raisonnement de la manière suivante : Considérons une masse liquide en équilibre dans un vase, et isolons, par la pensée, à l'intérieur de cette masse, une portion du liquide présentant une forme quelconque A (*fig.* 110) ; cette fraction du liquide sera toujours en équilibre, et si nous la supposons comme solidifiée, sans augmentation de densité, l'équilibre ne sera pas rompu. Or la force qui sollicite ce volume solidifié est son poids P, force verticale qui agit de haut en bas, et puisqu'il ne tombe pas, on est conduit à admettre l'existence d'une seconde force provenant des réactions normales exercées par le liquide sur sa surface extérieure, et pour l'équilibre, ces réactions doivent se réduire à une résultante unique égale et directement opposée au poids P du corps.

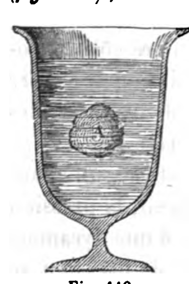


Fig. 110.

Substituons actuellement à la partie solidifiée du liquide, un corps de nature quelconque, mais ayant exactement la même

forme; les pressions exercées par le liquide étant indépendantes de la nature des surfaces, ces pressions se réduiront, comme précédemment, à la même résultante, et celle-ci aura la même intensité pour tous les corps plongés dans le liquide considéré et ayant la même enveloppe A, ou, en d'autres termes, tout corps plongé dans un liquide est sollicité par une force verticale de bas en haut, égale au poids du liquide qu'il déplace.

Le principe d'Archimède se vérifie expérimentalement au moyen de la balance hydrostatique.

153. Centre de poussée. — *On appelle centre de poussée, le point d'application de la résultante de toutes les pressions exercées par un liquide sur un corps qui y est plongé;* c'est le centre de gravité du volume liquide qu'il déplace.

Lorsque le corps est plein et homogène, le centre de poussée se confond avec le centre de gravité du corps.

Lorsque le corps n'est pas homogène, le centre de poussée et le centre de gravité ne coïncident plus; ils occupent alors des positions différentes.

Lorsque le corps est creux, le centre de poussée et le centre de gravité coïncident, à la condition que les volumes intérieur et extérieur aient le même centre de gravité.

La connaissance de ce qui précède permet d'expliquer les divers effets qui se produisent lorsqu'on plonge des corps de nature différente dans les liquides et qu'on les abandonne ensuite à eux-mêmes. Si V représente le volume d'un corps, π sa densité et π' celle du liquide, le produit $V \times \pi$ est le poids du corps ou la force qui tend à le faire descendre, et le produit $V \times \pi'$ est la force déterminée par la pression du liquide, et qui agit en sens contraire. La résultante R de ces deux forces est :

$$R = V(\pi - \pi')$$

et sous l'action de cette résultante, le corps se comportera de diverses manières, suivant les cas :

1° Si $\pi = \pi'$, on aura $R = 0$; le corps sera plongé et en équilibre dans toutes les positions qu'on lui fera prendre.

2° Si $\pi > \pi'$, le corps tombera au fond sous l'action de la résultante R; c'est ce qui a lieu pour la fonte, le fer, le bronze plongés dans l'eau, l'alcool.

3° Si $\pi < \pi'$, le corps s'élèvera, il sera flottant; sous l'influence de la résultante R, agissant cette fois de bas en haut, il sortira de la surface libre du liquide jusqu'à ce que le volume de liquide déplacé soit justement égal à son poids; c'est ce qui a lieu pour le bois, le liége plongés dans l'eau, la pierre, le fer plongés dans le mercure, et pour tous les corps dont la densité est inférieure à celle du liquide dans lequel ils sont placés.

Nous aurons donc deux cas à considérer pour l'équilibre des corps placés dans les liquides : 1° *équilibre des corps plongés;* 2° *équilibre des corps flottants.*

154. Équilibre des corps plongés. — Nous savons que lorsqu'un corps est plongé dans un liquide quelconque, en équilibre, ce corps est soumis à l'action de deux forces : 1° son poids P, force verticale appliquée à son centre de gravité, et qui agit de haut en bas; 2° la pression du liquide, force verticale appliquée au centre de gravité du volume liquide déplacé, et qui agit de bas en haut. Pour l'équilibre, il faut que ces deux forces soient égales et directement opposées, c'est-à-dire que 1° *le poids du corps soit égal au poids du liquide déplacé;* 2° *que le centre de gravité du corps et le centre de poussée soient situés sur une même verticale.*

155. Stabilité des corps plongés. — Les conditions relatives à la stabilité des corps plongés présentent deux cas : 1° les corps sont homogènes; 2° les corps sont quelconques.

1° Dans le cas d'un corps homogène, le centre de gravité se confond, comme nous l'avons déjà dit, avec le centre de gravité du liquide déplacé, et l'équilibre est indifférent; le corps se maintient en équilibre stable, quelle que soit la position qu'on lui fasse prendre à l'intérieur de la masse liquide.

2° Dans le cas d'un corps quelconque non homogène, il faut, pour que l'équilibre soit stable, outre les conditions énoncées ci-dessus, que le centre de gravité du corps soit au-dessous du centre de poussée.

Considérons une sphère S (*fig.* 111) dont la partie inférieure est formée d'une matière très-dense; elle sera en équilibre stable dans la position (1) où le centre de gravité G du système total est au-dessous du point C, centre de poussée. En effet, supposons que l'on fasse tourner cette sphère de manière à ce que G vienne occuper une certaine position (2); sous l'influence du poids P ap-

pliqué en G et agissant de haut en bas, et de la poussée P′ du liquide appliquée au point C, centre de pression, il y a production

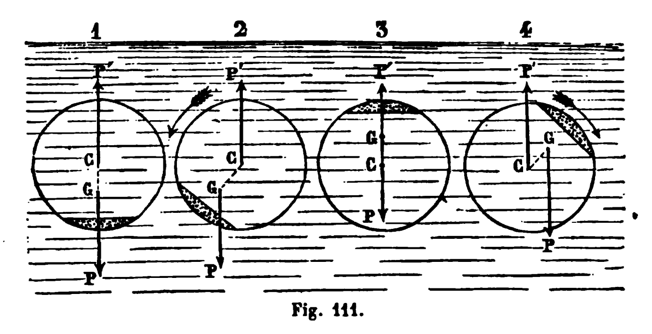


Fig. 111.

d'un couple qui tend à imprimer à la sphère un mouvement de rotation autour d'elle-même, pour ramener le point G dans sa position primitive, c'est-à-dire sur la verticale du point C et au-dessous de ce point.

La sphère sera également en équilibre dans la position (3) où le centre de gravité et le centre de poussée se trouvent sur la même verticale, le premier de ces points étant au-dessus du second. Mais si l'on fait prendre au corps la position (4), le poids P appliqué en G et agissant de haut en bas, et la poussée du liquide appliquée en C et agissant de bas en haut, forment un couple qui tend à ramener la sphère vers sa position (1) d'équilibre stable. La position (3) est donc pour le corps une position d'équilibre instable, car pour un déplacement aussi faible que l'on voudra, la pesanteur agira pour ramener le point G au-dessous du point C.

Ainsi, pour que l'équilibre soit stable, *il faut que le centre de gravité soit au-dessous du centre de poussée.*

156. Équilibre des corps flottants. — Un corps flottant à la surface d'un liquide, c'est-à-dire plongé en partie dans ce liquide, est sollicité par deux forces : 1° son poids P, force verticale agissant de haut en bas et appliquée en son centre de gravité ; 2° la poussée du liquide, force verticale agissant de bas en haut et appliquée au centre de gravité du volume liquide déplacé. Pour l'équilibre, il faut que ces deux forces soient égales et directement opposées, c'est-à-dire 1° *que le poids du corps soit égal au poids du*

liquide déplacé; 2° que le centre de gravité du corps et le centre de poussée soient situés sur une même verticale.

157. Stabilité des corps flottants. — La stabilité des corps flottants dépend, comme la stabilité des corps plongés, des différentes positions du centre de gravité du corps relativement au centre de poussée ; pour les corps plongés, l'équilibre stable exige que le centre de gravité soit au-dessous du centre de poussée; pour les corps flottants, cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

158. Corps non homogènes.—Considérons une sphère non homogène flottante dans un liquide en équilibre; soit G (*fig.* 112) son centre de gravité situé au-dessus du point C, centre de poussée du volume liquide déplacé. Imprimons au corps un déplace-

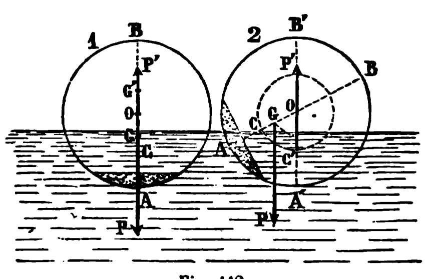


Fig. 112.

ment qui lui fasse occuper la position (2); le volume du liquide déplacé étant toujours le même, puisque le poids de la sphère est invariable, le nouveau centre de poussée C′ sera toujours situé sur la verticale du point O et à une distance OC′ = OC; mais le centre de gravité G du corps occupant une position fixe sur AB, la sphère se trouve sollicitée par un couple qui tend à la ramener à sa position primitive en la faisant tourner autour du point O, c'est-à-dire que l'équilibre est stable. Ainsi, malgré que le centre de gravité G du corps flottant soit au-dessus du centre de poussée, mais au-dessous du point O, il y a équilibre stable.

Supposons le point G situé au-dessus du point O, en G′ par exemple; si on dérange la sphère de cette position d'équilibre (1), le poids du corps agissant en G′ et la pression du liquide appliquée en C, ne se trouvant plus sur une même verticale, donnent nais-

sance à un nouveau couple qui, au lieu de ramener le corps dans sa position première, agira au contraire pour faire descendre le point G′ au-dessous du point O. L'équilibre est donc instable, et cela arrivera pour toutes les positions du point G prises au-dessus du point O ; si ces deux points coïncidaient, l'équilibre serait indifférent.

Un corps flottant est donc en équilibre stable, bien que son centre de gravité soit au-dessus du centre de poussée ; mais il faut pour cela qu'il se trouve au-dessous du point O.

159. Cas d'un corps quelconque. — Soit un cylindre flottant à la surface d'un liquide en repos, et tel, que la section faite par un plan perpendiculaire au plan longitudinal de symétrie MN soit représenté par la figure 113. Soit AB la ligne d'eau correspondant à cette position du corps, et C son centre de poussée ou le centre de gravité du volume liquide déplacé. Le cylindre étant dérangé de sa position première par une cause quelconque qui le forcera à s'incliner vers la droite, une nouvelle ligne de flottaison A′B′ s'établira, et le centre de poussée, qui était précédemment en C, se sera transporté en un point C′, centre de gravité du volume A′MB′D, qui doit être égal à AMBD, puisque le poids du corps n'a pas changé.

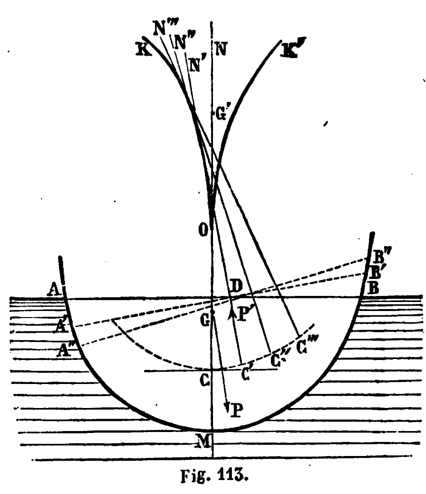


Fig. 113.

Or ces deux volumes AMBD et A′MB′D ont une partie commune A′MBD, et pour passer du premier au second, il faut retrancher la partie ADA′ située à gauche, et ajouter la partie B′DB située à droite. Par conséquent, le nouveau centre de poussée C′ se trouve à droite du plan MN et s'est rapproché de la ligne d'eau primitive AB.

En considérant une nouvelle ligne d'eau A″B″ déterminée par une nouvelle position du corps, on verrait de même que le nouveau

centre de poussée C″ du volume A″MB″ est encore situé plus près de la droite AB que le point C′.

Il résulte de là que le centre de poussée, dans les différentes positions que peut prendre le corps, décrit une courbe dont le point le plus bas, C, se trouve dans le plan MN; par suite, la tangente menée en ce point C est horizontale et parallèle à la ligne d'eau qui lui correspond. Donc, pour toutes les positions du corps, le point de contact de la tangente et de la courbe des centres de poussée détermine le centre de poussée relatif à la position considérée. En menant aux différents points de la courbe CC′C″... des normales CN, C′N′, C″N″..., ces normales déterminent, par leurs intersections, une courbe à deux branches OK, OK′, qui sera la développée de la courbe CC′C″..., lieu des centres de poussée. Cette courbe est appelée *courbe métacentrique*, et le point de rebroussement O s'appelle le *métacentre*.

Si le centre de gravité du corps ne se trouve pas toujours dans un même plan pour toutes les variations de position du corps, le lieu des centres de poussée est une surface dite *métacentrique*.

La position du métacentre O, relativement au centre de gravité du corps, joue, dans le cas considéré, un rôle analogue à celui du point O, centre de figure de la sphère dont il a été parlé précédemment, c'est-à-dire qu'il définit la stabilité ou l'instabilité du corps. En effet, supposons que le point G, centre de gravité du corps, soit situé sur la verticale du point C et au-dessous du point O. Imprimons au corps un déplacement très-petit, de façon que la ligne d'eau AB devienne A′B′; le cylindre est soumis à l'action de deux forces: 1° son poids P appliqué au centre de gravité G, et 2° la poussée du liquide, force verticale dirigée suivant la normale au point C′ et égale au poids P, mais de sens contraire. Ces deux forces donnent naissance à un couple dont le sens tend à ramener le corps à sa position première; il y a donc équilibre stable.

Le centre de gravité G′, situé au-dessus du métacentre, serait pour le corps une position d'équilibre instable, car le poids P et la poussée du liquide formeraient un nouveau couple qui aurait pour effet de ramener le point G′ au-dessous du métacentre, ou, en d'autres termes, pour un déplacement très-petit, le corps

continuerait de lui-même à se mouvoir pour venir occuper une position d'équilibre stable.

Donc, pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, *il faut et il suffit que son centre de gravité soit au-dessous du métacentre.*

160. Application aux navires. — Les conditions relatives à la stabilité des corps flottants trouvent leur application la plus importante dans *l'arrimage* des navires, c'est-à-dire dans leur chargement; celui-ci doit être effectué pour que les navires remplissent les conditions les plus favorables à leur stabilité.

Afin d'abaisser le centre de gravité, on dispose les objets les plus lourds à fond de cale, et on répartit, autant que possible, la charge symétriquement par rapport au plan longitudinal. Lorsque cette charge ne suffit pas à donner au navire le tirant d'eau nécessaire à sa stabilité, on y ajoute des matières pesantes, telles que des pierres, du sable de la mer, etc.; cette charge additionnelle, appelée *lest*, sert aussi, pendant la marche, à changer la position du centre de gravité suivant les besoins.

Dans l'arrimage, on s'arrange toujours pour que le centre de gravité soit situé au-dessus du centre de poussée qui, dans les navires, prend le nom de *centre de carène.* Cette disposition a pour but de ne pas donner au bâtiment une stabilité trop exagérée, qui aurait le grave inconvénient de le faire revenir trop brusquement à sa position d'équilibre après chaque oscillation, et qui occasionnerait un grand malaise à l'équipage et une forte fatigue à la carcasse.

161. Analogie entre la stabilité des corps flottants sur l'eau et leur stabilité sur un plan horizontal. — Dans ce qui précède, nous avons trouvé la courbe, ou lieu des centres de poussée, pour les différentes positions que peut prendre le corp représenté par la figure 113. Si l'on donnait à un corps de même poids et de même centre de gravité que le précédent, la forme déterminée par la courbe dont nous venons de parler, ce nouveau corps, en s'appuyant sur un plan horizontal, se trouverait exactement dans les mêmes conditions d'équilibre que le premier, car, dans ce cas, la réaction exercée par le plan, à son point de contact avec le corps, produit le même effet que la force qui agit au centre de poussée du corps flottant.

CHAPITRE V

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA STATIQUE AUX MACHINES

162. On désigne, en statique, sous le nom de *machines*, des corps ou des assemblages de corps qui, étant soumis à certaines liaisons, servent à mettre en équilibre des forces qui ne sont ni égales ni directement opposées.

Généralement, deux forces sont en présence sur une machine; l'une, appelée *puissance*, dont la fonction est d'en vaincre une autre, appelée *résistance*. Ces deux forces étant, le plus souvent, d'intensité et de direction différentes, et devant être mises en équilibre par l'intermédiaire de la machine, il faut que le corps, ou l'assemblage de corps composant cette machine, soit soumis à certaines liaisons, ou, autrement dit, gêné dans son mouvement par des obstacles fixes.

On distingue deux classes de machines : 1° les machines *simples*, et 2° les machines *composées*. Les machines simples sont formées par un seul corps solide.

Les machines composées sont formées par deux ou plusieurs corps solides reliés entre eux et réagissant les uns sur les autres.

D'après la nature de l'obstacle qui gêne leur mouvement, les machines simples se divisent en trois systèmes différents et prennent les noms indiqués par le tableau suivant :

NATURE DE L'OBSTACLE	NOM DE LA MACHINE.
Point fixe.	Levier.
Axe fixe.	Tour ou treuil.
Plan fixe.	Plan incliné.

Nous étudierons en particulier chacun de ces trois systèmes, et, pour chacun d'eux, nous déterminerons les conditions d'équi-

libre entre la puissance et la résistance; nous donnerons également les applications qui s'y rattachent, telles que les balances et les poulies pour le premier système; le cric, la chèvre et les grues pour le second. Comme application du troisième système, nous verrons en cinématique le coin et les vis.

§ 1. — SYSTÈME LEVIER

163. On désigne en général sous le nom de *levier*, un corps solide de forme quelconque, assujetti à se mouvoir en tous sens autour d'un point fixe; il affecte ordinairement la forme d'une barre

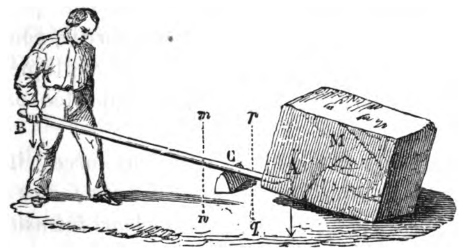


Fig. 114.

rigide AB (*fig.* 114), droite ou courbe, mobile autour d'un de ses points C, appelé *point d'appui*. Un ouvrier, placé à l'extrémité B, peut, en exerçant un effort convenable, déplacer un corps M disposé à l'autre extrémité A.

Un levier AB (*fig.* 115) n'est ordinairement soumis qu'à l'ac-

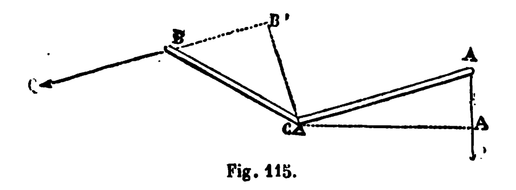


Fig. 115.

tion de deux forces, l'une P, appelée *puissance*, agissant pour vaincre une autre force Q, appelée *résistance*. Si du point d'appui C nous abaissons deux perpendiculaires sur les directions des forces P et Q, ces droites prennent le nom de *bras de levier*.

164. Conditions d'équilibre. — Nous considérerons deux cas dans la recherche des conditions d'équilibre du levier : 1° celui où il est soumis à un nombre quelconque de forces, et 2° celui où ces forces se réduisent à deux, une puissance et une résistance.

1° Lorsqu'un levier est soumis à un nombre quelconque de forces, il faut et il suffit, pour l'équilibre, *que toutes ces forces aient une résultante unique passant par le point d'appui.*

Cette question a été résolue (120) lorsque nous avons traité de l'équilibre d'un corps ayant un point fixe. En effet, nous savons que toutes les forces sollicitant le levier peuvent se réduire à deux, S et T, dont l'une, S, passe par un point pris à volonté; choisissons le point d'appui C; cette force sera détruite par la résistance du point fixe, et, pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force T passe aussi par le point d'appui. Ces deux forces, concourant au même point C, se composent en une seule R appliquée au même point, force qui détermine la pression supportée par le point d'appui.

2° Lorsqu'un levier est sollicité par deux forces, il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre : 1° *que ces deux forces soient dans un même plan avec le point d'appui;* 2° *que leurs intensités soient en raison inverse de leurs bras de levier, et* 3° *qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraire.*

Considérons un levier AB (*fig.* 116) mobile autour du point C, et soient P la puissance agissant en A, et Q la résistance agissant en B. Nous avons prouvé (30) que lorsque deux forces admettent une résultante unique, cette résultante se trouve dans le plan des composantes; donc, pour que les deux forces P et Q aient une résultante passant par le point C, il faut d'abord qu'elles soient dans un même plan avec le point d'appui.

Abaissons du point C et sur la direction des forces P et Q, les perpendiculaires CA′ et CB′, que nous désignerons par p et q. La résultante R devant passer par le point C, si nous prenons les moments des forces par rapport à ce point, les moments des composantes sont égaux et de signe contraire; on a donc :

$$P \times CA' - Q \times CB' = 0$$

Le moment de la résultante étant égal à la somme algébrique des moments des composantes, cette équation indique encore que le

moment de la résultante est nul, ce qui est évident, puisqu'elle passe par le centre des moments. On tire de là :

$$P \times p = Q \times q$$

et

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$$

c'est-à-dire que la puissance et la résistance sont inversement proportionnelles à leurs bras de levier, et, de plus, elles tendent à faire tourner le levier en sens contraire.

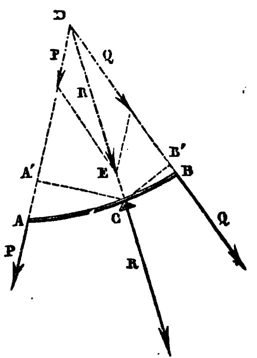


Fig. 116.

REMARQUE I. — On voit, par là, que l'équilibre du levier ne cessera pas d'exister si l'on change à volonté la grandeur et la position de la puissance ou de la résistance, pourvu que le moment de ces forces reste constant par rapport au point d'appui.

REMARQUE II. — Si le levier repose, par une arête vive, sur une surface d'appui, comme dans le fléau des balances, il peut arriver que si le point de contact change avec l'inclinaison du levier, celui-ci tende à glisser. Il faut alors ajouter aux conditions d'équilibre énoncées ci-dessus, *que la résultante des forces soit normale à la surface d'appui.*

165. Pression supportée par le point d'appui. — La pression supportée par le point d'appui est égale à la résultante de toutes les forces appliquées au levier; cette résultante s'obtiendra en transportant toutes les forces au point d'appui, parallèlement à elles-mêmes, et la composition de toutes ces forces déterminera une résultante qui sera évidemment la charge du point d'appui.

Si le levier n'est sollicité que par deux forces, une puissance P et une résultante Q, on prolongera leur direction jusqu'à leur point de concours D (*fig.* 116), et on déterminera, par la règle du parallélogramme des forces, leur résultante R qui, étant appliquée en C, sera la charge du point d'appui.

L'intensité de la résultante est donnée algébriquement par la formule :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(PQ)}$$

166. Différents genres de levier. — Lorsque la puissance et la résistance ont des directions parallèles (*fig.* 117) et de même sens, c'est-à-dire que l'angle (PQ) = 0, la pression R supportée par le point d'appui est égale à la somme des forces P et Q;

$$R = P + Q$$

Cette valeur maximum de R est fournie par la position du point d'appui situé entre les points d'application des forces auxquelles le levier est soumis. Toutes les fois que le point d'appui est situé entre le point d'application de la puissance et celui de la résistance, le levier est dit du *premier genre*. Exemples : les fléaux des balances, les pinces des carriers, les balanciers des machines à vapeur, les ciseaux.

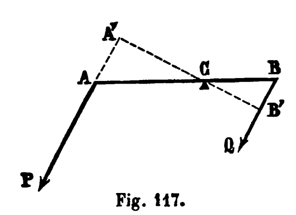


Fig. 117.

Le levier étant rectiligne, les perpendiculaires CA' et CB' sont respectivement proportionnelles aux segments CA et CB, et les forces P et Q sont en raison inverse de la distance de leurs points d'application au point d'appui; par suite, le levier sera favorable ou défavorable à la puissance, suivant que le bras de levier de la puissance sera plus grand ou plus petit que celui de la résistance.

Lorsque la puissance et la résistance ont des directions parallèles et de sens contraire, c'est-à-dire que l'angle (PQ) = 180°, la pression R supportée par le point d'appui est égale à la différence des forces P et Q :

$$R = Q - P$$

Cette valeur minimum de R est donnée par la position du point d'appui situé en deçà et au delà du point d'application des forces P et Q. Si le point d'application de la résistance est le plus rapproché du point d'appui, comme dans la figure 118, le levier est dit du *second genre*.

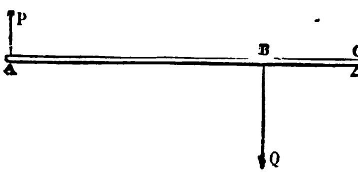


Fig. 118.

Un levier est donc du second genre, ***lorsque le point d'application de la résistance est placé entre le point d'appui et la puissance.*** Exemples : les brouettes, les pédales des pianos, les casse-noisettes.

La puissance étant toujours inférieure à la résistance, puisqu'elle est la plus éloigée du point d'appui, le levier du second genre est toujours favorable à la puissance.

Si le point d'application de la puissance est le plus rapproché du point d'appui, ou, en d'autres termes, si le point d'application de la puissance est situé entre le point d'appui et la résistance, le levier est dit du *troisième genre*. Exemple : les pincettes à attiser le feu, la pédale du rémouleur, les soupapes de sûreté.

Le point d'application de la puissance étant le plus rapproché du point d'appui, il s'ensuit que, pour qu'il y ait équilibre, la puissance doit toujours être plus grande que la résistance ; c'est sur ce principe que repose la construction des soupapes de sûreté.

Le levier du troisième genre est toujours défavorable à la puissance.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous avons négligé le poids du levier, c'est-à-dire que nous l'avons considéré de telle sorte que la verticale du centre de gravité passât par le point d'appui. Dans bien des cas, cette abstraction ne peut plus être admise, et, si nous désignons par X le poids du levier, et par x son bras de levier, l'équation d'équilibre deviendra :

$$P \times p + X \times x + Q \times q = 0$$

en affectant chaque moment du signe qui lui correspond.

Nous avons considéré également le levier comme un corps de forme invariable ; cette hypothèse peut encore subsister, en pratique, malgré que le levier fléchisse et se déforme sous l'action des forces qui lui sont appliquées, car cette déformation reste la même jusqu'à ce que les forces aient cessé d'agir, et, par suite, le levier peut être considéré comme ayant toujours eu la forme qu'il affecte sous l'influence des forces qui le sollicitent. On rentre ainsi dans le cas d'un levier parfaitement rigide et indéformable, et les considérations exposées plus haut lui sont applicables.

167. Usages du levier. — Personne n'ignore les nombreux et

importants usages du levier employé presque dans toutes les machines composées. Dans quelques machines à vapeur verticales, où il prend le nom de *balancier*, il sert à transmettre le mouvement de la tige du piston à la bielle motrice. Il est adapté au régulateur à force centrifuge, soit pour faire ouvir ou fermer la valve placée dans le tuyau de communication du cylindre avec la chaudière, soit pour faire monter ou descendre la vanne d'arrivée de l'eau dans les récepteurs hydrauliques. Il sert aussi, dans les générateurs à vapeur et dans les presses hydrauliques, à empêcher la tension intérieure de dépasser une certaine limite. Les ouvriers l'emploient constamment pour soulever les fardeaux, et l'une de ses applications les plus importantes réside dans la construction des balances.

168. Balances. — *Les balances sont des appareils qui servent à déterminer le poids des corps.* Nous allons faire connaître successivement les divers types de balances employées dans le commerce.

169. Balance ordinaire. — La balance ordinaire se compose essentiellement d'un levier AB (*fig.* 119) du premier genre, appelé *fléau*, qui est une pièce rigide en métal, généralement en cuivre

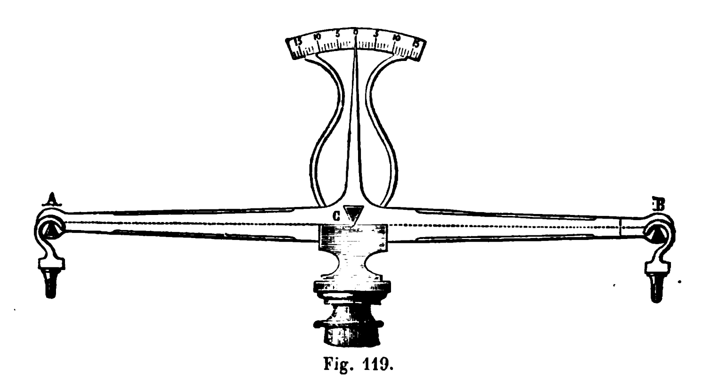


Fig. 119.

ou en acier, aux extrémités de laquelle sont suspendus, au moyen de chaînes, deux plateaux destinés à recevoir, l'un, les corps à peser, et l'autre, la quantité de poids gradués nécessaires pour établir l'équilibre. Cette barre AB porte en son milieu, et perpendiculairement à sa longueur, un prisme triangulaire C, en acier

trempé, appelé *couteau*, faisant saillie de chaque côté. Ce couteau repose, par son arête inférieure, sur deux plaques bien polies, également en acier trempé et quelquefois en agate, disposées dans un même plan horizontal, l'une en avant, l'autre en arrière et fixées à la partie supérieure d'une colonne servant de support à la balance. Aux deux extrémités du fléau, et à égale distance de l'axe de rotation ou de l'arête inférieure du couteau central, sont disposés deux autres couteaux également en acier trempé, dont l'une des arêtes, tournée vers le haut, reçoit les crochets auxquels sont fixées les chaînes qui supportent les plateaux. On s'arrange de manière que les trois arêtes de suspension du fléau et des deux plateaux soient rigoureusement en ligne droite. Une aiguille, fixée perpendiculairement au fléau et en son milieu, indique les différentes positions de ce fléau sur un limbe gradué dont le zéro correspond à la position horizontale; elle permet en outre, dans les balances très-sensibles, où les oscillations se continuent pendant un temps assez long, de juger de l'égalité des poids disposés dans les plateaux par des déviations égales de chaque côté du zéro.

170. Pour déterminer le poids d'un corps, on place celui-ci dans l'un des plateaux de la balance, et dans l'autre, on met un certain nombre de poids connus de façon à ce qu'il y ait équilibre, position fournie par l'aiguille indicatrice, si elle est au zéro. Il suffit alors, si la balance est juste, d'évaluer le nombre de kilogrammes et de subdivisions qui ont été employés, pour obtenir le poids du corps.

171. Conditions auxquelles doit satisfaire une bonne balance. — Une balance doit, pour être employée utilement, satisfaire aux deux conditions générales suivantes : 1° elle doit être *juste ;* et 2° elle doit être *sensible.*

172. Justesse. — Pour qu'une balance soit juste, il faut : 1° que le fléau se maintienne horizontal lorsque les plateaux sont vides ou contiennent des poids égaux; 2° que les bras du fléau soient égaux en longueur.

Pour vérifier la justesse d'une balance, on constate d'abord l'horizontalité du fléau, lorsque les plateaux ne renferment aucun corps, en supposant qu'ils soient exactement du même poids; puis, on met dans ces plateaux un certain nombre de poids, de telle sorte que, sous leur influence, le fléau occupe toujours la

position horizontale; on change alors les poids de place, et si l'horizontalité se maintient encore, on peut affirmer que la balance est juste.

173. Développons les deux conditions de justesse. Soient l et l' (*fig.* 120) les longueurs des deux bras du fléau, q le poids de ce fléau, d la distance de son centre de gravité au point de suspension, et P la valeur commune des poids placés dans les deux plateaux. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme des moments de toutes les forces par rapport au point C soit nulle. On aura donc :

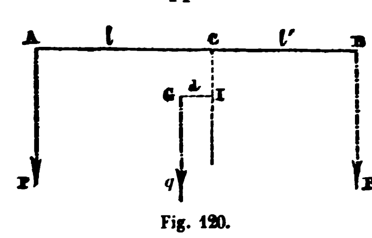


Fig. 120.

$$Pl - Pl' \pm qd = 0 \quad \text{ou} \quad P(l - l') \pm qd = 0$$

Le terme qd sera positif si le centre de gravité est situé à gauche du point de suspension, et négatif s'il est à droite.

Cette équation doit se vérifier quelle que soit la valeur de P; il en résulte forcément les égalités :

$$l = l' \quad \text{et} \quad d = 0$$

174. Nous venons de prouver que le centre de gravité du fléau, doit se trouver sur la verticale passant par l'axe de suspension; mais on peut se demander si, sur cette verticale, sa position est indifférente par rapport au point fixe. Il est facile de voir qu'il n'en est pas ainsi, car l'équilibre doit être stable, lorsque le fléau est horizontal et les plateaux chargés de poids égaux; de plus, si les poids placés dans les plateaux ne sont pas égaux, il faut aussi que cette différence soit indiquée par une nouvelle position d'équilibre stable, inclinée à l'horizon. Il est donc nécessaire d'examiner les trois cas qui peuvent se présenter : 1° le centre de gravité est au-dessus du point d'appui; 2° il se confond avec ce point; et 3° il est au-dessous de lui.

Soient AB (*fig.* 121) l'axe du fléau d'une balance, C son point de suspension, G son centre de gravité situé au-dessus du point C, A et B les points de suspension des plateaux. Le poids du fléau

que nous désignerons par q, pouvant être considéré comme appliqué à son centre de gravité, si l'on ajoute au poids P de droite, un poids additionnel très-petit, ou si l'on imprime simplement un faible mouvement au fléau, celui-ci s'écartera de sa position horizontale, le centre de gravité tendra toujours à s'abaisser, et la pesanteur, au lieu de le ramener vers sa position primitive, agira pour le faire descendre vers le bas. L'équilibre est donc instable; on dit dans ce cas que la balance est *folle*.

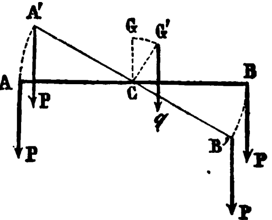


Fig. 121.

Il est expressément interdit de se servir d'une balance folle, car rien ne peut avertir d'une erreur, lorsque l'équilibre est rompu.

2° Si le centre de gravité coïncide exactement avec le point d'appui, le poids du fléau est alors appliqué sur l'axe de suspension, et la balance se maintient en équilibre dans toutes les positions, si les plateaux sont vides ou contiennent des poids égaux; l'équilibre est donc indifférent. Une augmentation de poids aussi petite qu'elle soit, dans l'un des plateaux, fera trébucher la balance. On dit dans ce cas que la balance est *indifférente*.

3° Considérons enfin le centre de gravité au-dessous du point de suspension; dans ce cas, l'équilibre est stable. Si l'on imprime au fléau AB (*fig.* 122) un faible mouvement de manière à lui faire prendre la position A'B', le point G s'élèvera et viendra en G'; mais la pesanteur va agir pour le ramener en sens contraire, vers sa position première. En vertu du mouvement précédemment acquis, il dépassera cette position, le centre de gravité passera à droite de l'axe de suspension, et la pesanteur agira de nouveau pour le faire redescendre. Au bout de quelques oscillations, l'équilibre sera rétabli, c'est-à-dire que le fléau sera redevenu horizontal.

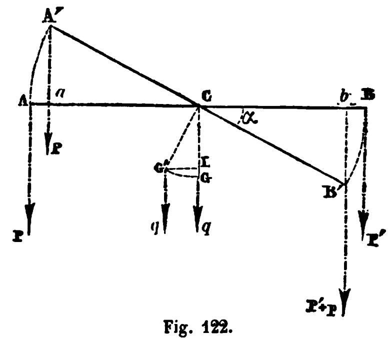


Fig. 122.

Supposons maintenant que le poids placé dans le plateau B surpasse de p, celui qui est placé dans le plateau A ; cet excédant de poids va agir pour faire incliner le fléau, et si cet excédant n'est pas très-considérable, AB viendra, au bout de quelques oscillations, prendre une nouvelle position d'équilibre stable A'B', le centre de gravité se trouvant transporté en G'.

En effet, prenons le moment de chacune des forces par rapport au point C ; nous aurons, en abaissant des points A', B' et G', les perpendiculaires $A'a$, $B'b$, G'I et en désignant par q le poids du fléau :

$$(P+p)\,Cb = P \times Ca + q \times G'I$$

Mais les deux poids égaux P appliqués en A' et B' ont une résultante unique passant par le point C, qui est détruite par la résistance de ce point; par conséquent, les deux termes $P \times Cb$ et $P \times Ca$ s'éliminent, et il vient :

$$p \times Cb = q \times G'I$$

Or, à mesure que le fléau s'incline, le moment $p \times Bb$ diminue, tandis qne le moment $q \times G'I$ augmente à partir de zéro. Il y a donc une position inclinée du fléau, et une seule, pour laquelle ces moments sont égaux, et dans cette nouvelle position, la balance est encore en équilibre stable. Donc, le centre de gravité du fléau doit toujours être au-dessous du point de suspension.

175. Sensibilité. — Une balance est sensible lorsqu'une petite différence entre les poids placés dans les plateaux est indiquée par une inclinaison sensible du fléau. Pour arriver à ce résultat, il faut diminuer autant que possible le frottement des couteaux sur leur plan d'appui, ce qui a conduit à les construire en matières très-dures, telles que l'acier ou l'agate.

La sensibilité d'une balance implique encore les conditions suivantes :

1° Il faut que le fléau soit aussi long et aussi léger que possible, et que le centre de gravité soit situé le plus près possible de l'axe de suspension;

2° Il faut que les points de suspension du fléau et des plateaux soient en ligne droite.

Désignant par h la distance CG, du centre de gravité du fléau

au point C, par l la longueur des bras du fléau et par α l'angle $ACA'=BCB'$. Nous aurons :

$$Cb = l\cos\alpha \quad G'I = h\sin\alpha$$

Et l'équation d'équilibre $p \times Cb = q \times G'I$

pourra s'écrire $p \times l\cos\alpha = q \times h\sin\alpha$ d'où $\frac{p \times l}{q \times h} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha$

Il est évident que la balance sera d'autant plus sensible que l'angle α sera plus grand pour un même poids p; mais tant que cet angle ne dépasse pas un petit nombre de degrés, on peut le considérer comme étant sensiblement proportionnel à sa tangente et la formule ci-dessus montre qu'une balance sera d'autant plus sensible que la longueur l sera plus grande, le poids q du fléau plus faible et la distance h moins considérable, ce qui prouve la première condition énoncée plus haut.

Pour démontrer la deuxième condition, remarquons que si les points de suspension du fléau et des plateaux n'étaient pas en ligne droite, les longueurs telles que Ca et Cb ne seraient plus égales pour les différentes positions inclinées du fléau ; les termes $P \times Ca$ et $P \times Cb$ ne disparaîtraient pas de l'équation d'équilibre, et, comme conséquence, l'angle α, où la sensibilité de la balance varierait suivant la charge des plateaux. Il faut donc que les trois points de suspension soient en ligne droite pour que la sensibilité de la balance soit indépendante de la charge.

Pour réaliser la première condition, on donne au fléau la forme d'un losange que l'on évide de part et d'autre afin de le rendre très-léger. Dans quelques balances, et principalement dans les balances de précision, on peut faire varier le degré de sensibilité au moyen d'un dispositif fort simple. Perpendiculairement au fléau et au-dessus du point d'appui, on a placé une tige filetée recevant un écrou dont le poids éloigne ou rapproche le centre de gravité de l'axe de suspension, suivant que l'on fait descendre ou monter cet écrou.

En pratique, malgré que la deuxième condition soit strictement remplie, l'appareil deviendra moins sensible lorsqu'on l'emploiera pour peser des corps très-lourds, car le fléau, n'ayant jamais une rigidité absolue, fléchira, et les trois points A, C, B, ne seront plus en ligne droite ; en outre, le frottement développé par les cou-

teaux sur leur plan d'appui augmentera; la mobilité du fléau sera altérée, et la balance n'aura plus le degré de sensibilité qu'elle possédait tout d'abord pour de petites pesées. Il y a donc, pour chaque balance, une charge limite qu'il ne faut pas dépasser, à moins d'altérer sa sensibilité.

Le degré de sensibilité des balances dépend de la nature des pesées auxquelles on les destine; pour les balances ordinaires du commerce, le règlement l'a fixé à $\frac{1}{2000}$ de la charge maximum qu'elle peut accuser. Pour les balances de précision employées dans les cabinets de physique et de chimie, on atteint une précision de 1/10 de milligramme et, pour les balances d'essayeur, cette précision va jusqu'à 1/20 de milligramme.

176. Méthode des doubles pesées. — Malgré tous les soins apportés dans la construction des balances, il est fort difficile de réaliser une des conditions de justesse, c'est-à-dire d'obtenir une égalité absolue dans les bras du fléau. Pour effectuer des pesèes trés-exactes au moyen d'une balance quelconque, on emploie une méthode imaginé par Borda et appelée *méthode des doubles pesées*.

On place dans l'un des plateaux de la balance le corps dont on veut connaître le poids, et on établit l'équilibre en mettant dans l'autre plateau des objets quelconques, tels que de la grenaille de plomb, du sable, etc. Ensuite on enlève le corps et on le remplace par des poids connus de façon à ramener le fléau dans la position horizontale. Il suffit alors d'évaluer le nombre de poids marqués, car produisant l'équilibre dans des conditions identiques à celles du corps, puisqu'ils agissent à l'extrémité du même bras du fléau, ils représentent exactement son poids, quelle que soit la différence qui existe entre les bras de levier. On peut donc obtenir une pesée très-exacte avec une balance de peu de justesse, si elle est suffisamment sensible.

177. Autre méthode. — Soient x le poids cherché, AB l'axe du fléau de la balance et C son point d'appui. Le corps étant placé dans le plateau suspendu au point B, supposons qu'il faille un poids P pour déterminer l'horizontalité du fléau; nous aurons :

$$P \times AC = x \times CB$$

Si, maintenant, nous plaçons le corps dans le plateau suspendu

au point A, et que nous établissions l'équilibre au moyen d'un poids P′, nous aurons :

$$P' \times CB = x \times AC$$

Multipliant ces deux égalités, membre à membre, les quantités AC et BC disparaissent, et il vient :

$$x^2 = P \times P' \text{ d'où } x = \sqrt{P \times P'}$$

c'est-à-dire que le poids du corps est une moyenne géométrique entre les poids trouvés dans les deux pesées successives.

178. Romaine. — La balance romaine (*fig.* 123) se compose d'un levier AB du premier genre, à bras très-inégaux ; ce levier, appelé *fléau*, est suspendu à une pièce CC′ munie à sa partie inférieure d'une chape sur laquelle vient s'appuyer un couteau C, et à sa partie supérieure elle porte un anneau C′ servant à supporter l'appareil soit à la main, soit de toute autre manière. Près de l'extrémité A du petit bras de levier se trouve disposé un crochet, et quelquefois un plateau, dans lequel se placent les corps à peser. Sur le grand bras du fléau, qui est d'une faible section relativement au petit, glisse un poids constant Q, appelé *curseur*, pouvant se déplacer longitudinalement pour établir l'équilibre.

Un corps P étant suspendu au crochet A, il faut, pour en obtenir le poids, faire glisser le curseur le long de BC et l'amener dans une position telle que le fléau se maintienne horizontal : il suffit alors de lire à quelle division se trouve le poids Q pour connaître celui du corps.

179. Graduation. — Supposons d'abord que le centre de gravité du fléau se trouve sur la verticale du point de suspension C ; le frottement sur les couteaux étant négligeable, nous aurons, pour l'équation d'équilibre, en désignant par P le poids du corps et par Q celui du curseur :

$$P \times AC = Q \times CD \text{ d'où } P = Q \times \frac{CD}{AC}$$

Or le poids Q et la longueur AC étant des quantités constantes, il s'ensuit que le poids P du corps est proportionnel à la distance CD correspondant au point où il faut amener le poids Q pour obtenir l'horizontalité du fléau.

Par conséquent, pour graduer l'instrument, on placera le zéro au point C; on suspendra au crochet A un poids de 1 kilogramme, on cherchera la position du curseur Q correspondant à la position d'équilibre, et on marquera 1 en ce point. Ensuite sur la direction de CB, on portera des longueurs 1 2, 2 3... égales à C1 et on marquera 2, 3, 4... aux points ainsi déterminés. Pour apprécier les fractions de kilogramme, on divisera les intervalles successifs 1 2, 2 3... en un certain nombre de parties égales, suivant le degré d'approximation qu'on veut obtenir.

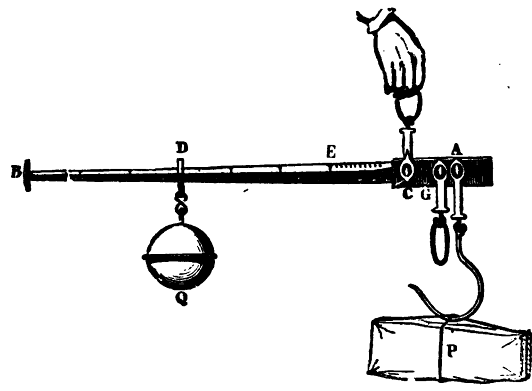


Fig. 123.

Ordinairement, le centre de gravité G ne se trouve pas sur la verticale du point d'appui; il se trouve entre les points A et C. Soient E la position du curseur qui établit l'équilibre lorsque aucun poids n'agit en A et q le poids du fléau agissant en g; nous aurons d'après le principe des moments :

$$q \times Cg = Q \times CE$$

Un poids P étant suspendu en A et le curseur ayant été transporté en D, l'équation d'équilibre deviendra :

$$P \times AC + q \times Cg = Q \times CD = Q\,(CE + DE) \qquad (1)$$

Retranchant la première égalité de la deuxième, nous aurons :

$$P \times AC = Q \times ED \quad \text{d'où} \quad P = Q \times \frac{ED}{AC}$$

Or le poids Q et la longueur AC étant des quantités constantes, il en résulte que P est proportionnel à ED.

Pour opérer la graduation de l'instrument, on marquera le zéro au point E ; on suspendra au crochet A un poids connu, 5 kilogrammes par exemple, et on marquera le chiffre 5 au point D déterminé par la position du poids curseur correspondant à l'équilibre ; on divisera la distance ED en 5 parties égales et on portera les divisions au delà. Il sera facile de diviser les intervalles compris entre chaque division, pour apprécier les fractions de kilogramme.

Il est à remarquer que le centre de gravité peut être situé indistinctement à droite ou à gauche de l'axe de suspension ; dans ce dernier cas l'équation (1) serait modifiée, car le moment $q \times Cg$ passerait dans le second membre.

Généralement, les romaines ne sont employées que pour des pesées de peu de précision ; leur emploi est toléré si elles trébuchent pour un excès égal au $\frac{1}{500}$ de la charge maximum. Leur avantage est qu'elles n'exigent pas de poids marqués et les pesées s'opèrent rapidement.

Les balances romaines sont très-souvent munies de deux chapes de suspension, comme l'indique la figure. Si on veut peser des corps légers, on suspendra la balance par l'anneau qui est le plus éloigné du point A; si ces corps ont un poids considérable, on retourne l'appareil et on se sert de l'anneau qui est le plus près du point A ; on diminue ainsi le petit bras du fléau. Celui-ci porte alors deux échelles différentes destinées à ces deux manières d'employer l'instrument.

180. Balance-bascule. — La balance-bascule, appelée aussi *balance de Quintenz*, du nom de son inventeur, sert à peser des fardeaux dont le poids est très-considérable. Elle a été pendant longtemps en grand usage dans le commerce et dans l'industrie, en raison de la facilité avec laquelle on met et on enlève les corps dont on veut apprécier le poids.

La balance-bascule est indiquée dans son ensemble (*fig.* 124). Elle se compose essentiellement d'un levier LN mobile autour d'un axe horizontal M. Ce levier porte à l'une de ses extrémités un plateau P, suspendu au moyen de chaînes, sur lequel on dispose les poids marqués qui doivent faire équilibre au poids du corps.

Celui-ci se place sur une plate-forme horizontale appelée *tablier*, surmontée d'une partie verticale BC destinée à protéger l'appareil et qui est liée invariablement, au moyen d'une pièce oblique nommée *fourche*, à une autre pièce horizontale suspendue sur un couteau, au point K du petit bras du fléau, par une tringle verticale HK. Une autre tringle verticale LG, reposant également par un couteau sur le même bras du fléau, est liée inférieurement à l'extrémité d'un levier FG, qui se divise en deux branches mobiles autour de leurs extrémités F (*fig.* 125). Ce levier sert de second point d'appui au tablier muni de couteaux E reposant sur les branches de la fourche FG.

La disposition et le rapport établi entre les leviers combinés permettent à la balance-bascule de satisfaire aux deux conditions suivantes, très-utiles en pratique :

1° Le tablier AB se meut parallèlement à lui-même dans le sens vertical, sous l'influence d'un poids Q;

2° La position d'un corps sur le tablier est indifférente, c'est-à-dire qu'un même poids lui fait toujours équilibre quelle que soit la position de ce corps sur le tablier.

Examinons d'abord de quelle manière la première condition a été remplie. Le plateau AB venant à s'abaisser, les points E et G, appartenant au levier FG, descendent en tournant autour du point F de quantités telles qu'en les désignant par l et l', on a :

$$\frac{l}{l'}=\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FG}}$$

Pendant ce temps, les points L et K s'abaissent également de quantités l' et l'' telles que l'on a :

$$\frac{l'}{l''}=\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MK}}$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{l}{l''}=\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FG}}\times\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MK}}$$

Or, pour que le tablier se meuve parallèlement à lui-même, il faut que $l=l''$, ce qui arrivera lorsqu'on aura :

$$\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FG}}\times\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MK}}=1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FG}}=\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{ML}}.$$

La construction de la balance est telle que cette égalité de rapports se trouve satisfaite.

Examinons maintenant la deuxième condition. Il suffit de faire voir que, quelle que soit la position du corps sur le tablier, son poids agit sur le levier LN comme s'il était appliqué directement

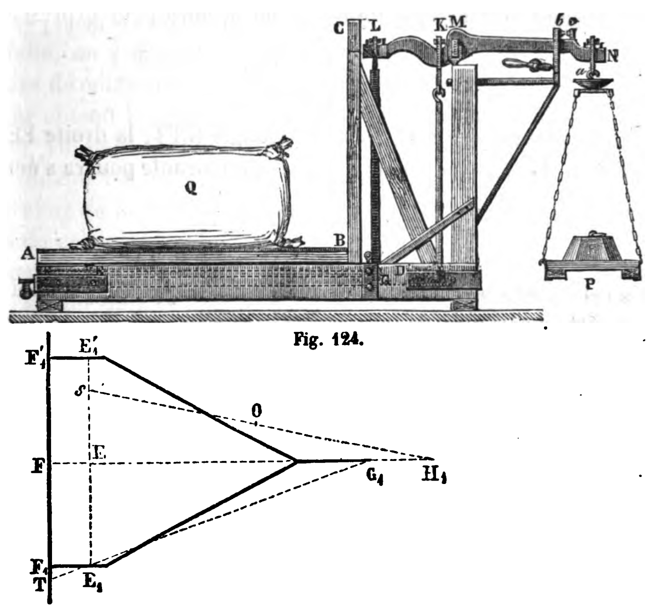


Fig. 124.

Fig. 125.

au point K. Pour cela, considérons le plan de la figure représentant la fourche FG. Soit O le point où la verticale passant par le centre de gravité du corps perce ce plan ; le poids Q du corps appliqué en O peut se décomposer en deux forces verticales, l'une q appliquée au point H_1 et l'autre q_1, appliquée en un point S de la droite qui joint les couteaux E par l'intermédiaire desquels le tablier repose sur la fourche. Cette deuxième composante q_1, peut à son tour être décomposée en deux autres forces q' et q'' appliquées en E_1 et E'_1. Le poids Q se trouve ainsi décomposé en trois forces q, q', q'' qui, étant parallèles et de même sens, donnent :

$$q + q' + q'' = Q$$

La force q appliquée en H_1 agit comme si elle était appliquée au point K du levier supérieur; nous n'avons donc plus à nous en occuper. Il reste maintenant les deux forces q' et q'' ; l'une d'elles q', appliquée en E_1 peut se, décomposer en deux autres, dont la première appliquée en T sera détruite par la résistance de l'axe $F_1F'_1$ et dont la deuxième appliquée en G_1 aura pour expression :

$$q' \times \frac{E_1T}{TG_1}$$

Si nous remarquons que, dans le triangle G_1FT, la droite EE_1 est parallèle à la base, la valeur de cette composante pourra s'écrire :

$$q' \times \frac{FE}{FG_1}$$

Mais cette force peut être considérée comme appliquée au point L, extrémité supérieure de la tringle GL, et elle peut être remplacée par une autre force agissant en K, pourvu qu'elle ait même moment par rapport à l'axe M (164 Remarque 1). Cette force aura pour valeur :

$$q' \times \frac{FE}{FG_1} \times \frac{LM}{MK}$$

Mais nous avons trouvé :

$$\frac{FE}{FG} \times \frac{ML}{MK} = 1$$

donc cette composante se réduit à sa valeur primitive q'.

On démontrerait de la même manière que la composante q'' du poids du corps, agissant en E'_1, produit le même effet que si elle était appliquée au point K. Celui-ci se trouve donc sollicité par trois forces verticales q, q' et q'' se composant en une seule qui est égale au poids Q du corps.

181. Conditions d'équilibre. — Un corps Q étant équilibré par un poids P dans le plateau, on doit avoir :

$$Q \times MK = P \times MN$$

d'où

$$Q = P \times \frac{MN}{MK}$$

Le poids cherché est donc égal au poids P multiplié par le rapport

$\frac{MN}{MK}$. Ordinairement on prend ce rapport égal à 10; s'il s'agit de peser des corps très-lourds, on le fait égal à 100.

Lorsque la balance-bascule ne fonctionne pas, le fléau LN doit se maintenir dans une position horizontale, position indiquée par deux index *b* et *c*, dont l'un *b* est fixe, et l'autre *c*, mobile, qui doivent se placer en regard. Comme cette condition n'est pas toujours satisfaite, on y supplée en plaçant dans une petite cuvette *a* un nombre de poids suffisants que l'on appelle *la tare*.

Pour obtenir le poids d'un corps, il faut d'abord le placer sur le tablier AB, puis disposer sur le plateau P les poids nécessaires pour obtenir l'équilibre, ce qui est indiqué par les index *b* et *c* : il suffit alors de multiplier par 10 les poids disposés en P pour avoir celui du corps.

Quand l'appareil est au repos, afin que les couteaux ne s'émoussent pas, on soulève le fléau au moyen d'une poignée Z fixée près du point de suspension du plateau P, et le tablier vient reposer sur les bords d'une caisse qui renferme la partie inférieure de la balance.

182. Bascule-romaine de M. Béranger. — Cette balance, due

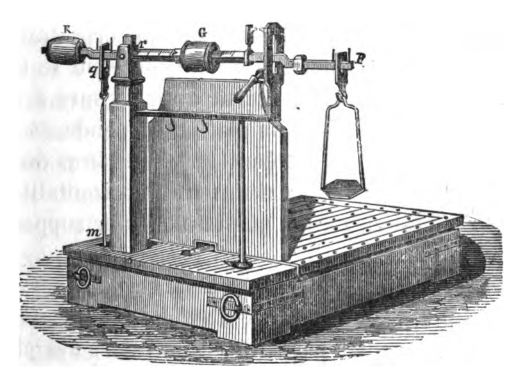


Fig. 126.

à M. Béranger, de Lyon, offre, quant à la disposition des leviers une combinaison analogue à celle de l'appareil précédent; la vue d'ensemble (*fig.* 126) rappelle celle de la bascule de Quintenz; mais elle a sur cette dernière les avantages suivants : 1° de n'exi-

ger aucun poids marqué pour toutes les pesées qui n'excèdent pas 100 kilogrammes ; 2° d'occuper moins de place par la direction du fléau de la romaine, qui est perpendiculaire à la longueur du tablier. Aussi est-elle employée dans toutes les gares des chemins de fer, pour le pesage des colis des voyageurs, et dans le commerce, où elle remplace la balance de Quintenz.

La figure 127 indique la disposition des leviers inférieurs ; le tablier repose, par quatre couteaux *a*, *b*, *c*, *d*, sur deux leviers bifurqués AEC, BED mobiles autour des axes AC et BD ; ces leviers sont rendus solidaires en E, par une bride reliant leurs sommets. La barre E*m*, formant le prolongement du levier BED, a une direction oblique, de façon à ramener le point *m* à l'un des angles de l'appareil. La romaine peut ainsi se placer comme nous l'avons dit plus haut.

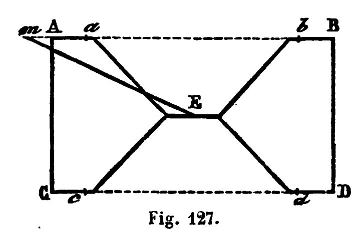


Fig. 127.

Le grand bras du fléau *pr*, qui est gradué, porte des divisions depuis 1 jusqu'à 100 ; un poids curseur G, pouvant se déplacer longitudinalement, est amené facilement en un point quelconque de la graduation, pour établir l'équilibre lorsqu'un corps dont le poids n'est pas supérieur à 100 kilogrammes est placé sur le tablier. Si ce poids est plus considérable, il faut avoir recours à des poids marqués, que l'on dispose dans un plateau suspendu en *p*, par un couteau en acier trempé, à l'extrémité du grand bras du fléau.

Un contre-poids mobile K doit maintenir l'horizontalité du fléau lorsque le curseur est au zéro et que le tablier ne supporte aucun corps.

183. Balance de Roberval. — La balance de Roberval, dite à *plateaux supérieurs*, offre l'avantage d'avoir des plateaux soutenus à leur partie inférieure, et, par suite, débarrassés des chaînes de suspension existant dans les balances ordinaires, et qui gênent pour peser des corps assez volumineux.

Cette balance (*fig.* 128 et 129) se compose d'un parallélogramme articulé AA'BB' ; le fléau AB repose en son milieu sur un couteau O, dont l'arête inférieure est l'axe de rotation. Il porte à ses deux extrémités deux tiges verticales AA' et BB', articulées aux quatre

points A, A′, B, B′, et à la partie supérieure desquelles se trouvent deux plateaux servant, l'un à mettre les corps à peser, et l'autre

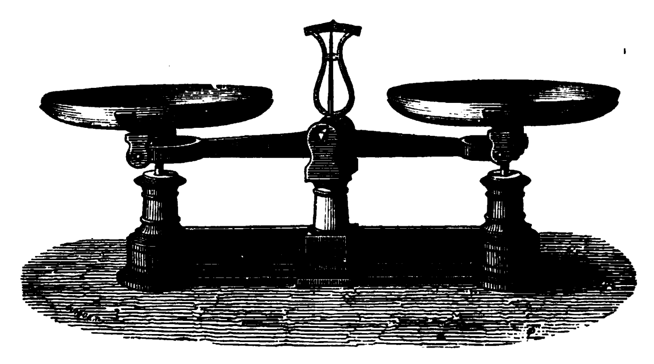


Fig. 128.

les poids marqués nécessaires pour obtenir l'horizontalité du fléau. Une autre barre A′B′ mobile autour du point O′, situé sur la même verticale que le point O, sert à maintenir les tiges AA′ et BB′ verticales, quelle que soit l'inclinaison du fléau.

La balance de Roberval est fondée sur ce principe : quelle que soit la position d'un corps dans l'un des plateaux, son poids agit comme s'il était appliqué directement au point de suspension de ce plateau. En effet, soient M (*fig.* 129) la position d'un corps de poids Q sur le plateau ayant BB′ pour axe de suspension, et MC une longueur représentant ce poids Q. Joignons MB et MB′; la force Q peut se décomposer en deux autres, l'une suivant ME et l'autre suivant MD, et les points d'application de ces forces peuvent, sans changer l'état d'équilibre, être transportés, l'un en B et l'autre en B′.

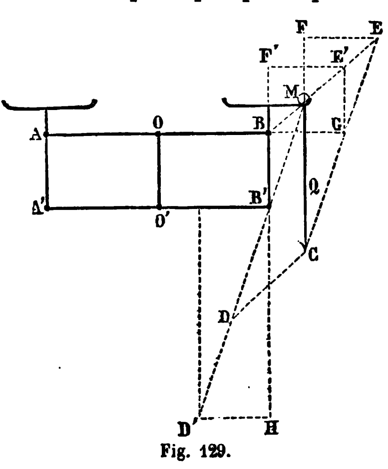


Fig. 129.

Considérons chacune de ces composantes comme une résultante,

et décomposons BE′ en deux forces, l'une BG parallèle à AB, et qui se trouve détruite par la résistance du point O, et l'autre BF′, verticale agissant sur BB′; décomposons de même B′D′ en deux autres forces, l'une dirigée suivant B′O′ et qui se trouve détruite par la résistance du point O′, et l'autre B′ H, agissant également sur BB′. Or, les deux forces verticales BF′ et B′H, dirigées en sens contraire, ont une résultante unique égale à leur différence, et cette résultante est précisément égale au poids du corps. En effet, menons EF parallèle à AB; les triangles B′D′H et CFE étant égaux comme rectangles et ayant l'hypoténuse égale et un angle égal, donnent:

$$B'H = CF$$

De même, les triangles BF′E′ et MFE étant égaux, donnent:

$$BF' = MF$$

On tire de là, $B'H - BF' = CF - MF = MC = Q$

184. Balance de Roberval modifiée. — Les balances de Roberval, dont nous venons de parler, sont très-peu sensibles, en raison des frottements développés aux nombreuses articulations; en outre, il résulte de l'expérience que la position des corps sur les plateaux n'est pas indifférente; un objet auquel on fait occuper diverses positions dans les bassins fournit, pour son poids, des valeurs qui ne diffèrent pas entre elles d'une manière sensible, mais qui prouvent le peu de précision de l'appareil. Ces balances, modifiées par M. Béranger, sont presque exclusivement employées dans le commerce pour les pesées ordinaires.

La balance de Roberval modifiée est représentée en projection verticale et en projection horizontale sans les plateaux, par la figure 130; elle est une combinaison de l'ancienne balance Roberval et de la bascule de Quintenz. Tout étant symétrique par rapport à l'axe de suspension, nous décrirons seulement la partie située à gauche de cet axe.

Les corps à peser se placent dans un plateau horizontal C, supporté par une tige verticale T, soudée au milieu d'une traverse $d_1d'_1$, qui relie les deux branches d'une fourche horizontale EF. Les extrémités des deux branches de cette fourche sont maintenues par deux lames EB, dont la partie inférieure est fixée sur la

fourche et dont la partie supérieure, terminée par un crochet, est suspendue à chacune des extrémités de deux lames parallèles BB, formant les fléaux ; le sommet A′ de la fourche est relié par la

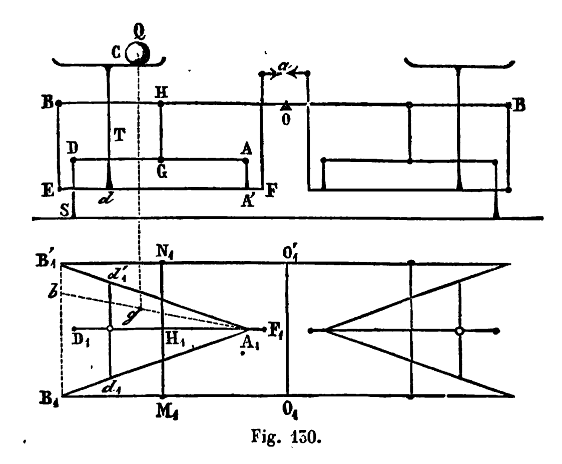


Fig. 130.

tringle AA′ au levier AD, appelé *levier de transmission*. Ce levier est lui-même suspendu par la tringle GH au milieu H d'une tige MN reliant les deux fléaux, et son extrémité D reçoit la bride DS, fixée au plan de la boîte qui renferme l'appareil ; cette boîte donne passage aux tiges T et aux aiguilles *a*, servant à indiquer l'horizontalité des fléaux qui reposent par leurs milieux sur les couteaux O.

Cette balance satisfait aux mêmes conditions que la bascule de Quintenz :

1° Les plateaux se meuvent parallèlement à eux-mêmes dans le sens vertical, sous l'influence d'un poids Q.

2° La position d'un corps sur l'un des plateaux est indifférente, c'est-à-dire qu'un même poids lui fait toujours équilibre.

Il serait facile de vérifier, comme pour la bascule de Quintenz, que la première condition sera remplie lorsqu'on aura :

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{DA}}$$

Sous l'influence d'un poids Q placé dans le plateau C, les fléaux, ou le parallélogramme $B_1O_1O'_1B'_1$, oscilleront autour de l'axe

$O_1O'_1$, les déplacements E et F de la fourche seront égaux, et, par suite, cette fourche restera constamment horizontale, ainsi que le plateau C qu'elle supporte.

La deuxième condition est également satisfaite. En effet, soient Q la position d'un corps sur le plateau, et g le point où la verticale, passant par son centre de gravité, perce le plan de la fourche EF ; le poids Q, appliqué en g, peut se décomposer en deux forces, l'une q'' appliquée en A_1, et l'autre appliquée en b ; cette dernière, à son tour, peut se décomposer en deux autres q et q' appliquées aux extrémités E des deux branches de la fourche. Les trois composantes étant parallèles et de même sens, on aura :

$$q + q' + q'' = Q$$

Les points d'application des forces q et q' peuvent être transportés à la partie supérieure des tringles EB, et elles agissent ainsi aux extrémités B'_1, et B_1 des fléaux. La force q'' peut être appliquée en A, et là elle se décompose en deux autres forces parallèles et de sens contraire, dont l'une, appliquée en D, sera détruite par la résistance de ce point, et dont l'autre, appliquée en G, aura pour valeur :

$$q'' \times \frac{AD}{DG}$$

Mais le point d'application de cette force peut être transporté en H, point d'articulation de la bride GH avec la tringle reliant les deux fléaux, et elle peut ainsi se décomposer en deux composantes égales chacune à

$$\frac{q''}{2} \times \frac{AD}{DG}$$

appliquées aux points M_1 et N_1. Chacune de ces composantes produit sur les fléaux le même effet qu'une force verticale ayant pour valeur :

$$\frac{q''}{2} \times \frac{AD}{DG} \times \frac{OH}{OB}$$

et dont les points d'application seraient aux extrémités B de ces fléaux. Mais nous avons pour la réalisation de la première condition :

$$\frac{OH}{OB} = \frac{DG}{AD} \text{ et par suite } \frac{AD}{DG} \times \frac{OH}{OB} = 1$$

Donc les deux composantes appliquées aux points B se réduisent à $\frac{q''}{2}$ ou à leur valeur primitive. En résumé, l'extrémité B de l'un des fléaux est soumise à une force $q+\frac{q''}{2}$, et l'extrémité du fléau parallèle à une force $q'+\frac{q''}{2}$. Or la somme $\left(q+\frac{q''}{2}\right)+\left(q'+\frac{q''}{2}\right)$ de ces deux forces représente le poids total Q, et comme chacun de ces groupes agit à l'extrémité de bras de levier égaux à OB, la somme de leurs moments est rigoureusement égale au moment du poids total.

La position du corps sur le plateau n'influe donc en rien sur son poids, car celui-ci agit comme s'il était suspendu directement à l'extrémité A du fléau. Les mêmes considérations s'appliqueraient aux poids marqués que l'on placerait dans l'autre plateau pour obtenir l'horizontalité du fléau.

185. Poulie. — La *poulie* est un disque circulaire, en bois ou en métal, pouvant tourner librement autour d'un axe, passant par son centre et mené perpendiculairement à son plan. Cette mobilité de la poulie peut s'obtenir de deux manières : 1° l'axe fait corps avec la poulie et repose par ses deux extrémités, appelées *tourillons*, sur deux coussinets fixes ou sur les branches d'une chape; 2° l'axe est fixé à la chape et la poulie est percée d'un trou cylindrique, appelé *œil*, d'un diamètre légèrement plus fort que celui de l'axe, de telle sorte que la poulie est complétement indépendante de cet axe. La chape se compose d'une pièce en fer dont les deux branches, appelées *joues*, embrassent la poulie; cette chape se termine à sa partie supérieure par un crochet ou par une vis et un écrou. Sur le contour de la poulie est pratiquée une rainure, appelée *gorge*, qui reçoit une corde aux extrémités de laquelle agissent la puissance et la résistance.

186. Poulie fixe. — La poulie est dite *fixe* lorsque le crochet ou la vis qui termine la chape est assujetti à un point invariable (*fig.* 131).

187. Conditions d'équilibre. Soient O le centre de la poulie (*fig.* 132), ADB l'arc embrassé par la corde, OA et OB les rayons aboutissant aux extrémités de cet arc, P et Q la puissance et la résistance.

La corde ne pouvant pas glisser en vertu de la mobilité de la poulie, les deux forces P et Q peuvent être considérées comme étant

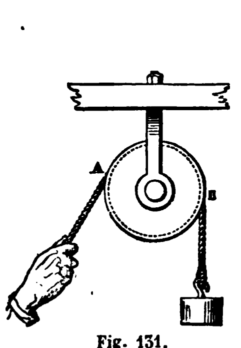


Fig. 131.

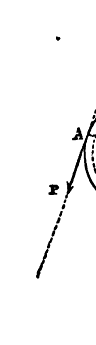


Fig. 132.

appliquées aux points de tangence A et B de la corde avec la poulie; mais la corde n'étant pas infiniment mince et ces forces agissant suivant son axe, il s'ensuit que la puissance et la résistance ne sont réellement appliquées qu'à une distance de l'axe O égale au rayon intérieur de la gorge augmenté du rayon de la corde; c'est à cette distance que l'on convient généralement de donner le nom de *rayon* de la poulie.

Les forces P et Q, étant ainsi appliquées aux points A et B de la poulie, la machine peut être considérée comme un véritable levier coudé AOB mobile autour du point O. Cette particularité qui ramène aussi simplement l'équilibre de la poulie à celui du levier, fait que l'on considère la poulie comme étant un corps possédant un point fixe, quoique en réalité elle tourne autour d'un axe fixe de faible dimension.

Pour l'équilibre, la somme des moments par rapport au point O doit être nulle et l'on aura :

$$P \times OA - Q \times OB = 0$$

Les perpendiculaires OA et OB étant égales comme rayon d'un même cercle, il vient

$$P = Q$$

c'est-à-dire que *la puissance est égale à la résistance* et les deux

brins de la corde sont également tendus, ce qui était facile à prévoir, car autrement la corde glisserait sur la gorge du côté de la plus forte tension.

La poulie fixe n'a donc pour but que de modifier la direction de la force motrice, c'est-à-dire de changer le sens du mouvement.

188. Pression supportée par l'axe de la poulie. — *La pression supportée par l'axe d'une poulie fixe est à la puissance ou à la résistance, comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.*

En effet, prolongeons les forces P et Q jusqu'à leur point de rencontre C où nous pouvons les supposer appliquées; si nous construisons le parallélogramme des forces, la diagonale CD, qui est leur résultante, dirigée suivant la bissectrice de l'angle des deux forces, représentera la pression sur l'axe. Joignons A et B; les triangles CED et AOB étant semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires, donnent :

$$\frac{CD}{CE}=\frac{AB}{AO} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{P}=\frac{AB}{r}.$$

Si les deux brins sont parallèles, la sous-tendante $=2r$ et par suite $R=2P$.

Si les deux brins forment entre eux un angle de 60°, $AB=r$ et par suite $R=P$.

189. Poulie mobile.— Dans la poulie *mobile* (*fig.* 133) le poids à soulever est suspendu au crochet A qui termine la chape; la poulie repose sur la corde qui est fixée d'une part à un point fixe F et de l'autre, elle passe sur une poulie de renvoi, puis elle est sollicitée par la puissance. Quelquefois, cette puissance agit directement sans l'intermédiaire de la poulie B.

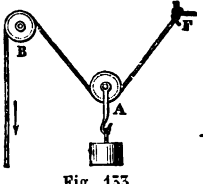


Fig. 133.

Conditions d'équilibre. — Lorsqu'une poulie mobile est en équilibre, *la puissance est à la résistance, comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassée par la corde.* Soient O (*fig.* 134) le centre de la poulie, AB l'arc embrassé par la corde, C le point fixe de celle-ci, P la puissance et Q la résistance. Cette poulie est soumise à l'action de trois forces : 1° la puissance P;

2° la résistance Q, et 3° la réaction du point fixe. Cette réaction, déterminée par la tension de la corde, peut être remplacée par une force égale F agissant de B en C, et dans ce cas, on peut considérer le système comme entièrement libre et supprimer le point fixe.

Pour que l'équilibre existe, les trois forces P, Q et F doivent concourir en un même point D, et la résultante des forces P et F doit être égale et directement opposée à la force Q.

Prenant les moments des forces par rapport au point O, le moment de la force Q est nul puisque sa direction passe par le centre des moments, et il reste :

$$P \times AO = F \times BO$$

$$\text{Mais } AO = OB, \text{ donc } P = F$$

c'est-à-dire que les tensions de la corde sont égales, et par suite la

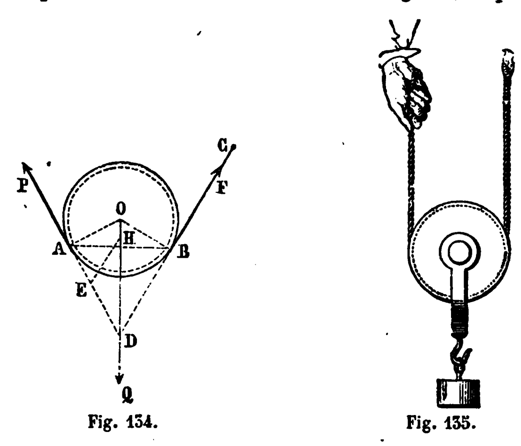


Fig. 134. Fig. 135.

droite OD est la bissectrice de l'angle ADB. A partir du point D, portons sur la verticale du point O, une longueur DH représentant l'intensité de la résistance Q, et par le point H menons EH parallèle à BD, jusqu'à sa rencontre en E avec la corde AD; la longueur ED représentera l'intensité de la force P.

Les triangles HED et AOB étant semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires donnent :

$$\frac{EH}{HD} = \frac{AO}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{r}{AB}$$

Si les brins sont parallèles (*fig.* 135), et c'est du reste la disposition ordinaire dans la pratique, la sous-tendante $AB = 2r$ et $P = \frac{Q}{2}$, c'est-à-dire que la puissance nécessaire pour soulever un fardeau, est égale à la moitié du poids de ce fardeau.

Si les deux brins forment entre eux un angle de 60°, $AB = r$ et $P = Q$; le rapport entre la puissance et la résistance est, dans ce cas, le même que dans la poulie fixe.

Si cet angle venait à augmenter, la puissance à développer devrait être plus grande que la résistance à vaincre, et elle deviendrait infinie si les deux brins étaient dans le prolongement l'un de l'autre et que la corde fût complétement inextensible.

190. Moufle. — On appelle *moufle* un appareil formé par la réunion de plusieurs poulies disposées dans une même chape; ces poulies, ayant même diamètre, sont ordinairement montées sur un même axe autour duquel elles peuvent tourner indépendamment les unes des autres.

Quelquefois, les poulies sont inégales et montées sur des axes différents, parallèles entre eux et réunies dans une même chape. La moufle prend alors le nom de *mouflette*.

La première disposition est la plus employée, car elle est moins encombrante que cette dernière, et elle est d'un maniement plus facile.

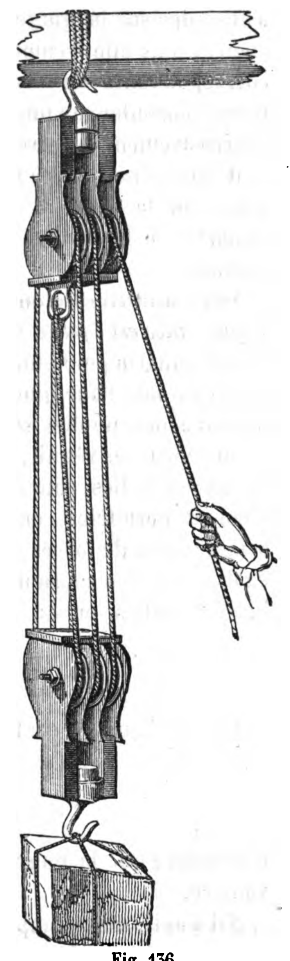


Fig. 136.

191. Palan. — Le *palan* est formé par l'ensemble de deux moufles contenant un même nombre de poulies (*fig.* 136). Le crochet de la moufle supérieure est maintenu solidement soit

par un autre crochet placé dans un corps fixe, soit au moyen de cordes qui viennent embrasser ce crochet ; la moufle inférieure est mobile et supporte le corps à monter ou à descendre. Une corde fixée à un anneau adapté à la moufle supérieure vient s'enrouler sur la gorge de la première poulie de la moufle inférieure ; puis elle remonte pour passer dans la gorge de la poulie correspondante de la moufle supérieure ; elle redescend ensuite pour s'enrouler sur une autre poulie, et ainsi de suite en passant successivement des poulies mobiles aux poulies fixes. La puissance agit dans une direction quelconque à l'extrémité de la corde qui passe sur la dernière poulie fixe ; ce brin s'appelle le *garant* et la partie de la corde allant d'une poulie à une autre s'appelle le *courant*.

192. Conditions d'équilibre. — Lorsqu'un palan est en équilibre, *la puissance est égale à la résistance divisée par le nombre des poulies*. Soient Q le poids du fardeau à soulever et P la puissance agissant sur le garant. Pour que l'équilibre existe, il faut évidemment que chacune des poulies soit elle-même en équilibre, et puisqu'une même corde les réunit, la tension des courants est partout la même et égale à P. Ces courants pouvant être considérés comme sensiblement parallèles, on peut dire que le poids Q est en équilibre sous l'action de forces égales et parallèles à P dont le nombre est égal à celui des courants ou des poulies. Si n représente ce nombre de poulies, on a :

$$Pn = Q \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Q}{n}$$

Dans la figure ci-contre $n = 6$, donc :

$$P = \frac{1}{6} Q$$

c'est-à-dire que la puissance à exercer sera le $\frac{1}{6}$ de la résistance à vaincre.

S'il s'agit, par exemple, d'élever un poids de 120 kilogrammes au moyen d'un palan équipé comme celui-ci, la puissance qui doit agir à l'extrémité du garant pour faire équilibre à la résistance sera $\frac{120}{6}$ ou 20 kilogrammes.

Si les moufles renfermaient chacune 4 poulies, la puissance ne devrait plus être que de $\frac{120}{8}$ ou 15 kilogrammes.

En combinant un certain nombre de palans, on peut, avec un effort relativement faible, faire équilibre à un poids très-considérable.

193. Palan différentiel. — Le *palan différentiel* est une heureuse modification du palan ordinaire, qu'il remplace avec avantage dans beaucoup de circonstances et principalement lorsqu'on dispose d'une faible puissance.

Cet appareil (*fig.* 137) se compose : 1° d'une moufle fixe renfermant deux poulies de différents diamètres montées sur un même axe; 2° d'une poulie mobile dont le crochet supporte la résistance à vaincre et 3° d'une chaîne sans fin qui réunit ces deux organes. Les deux poulies de la moufle supérieure sont solidaires l'une de l'autre, et la chaîne est disposée de la manière suivante : à partir du point B, elle embrasse la gorge de la poulie BB′, puis elle passe sous la poulie mobile qu'elle supporte, et ensuite elle revient s'enrouler sur la poulie AA′; les deux brins libres se réunissent pour former une chaîne sans fin sur laquelle on agit. En tirant le brin BP′ on fera monter le fardeau, et le contraire arrivera lorsqu'on agira sur le brin A′E.

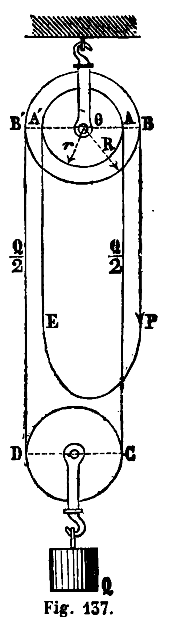


Fig. 137.

194. Conditions d'équilibre. — Lorsqu'un palan différentiel est en équilibre sous l'action d'une puissance P et d'une résistance Q, *la puissance est égale à la résistance multipliée par une fraction qui a pour numérateur la différence des rayons des poulies de la moufle supérieure, et pour dénominateur le double du plus grand rayon.*

Supposons que la chaîne ne puisse pas glisser sur la surface des poulies ; soient P la puissance qui agit dans le sens indiqué par la flèche et Q la résistance appliquée au crochet de la poulie mobile. Pour l'équilibre de cette poulie, les tensions des brins AC et B′D doivent être égales, et comme ces directions sont sensible-

ment parallèles, chacune des tensions est égale à la moitié de la résistance Q, c'est-à-dire à $\frac{Q}{2}$. Le brin A'E n'étant soumis à aucune tension et son poids étant supposé nul, on aura pour la relation d'équilibre :

$$P \times R + \frac{Q}{2} \times r = \frac{Q}{2} \times R$$

d'où l'on tire
$$P = Q\left(\frac{R - r}{2R}\right)$$

Remarque. — Afin d'éviter le glissement de la chaîne sur les poulies supérieures, et par suite la descente du fardeau, puisque les tensions sont inégales pour chacun des deux brins libres, on a disposé, sur les rainures ou gorges qui ont été pratiquées sur leur circonférence, des saillies analogues aux dents d'engrenages. Les anneaux de la chaîne venant s'engager dans ces saillies, tout glissement est rendu impossible.

La charge Q reste suspendue à une hauteur quelconque, car, dans cette machine, la somme des moments des résistances passives l'emporte sur le moment de la charge, ce qui empêche la rotation des poulies supérieures lorsque les brins BP et A'E ne sont soumis à aucune force.

§ 2. — SYSTÈME TOUR

195. Treuil. — Le *treuil* est une machine simple servant pour l'élévation des fardeaux. Il se compose essentiellement d'un cylin-

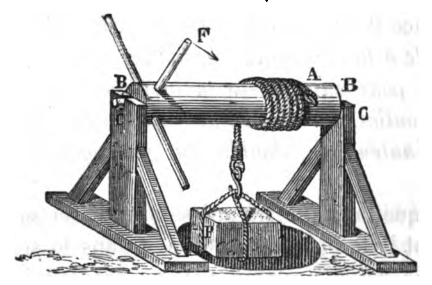


Fig. 138.

dre A (*fig.* 138) ordinairement en bois et d'une assez faible sec-

tion par rapport à sa longueur. Ce cylindre, appelé ***tambour***, est terminé à ses deux extrémités par deux autres cylindres en fer BB, d'un diamètre plus petit, nommés ***tourillons***, et qui reposent sur deux pièces concaves appelées ***coussinets***, faisant partie de deux supports C reposant sur le sol. Le tambour ne peut donc prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe, mouvement que l'on utilise pour élever des fardeaux. A cet effet, le corps est suspendu à l'extrémité d'une corde, qui, après s'être enroulée plusieurs fois sur la surface du cylindre A, vient se fixer, par son autre extrémité, en un point de sa longueur. La puissance agit par l'intermédiaire de divers organes qui constituent les différentes variétés du treuil ; dans cette figure, la puissance est appliquée à l'extrémité de leviers F qui s'engagent dans des trous pratiqués sur le tambour même, et c'est en agissant sur ces leviers que l'on produit le mouvement de rotation du treuil et par suite l'enroulement de la corde et l'élévation du poids P.

196. Conditions d'équilibre. — Lorsqu'un treuil est en équilibre, *la puissance est à la résistance comme le rayon du tambour est au rayon de la circonférence décrite par le point d'application de la puissance*, c'est-à-dire en raison inverse des bras de levier.

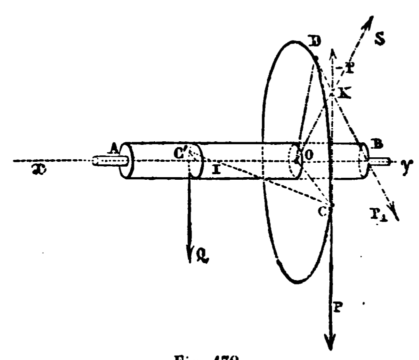


Fig. 139.

Considérons, en premier lieu, le cas où la puissance P et la résistance Q sont verticales. Soient xy (*fig.* 139) l'axe du treuil, C et C' les points d'application des forces P et Q ; si nous joignons ces points C et C' aux points O et O' centres des circonférences obtenues en menant par C et C' des plans perpendiculaires à l'axe, les

rayons O'C et OC' ainsi tracés seront horizontaux et par suite dans un même plan avec l'axe. La droite CC', qui joint les points d'application, rencontre l'axe xy en un point I, et pour l'équilibre, la résultante des forces P et Q doit être appliquée en ce point. On a donc :

$$\frac{P}{Q}=\frac{IC'}{IC} \qquad (1)$$

Les triangles semblables OIC et O'C'I donnent :

$$\frac{IC'}{IC}=\frac{O'C'}{OC}$$

D'où, en substituant dans la relation précédente, on tire :

$$\frac{P}{Q}=\frac{O'C'}{OC}=\frac{r}{R}$$

C'est-à-dire que les forces P et Q sont inversement proportionnelles à leurs bras de leviers.

Considérons maintenant le cas où la puissance a une direction quelconque, P_1 par exemple, et cherchons les conditions d'équilibre. Soit D le point d'application de la force P_1. Appliquons à l'extrémité C du rayon horizontal OC, deux forces égales P et —P, de sens contraire et ayant P_1 pour valeur commune. Or la force P_1, appliquée en D, et la force —P, appliquée en C, se rencontrent en un point K, où l'on peut les considérer comme appliquées et ensuite les composer en une résultante KS rencontrant l'axe xy en O puisque ces forces sont égales ; cette résultante sera détruite par la résistance de l'axe. Nous sommes donc ramenés au cas précédent, car le treuil n'est plus sollicité que par les forces P et Q appliquées en C et C' ; on aura donc la même relation d'équilibre :

$$\frac{P}{Q}=\frac{r}{R}$$

197. Pressions sur les tourillons. — Lorsque la puissance et la résistance agissent verticalement, il faut, pour obtenir la charge sur les tourillons, décomposer la résultante des deux forces P et Q appliquée en I en deux composantes parallèles appliquées aux points A et B.

Lorsque la puissance est dirigée suivant P_1, il faut, pour obtenir

la charge sur les tourillons : 1° décomposer la force P + Q appliquée en I en deux composantes parallèles appliquées aux points A et B; 2° décomposer la force S appliquée en O en deux composante parallèles appliquées aux mêmes points A et B, et 3° déterminer la résultante entre les deux forces qui agissent sur chaque tourillon.

La décomposition de la résultante P + Q donne, pour la première composante f appliquée en A :

$$f = (P + Q)\frac{IB}{AB}$$

et pour la deuxième composante f_1, appliquée en B :

$$f_1 = (P + Q)\frac{AI}{AB}$$

La décomposition de la force S donne, pour la première composante appliquée en A :

$$f' = S \times \frac{BO}{AB}$$

et pour la deuxième composante appliquée en B :

$$f'_1 = S \times \frac{AO}{AB}$$

Pour obtenir la charge sur les tourillons, il suffira de composer les forces f, f', et $f_1 f'_1$, d'après la règle du parallélogramme des forces, et on aura en grandeur et en direction la pression supportée par chacun d'eux.

Les pressions sur les tourillons peuvent s'obtenir d'une manière plus simple, en remarquant que les forces P et Q peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes aux points O et O′ de l'axe, sans que leur résultante P + Q cesse de passer par le point I. En effet, les triangles semblables O′C′I et OCI donnent :

$$\frac{IC'}{IC} = \frac{O'I}{OI}$$

En remplaçant dans l'équation (1) il vient :

$$\frac{P}{Q} = \frac{O'I}{OI}$$

ce qui prouve que le point I divise la droite OO′ en deux segments inversement proportionnels aux forces P et Q ; ce point est par suite le point d'application de la résultante des forces P et Q transportées parallèlement à elles-mêmes aux points O et O′.

Les pressions sur les tourillons sont donc fournies par les forces P et Q appliquées aux points O et O′ et par la force S appliquée en O. Mais il est facile de voir que si nous décomposons cette force S en ses composantes premières, les trois forces P, P_1 et — P, appliquées en O, se réduisent à la force primitive P_1, $=$P.

Donc, pour obtenir les pressions, il suffira de décomposer chacune des forces P_1 et Q en deux composantes parallèles appliquées aux points A et B ; les deux composantes appliquées en chacun de ces points se composeront en une seule qui représentera en grandeur et direction la pression sur le tourillon.

Remarque. — Nous n'avons pas tenu compte, dans tout ce qui précède, du poids Q′ du treuil, appliqué au centre de gravité situé sur l'axe xy ; ce poids, force verticale, vient produire une augmentation de pression que l'on détermine en décomposant Q′ en deux forces parallèles appliquées aux points A et B, s'ajoutant aux forces déjà connues.

198. Treuil des carriers. — Le *treuil des carriers*, ou *roue à chevilles*, est fréquemment employé pour extraire les pierres des carrières souterraines. Une roue de 4 à 6 mètres de diamètre (*fig.* 140), fixée sur le tambour, porte un grand nombre de chevilles implantées sur sa jante perpendiculairement à son plan ; un ou deux hommes montent sur ces chevilles comme sur des échelons et agissent par leur poids pour déterminer la rotation du tambour et par suite l'élévation des blocs de pierre suspendus à l'extrémité d'une corde s'enroulant sur ce cylindre.

Soit A (*fig.* 141) le point auquel le poids d'un homme fait équilibre au poids du corps à soulever ; l'équation des moments donne :

$$\frac{P}{Q}=\frac{OM}{ON}$$

Ce point A est pour l'ouvrier une position d'équilibre stable. En effet, supposons qu'il s'élève jusqu'en B par exemple ; la puissance agissant à l'extrémité d'un bras de levier plus grand, son

moment augmente, et comme celui de la résistance reste constant, l'équilibre sera rompu, la roue se mettra en mouvement dans le sens de la flèche *f* et ramènera l'ouvrier à sa position A. Si, au contraire, cet ouvrier descend jusqu'au point C, le moment de la

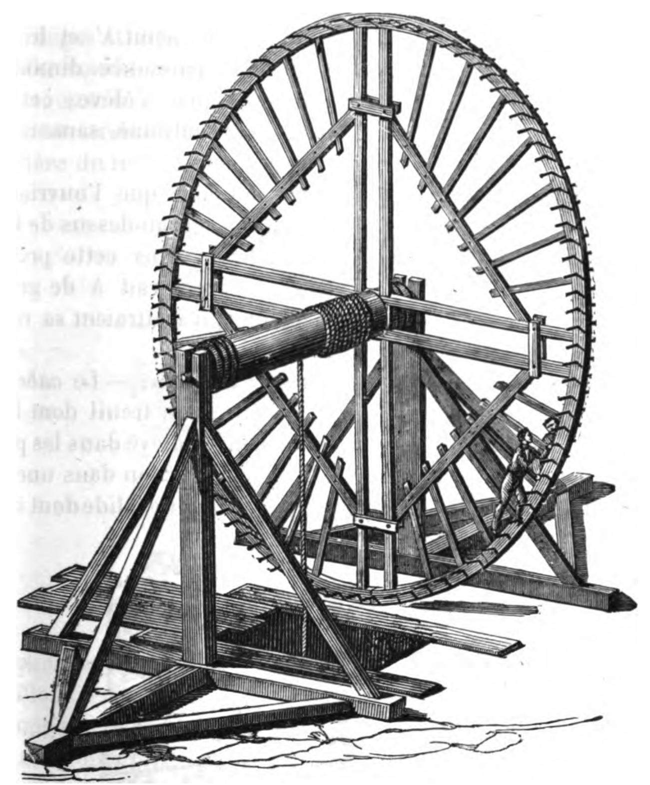


Fig. 140.

puissance diminuera et l'équilibre n'aura plus lieu ; la résistance l'emportera et fera mouvoir la roue dans le sens de la flèche *f'*, c'est-à-dire qu'elle ramènera encore l'ouvrier vers la position A. Cette position est donc stable pour l'ouvrier, et il y a complète sécurité. Mais il n'en serait plus de même si le point A se trouvait au-dessus de l'axe du tambour, en A' par exemple. Dans cette position, symétrique de la position A, l'équilibre existe évidemment,

mais cet équilibre est instable. En effet, supposons qu'une cause quelconque, le choc de la pierre contre les parois du puits, vienne instantanément augmenter la résistance Q ; l'ouvrier sera amené au-dessus du point A' et le moment de la puissance diminuant à mesure qu'il s'élève, cet ouvrier sera entraîné sans retour avec la roue.

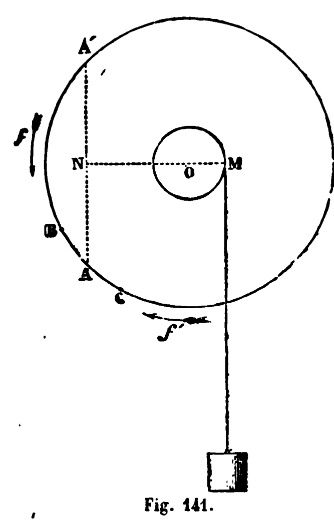
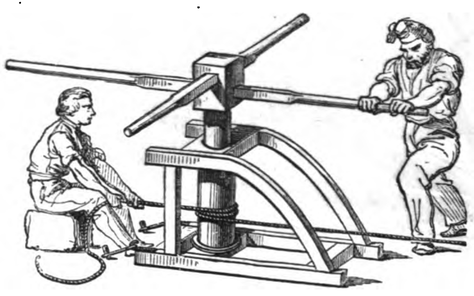


Fig. 141.

On voit donc que l'ouvrier ne doit jamais agir au-dessus de l'axe du tambour; sans cette précaution, il s'exposerait à de graves accidents qui mettraient sa vie en danger.

199. Cabestan. — Le *cabestan* (*fig.* 142) est un treuil dont l'axe est vertical. Cet appareil est principalement employé dans les ports de mer pour exercer de puissants efforts de traction dans une direction horizontale. Il se compose d'une charpente solide dont deux


Fig. 142.

traverses horizontales, percées de trous, servent de coussinets aux tourillons du tambour. Le tourillon supérieur se prolonge et se termine par une partie prismatique appelée *tête*, percée de trous dans lesquels s'emmanchent 4, 6 ou 8 leviers aux extrémités desquels agissent des hommes. La corde n'est pas fixée sur le tambour comme dans le treuil ; elle y fait seulement deux ou trois

tours et l'extrémité libre est maintenue par un manœuvre qui la tire au fur et à mesure que le cylindre tourne, afin d'empêcher tout glissement ; de cette façon, une même quantité de corde est toujours enroulée, ce qui permet de donner au tambour une assez faible hauteur. Tout le système est maintenu solidement par des cordages attachés à des points fixes.

Les conditions d'équilibre du treuil s'appliquent, sans modification, au cabestan.

200. Treuil différentiel. — Le *treuil différentiel* (*fig.* 143) diffère du treuil ordinaire en ce que le tambour est formé de deux

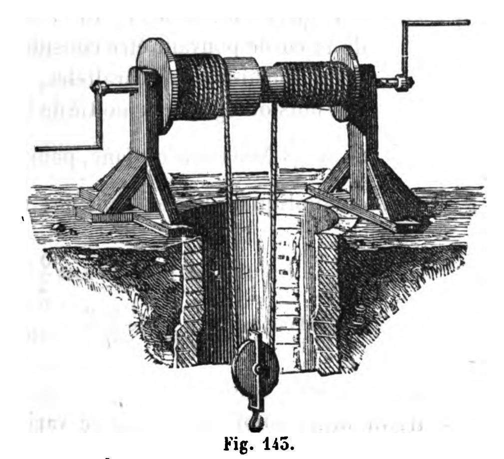


Fig. 143.

cylindres ayant même axe, mais de diamètres différents. Les tourillons reposent toujours sur des coussinets maintenus dans deux supports fixes s'appuyant sur le sol. L'extrémité d'une corde est fixée solidement sur le cylindre qui a le plus grand diamètre, et après y avoir fait quelques tours, elle s'en détache et passe sous la gorge d'une poulie mobile qu'elle supporte ; ensuite, elle remonte pour s'enrouler sur le cylindre de plus petit diamètre auquel se fixe l'autre extrémité. Cette corde est disposée de telle sorte que, s'enroulant sur le gros cylindre, elle se déroule sur le petit et réciproquement, suivant que le fardeau monte ou descend.

La puissance agit ordinairement à l'extrémité de deux manivelles placées en dehors des supports ; ces manivelles doivent être calées à 180°.

201. Conditions d'équilibre. — Lorsqu'un treuil différentiel est en équilibre, *la puissance est à la résistance comme la différence des rayons du tambour est au double du rayon de la manivelle.*

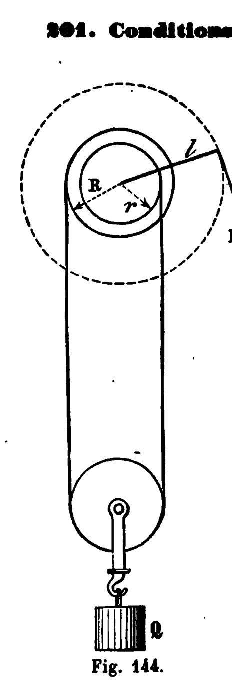


Fig. 144.

Soient P (*fig.* 144), la puissance agissant à l'extrémité d'une manivelle de longueur l, R et r les rayons des deux cylindres et Q la résistance appliquée à la chape de la poulie mobile.

D'après ce qui a été vu (189) les brins de la corde pouvant être considérés comme étant sensiblement parallèles, ont chacun une tension égale à la moitié de la résistance ou à $\frac{Q}{2}$. Nous aurons donc, pour l'équilibre, en appliquant le théorème des moments :

$$P \times l = \frac{Q}{2} \times R - \frac{Q}{2} \times r = \frac{Q}{2}(R - r)$$

d'où l'on tire : $$\frac{P}{Q} = \frac{R - r}{2l}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi, dans le treuil différentiel, la puissance varie en raison directe de la différence $R - r$; plus cette différence sera petite, et plus la puissance qui devra être appliquée aux extrémités des manivelles pour élever un même fardeau deviendra faible. On peut donc, sans difficulté, faire équilibre à une très-grande résistance en employant une puissance très-faible ; c'est là le grand avantage de cet appareil, dont l'invention est attribuée aux Chinois.

On pourrait arriver au même résultat avec un treuil ordinaire, en prenant des manivelles très-longues et des tambours de très-petit diamètre; mais dans la réalisation matérielle, le bras de levier de la puissance ne peut pas être trop grand, car la manœuvre deviendrait difficile; en outre, le rayon du treuil ne peut pas dépasser une certaine limite inférieure, car il ne pourrait plus supporter l'effort à vaincre avec toute la sécurité désirable. On voit donc l'avantage du treuil différentiel sur le treuil ordinaire,

car dans le premier de ces appareils on peut, sans aucune crainte, rendre la différence des rayons aussi petite qu'on le voudra.

202. Roues d'engrenage. — On désigne sous le nom d'*engrenages cylindriques* des cylindres portant, sur leur surface extérieure, des saillies également espacées, appelées *dents*, laissant entre elles des intervalles égaux à ces saillies et appelés *creux*.

Ces roues servent, dans les machines, à communiquer le mouvement d'un arbre à un autre arbre parallèle situé à peu de distance. Lorsque deux roues doivent engrener ensemble, les dents de l'une s'engagent dans les creux de l'autre et réciproquement; on rend impossible, par ce moyen, tout glissement de l'une des roues sur l'autre, et le mouvement est assuré.

Nous n'avons pas ici à entrer dans aucun détail sur la construction, ni sur les différentes sortes de roues d'engrenages que nous verrons en Cinématique; disons seulement que le mouvement se transmet de la même manière que si on avait calé sur les arbres deux disques pleins, tangents suivant une génératrice et assez fortement pressés l'un contre l'autre. Le glissement étant empêché, les arcs décrits par les deux roues, dans un même temps, sont de même longueur; il en résulte que si l'une des roues a un rayon deux fois, trois fois plus petit que l'autre, elle fera deux tours, trois tours, pendant que cette autre roue ne fera qu'un tour.

Les dents sont égales et également espacées sur les circonférences de contact des deux roues, de sorte que les nombres des dents sont proportionnels à ces circonférences, ou, ce qui revient au même, proportionnels à leurs rayons.

On donne souvent le nom de *pignon* à la plus petite des deux roues qui engrènent ensemble.

203. Conditions d'équilibre. — Soient D et C (*fig.* 145) une roue et un pignon qui engrènent ensemble; tangentiellement à l'arbre A de la roue D est appliquée une résistance Q, devant être vaincue par une puissance P, agissant à l'extrémité d'une manivelle B calée sur l'arbre du pignon C.

Désignons par R' et R les rayons de la roue D et de la manivelle B, par r et r' les rayons de l'arbre A et du pignon C. Sous l'action de la force qui tend à faire tourner le pignon de droite à gauche, la dent du pignon exerce sur la dent de la roue, suivant la génératrice de contact, une pression t dirigée suivant la

tangente commune aux deux circonférences de contact, pression qui peut être considérée comme la puissance relativement à la roue et au poids Q. Mais la dent de la roue réagit à son tour sur

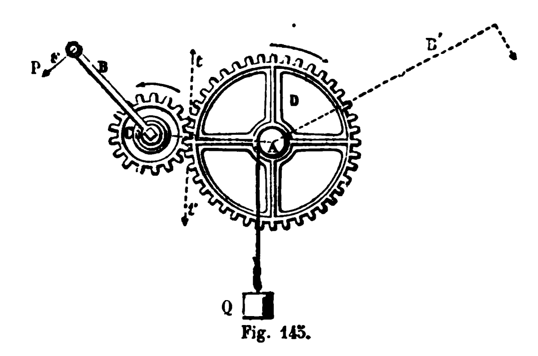


Fig. 145.

celle du pignon avec une force t' égale et directement opposée à la pression t, et c'est cette réaction t' que doit vaincre la puissance.

L'équilibre général du système exige évidemment que la roue et le pignon soient séparément en équilibre; nous aurons pour l'équilibre du pignon, d'après le principe des moments :

$$P \times R = t' \times r'$$

Nous aurons de même pour l'équilibre de la roue C :

$$t \times R' = Q \times r$$

Multipliant membre à membre, et supprimant les quantités égales t et t', il vient :

$$P \times R \times R' = Q \times r \times r'$$

d'où enfin :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r \times r'}{R \times R'}$$

Or les circonférences étant entre elles comme les nombres de dents, nous pouvons remplacer le rapport des rayons par celui du nombre de dents; si N représente le nombre de dents de la roue et n celui du pignon, la relation précédente devient :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{n}{N} .$$

Cette formule est plus employée que la précédente, car il est

toujours plus facile de compter le nombre de dents d'une roue que de prendre exactement son rayon.

204. Treuil à simple engrenage. — Le treuil à simple engrenage (*fig.* 146) est un appareil dont l'emploi est assez répandu

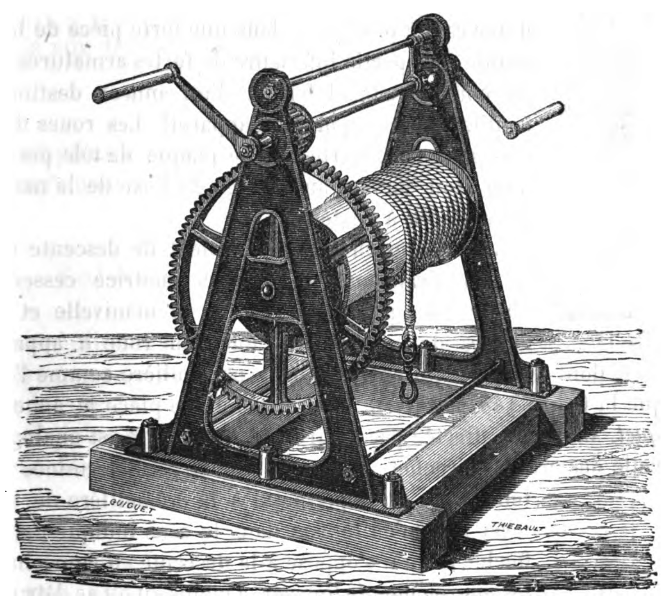
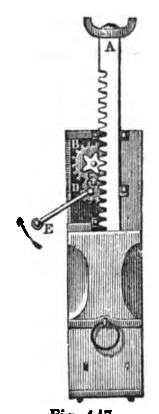


Fig. 146.

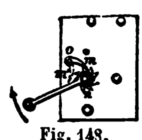
pour l'élévation des fardeaux ; c'est la réalisation matérielle de ce qui vient d'être exposé. Deux supports en fonte évidés, maintenus solidement sur un bâti au moyen de boulons, servent de coussinets aux arbres du pignon et de la roue. Le tambour, qui est d'une assez grande longueur et monté sur le même axe que la roue, reçoit l'extrémité d'une corde qui, après y avoir fait plusieurs tours, descend et supporte, par son autre extrémité munie d'un crochet en fer, le fardeau à soulever.

205. Cric. — Le *cric* est une machine dont l'emploi est très-fréquent pour soulever des fardeaux très-lourds à une faible hauteur. Il se compose (*fig.* 147) d'une crémaillère A qui engrène avec un pignon C ; sur l'arbre de celui-ci est calée une roue B recevant le mouvement d'un pignon D, sur l'arbre duquel est calée

une manivelle E. La partie supérieure de la crémaillère est terminée par une pièce recourbée à ses deux extrémités, et que l'on dispose sous le corps à déplacer. La partie inférieure de cette crémaillère, ainsi que le mécanisme des roues dentées, sont disposés à l'intérieur d'une cavité pratiquée dans une forte pièce de bois munie à sa partie inférieure de fortes armatures en fer pour la consolider, et d'un anneau destiné à faciliter le transport de l'appareil. Les roues dentées sont recouvertes d'une plaque de tôle percée d'un trou servant au passage de l'axe de la manivelle placée à l'extérieur.


Fig. 147.

Afin d'empêcher le mouvement de descente qui se produirait lorsque la force motrice cesserait d'agir, on a placé sur l'axe de la manivelle et en dehors de la plaque de tôle, une roue n appelée *rochet*, dont les dents qui ont une forme particulière comme l'indique la figure 148, reçoivent l'extrémité d'une pièce m appelée *cliquet*. La forme affectée par l'extrémité du cliquet est analogue à celle des creux du rochet, et sa position m est déterminée de telle sorte qu'il permette à la crémaillère de s'élever lorsqu'on tourne dans le sens indiqué par la flèche, et qu'il s'oppose à la descente en empêchant les engrenages de tourner, à moins qu'on ne détruise son action en le soulevant avec le doigt pour lui faire prendre la position m'. Il résulte de là que le fardeau peut être maintenu à une hauteur quelconque, sans craindre que la crémaillère ne rentre à l'intérieur du cric.


Fig. 148.

206. Conditions d'équilibre. — Soient Q la résistance appliquée au sommet de la crémaillère, et P la puissance qui agit tangentiellement à la circonférence de rayon R, décrite par l'extrémité de la manivelle. Désignons par r le rayon du pignon C qui engrène avec la crémaillère, par R' le rayon de la roue montée sur le même axe que le pignon, et, enfin, par r' le rayon du pignon calé sur l'arbre de la manivelle.

Tout le système étant en équilibre, il en est de même des parties qui le composent. Pour l'équilibre de la manivelle et du pignon r', nous aurons, d'après le principe des moments, en désignant

par t la réaction des dents de la roue B :

$$P \times R = t \times r'$$

Considérant l'équilibre de la roue B et du pignon C, nous aurons, d'après le même principe, en désignant par t' l'effort transmis aux dents de la roue B :

$$t' \times R' = Q \times r$$

Multipliant membre à membre et supprimant les quantités égales t et t', nous aurons :

$$P \times R \times R' = Q \times r \times r'$$

d'où l'on déduit : $$\frac{P}{Q} = \frac{r \times r'}{R \times R'}$$

c'est-à-dire que *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons de la manivelle et de la roue.*

Si N désigne le nombre de dents de la roue B, et n le nombre de dents du pignon r', nous aurons :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{n}{N} \quad \text{d'où} \quad P = Q \times \frac{r}{R} \times \frac{n}{N}$$

207. Chèvre. — On appelle *chèvre* un appareil servant dans les constructions, à l'élévation des matériaux et principalement des pièces de charpente; il est formé par la combinaison d'une poulie et d'un treuil.

La chèvre se compose (*fig.* 149) de deux montants obliques, appelés *hanches*, réunis par des traverses, nommées *épars*, s'appuyant par leur partie inférieure soit sur le sol, soit sur un plancher disposé à une certaine hauteur. A environ $1^m,30$ de la base d'appui, est placé un treuil manœuvré au moyen de leviers qui viennent s'emmancher dans des trous pratiqués dans chacune des extrémités du tambour. Une poulie P est disposée à la partie supérieure de l'appareil entre les deux montants.

Le fardeau est attaché à l'extrémité d'une corde qui, après avoir passé sur la gorge de la poulie P, descend et vient s'enrouler sur le tambour du treuil. On conçoit que si l'on imprime au

treuil un mouvement de rotation dans un certain sens, on produira l'élévation du fardeau placé à l'extrémité inférieure de la corde.

Fig. 149.

Afin de conserver à l'appareil la position indiquée par la figure, position qu'il doit avoir pour son fonctionnement, on le retient à l'aide d'un câble CD, appelé *hauban*, dont l'une des extrémités est fixée à la partie supérieure de la chèvre, et dont l'autre extrémité est solidement amarrée à un corps fixe.

208. Conditions d'équilibre. — Il faut remarquer que la poulie P n'influe en rien sur l'effort à développer pour vaincre la résistance, et la tension de la corde qui s'enroule sur le treuil, est juste égale au poids du fardeau Q qui doit être élevé par la puissance P agissant à l'extrémité d'un levier de longueur *l*.

En désignant par R le rayon du tambour du treuil, nous aurons pour la relation d'équilibre :

$$P \times l = Q \times R \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Q \times R}{l}$$

Au lieu de placer une simple poulie P, on pourrait disposer un palan, qui offrirait l'avantage, pour une même force, de vaincre une résistance beaucoup plus considérable. En effet, si n désigne le nombre de poulies du palan, $\frac{Q}{n}$ sera la tension de chaque garant, et la relation d'équilibre deviendra :

$$P = \frac{Q}{n} \times \frac{R}{l}$$

209. Tension du câble. — Proposons-nous de déterminer la tension du câble qui retient la chèvre dans une position inclinée. L'équilibre du système a lieu sous l'action : 1° de la résistance Q;

2° du poids total Q' de l'appareil agissant à son centre de gravité ; 3° de la tension T du câble, et 4° des réactions exercées par le sol.

Si nous prenons les moments de ces forces par rapport à la droite AB qui joint les pieds des deux montants, et si nous désignons par q la distance de cette droite à la direction verticale de la corde qui retient le fardeau, par q' celle de cette même droite à la verticale passant par le centre de gravité du poids total Q', et par l la distance du câble à l'axe AB, nous aurons, en remarquant que le moment des réactions est nul puisque l'axe des moments se confond avec AB :

$$T \times l = Q \times q + Q' \times q' \qquad (1)$$

d'où l'on déduit :

$$T = Q \times \frac{q}{l} + Q' \times \frac{q'}{l'}$$

Or, lorsque la chèvre est verticale, les moments de Q et de Q' sont nuls et le second membre de l'équation (1) se réduit à 0 ; on a donc :

$$T \times l = 0$$

et comme la distance l ne peut être nulle, il s'ensuit que $T = 0$. Ce résultat montre que, dans ce cas, la tension du câble est complétement nulle, et cette tension est d'autant plus considérable que l'appareil est plus incliné.

210. Grues. — Les *grues* sont des machines très-puissantes servant à l'élévation des fardeaux dont le poids est très-considérable, et à les déplacer dans le sens horizontal. Elles servent, dans les ports et dans les gares de chemin de fer, pour opérer le chargement ou le déchargement des bateaux et des wagons.

La grue représentée par la figure 150 se compose d'un arbre vertical en fonte PQ, reposant, à sa partie inférieure, par un pivot Q, sur une crapaudine placée au fond d'un puits pratiqué dans le sol pour recevoir la portion RQ. A peu près au niveau du sol cet arbre porte une partie cylindrique R d'un plus fort diamètre, autour de laquelle sont disposés de petits cylindres, appelés *galets*, afin d'atténuer, autant que possible, les frottements qui se développent dans le mouvement de rotation. A la partie supérieure de l'arbre RP, est adaptée une pièce oblique *bb'*, appelée *tirant*, et ces deux corps sont réunis entre eux par une pièce *aa'* égale-

ment oblique, appelée *volée*. Le tirant bb' est formé de deux pièces reliées à leurs extrémités, mais laissant entre elles un certain intervalle dans lequel est placée une poulie fixe z dont la gorge reçoit une corde venant se fixer en un point C. Cette corde, qui supporte

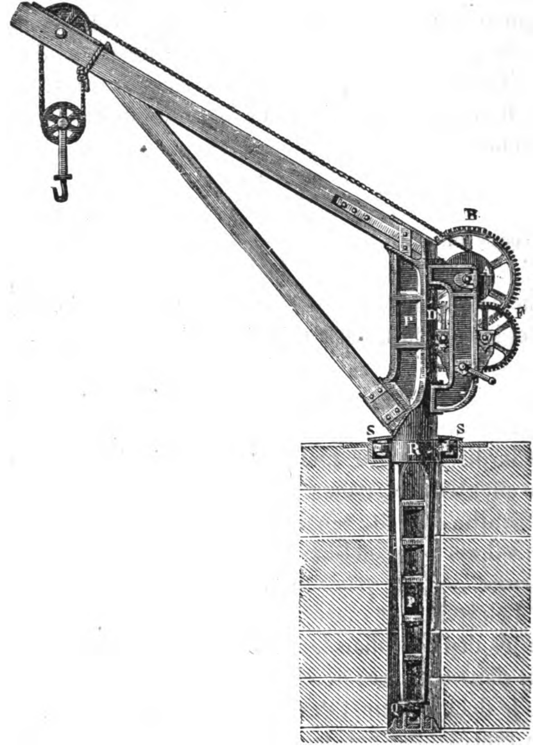


Fig. 150.

une poulie mobile z' au crochet de laquelle est attaché le corps à soulever, prend une direction parallèle au tirant et vient s'enrouler sur le tambour d'un treuil manœuvré au moyen de deux manivelles.

Lorsqu'on veut faire fonctionner cette grue, on fait d'abord descendre la poulie mobile afin d'y accrocher le fardeau à soulever, puis on fait tourner le treuil dans le sens convenable; la corde s'enroule sur le treuil, et, par suite, le fardeau s'élève.

Celui-ci étant arrivé à une certaine hauteur, on fait tourner la grue autour de l'arbre vertical PQ, jusqu'à ce qu'elle soit dans la position correspondant à l'endroit où l'on veut déposer le fardeau, qu'on laisse alors descendre lentement, en agissant sur les manivelles en sens contraire du mouvement.

Pour mieux faire comprendre la disposition du treuil, qu'il importe de bien connaître pour déterminer la relation d'équilibre, nous supposerons qu'on ait fait tourner la grue d'un angle de 90°, de sorte que le système des roues dentées se trouve projeté comme l'indique la figure 151. Sur l'axe du tambour A est montée une roue B engrenant avec un pignon C ; l'axe de ce pignon porte lui-même une autre roue dentée D, engrenant avec un pignon E, et, sur l'axe de ce pignon, est calée une roue dentée F, égale à D, et située au même niveau. Un peu au-dessous de ces roues se trouve un autre axe sur lequel sont calés deux pignons K et L, et à ses deux extrémités sont également calées deux manivelles G et H. Examinons quelle fonction remplissent ces deux pignons qui, dans la position indiquée, n'engrènent avec aucune roue. Si au moyen du levier M, mobile autour de l'axe N, on amène le pignon K pour engrener avec la roue D, les manivelles feront mouvoir le treuil par l'intermédiaire des roues D, B et des pignons C et K; si nous poussons maintenant le levier M en sens contraire, le pignon L viendra engrener avec la roue F, et les manivelles feront mouvoir le treuil par l'intermédiaire des roues F,D, B et des pignons L,E,C. Au moyen de la première disposition des pignons K et L, le mouvement d'ascension du fardeau est plus rapide que dans le second cas, pour une même puissance agissant sur les manivelles; on l'emploie lorsque le poids du fardeau n'est pas très-considérable.

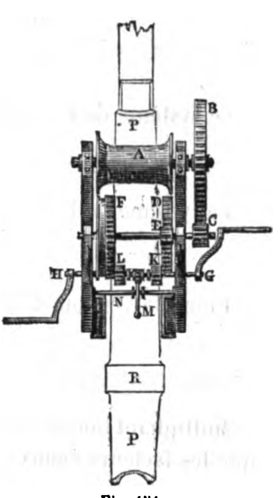


Fig. 151.

211. Conditions d'équilibre. — Soient r,r',r'',r''' (*fig.* 152) les rayons des différents pignons et du tambour du treuil, et

R,R′,R″, R‴ les rayons de la manivelle et des différentes roues.

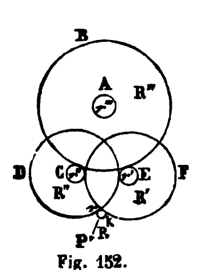


Fig. 152.

La grue étant supposée en équilibre sous l'action d'une puissance P et d'une résistance Q appliquée au crochet de la chape de la poulie mobile, la tension de la corde qui s'enroule sur le tambour du treuil est égale à la moitié de cette résistance ou à $\frac{Q}{2}$.

L'équilibre du système de la manivelle R et du pignon r donne :

$$P \times R = t \times r$$

Le système de la roue R′ et du pignon r' donne :

$$t \times R' = t' \times r'$$

Le système de la roue R″ et du pignon r'' donne :

$$t' \times R'' = t'' \times r''$$

Enfin, le système de la roue R‴ et du tambour du treuil donne :

$$t'' \times R''' = \frac{Q}{2} \times r'''$$

Multipliant toutes ces égalités membre à membre, et remarquant que les facteurs égaux t, t', t'' disparaissent, il reste :

$$P \times R \times R' \times R'' \times R''' = r \times r' \times r'' \times \frac{Q}{2} \times r'''$$

d'où l'on tire : $$P = \frac{Q}{2} \times \frac{r \times r' \times r'' \times r'''}{R \times R' \times R'' \times R'''}$$

Telle est la formule qui fait connaître la valeur de la puissance nécessaire pour vaincre la résistance Q. Les nombres des dents des pignons r, r', r'' étant n, n', n'' et les nombres des dents des roues R′,R″,R‴ étant N,N′,N″, l'équation précédente devient :

$$P = \frac{Q}{2} \times \frac{r'''}{R} \times \frac{n \times n' \times n''}{N \times N' \times N''}$$

Les données relatives aux inconnues étant les suivantes : Q = 51840 kilogrammes, les nombres N′,N,N″ étant respectivement

égaux à 54 ; 54 et 66 ; les nombres n, n', n'' étant respectivement égaux à 9 ; 9 et 11 ; le rayon de la manivelle $= 0^m,51$ et celui du tambour du treuil $0^m,17$, on demande l'effort à exercer à l'extrémité de chacune des manivelles.

En appliquant la formule précédente, nous aurons :

$$P = \frac{51840}{2} \times \frac{0,17 \times 9 \times 9 \times 11}{0,51 \times 66 \times 54 \times 54} = 40 \text{ kilog.}$$

Ainsi, l'effort à exercer à l'extrémité de chacune des manivelles doit être de $\frac{40}{2}$ ou 20 kilogrammes. En comparant la puissance à la résistance, on obtient le rapport :

$$\frac{40}{51840} = \frac{1}{1296}$$

c'est-à-dire que la puissance est $\frac{1}{1296}$ de la résistance.

Nous avons supposé, jusqu'ici, que le pignon L engrenait avec la roue F ; supposons maintenant que ce soit le pignon K qui engrène avec la roue D, et, dans les mêmes hypothèses, déterminons la résistance qui peut être vaincue, en admettant que la puissance soit égale à 40 kilogrammes.

De la formule générale on tire :

$$Q = 2P \times \frac{R \times N' \times N''}{r''' \times n \times n''}$$

ou

$$Q = 2 \times 40 \times \frac{0,51 \times 54 \times 66}{0,17 \times 9 \times 11} = 8640 \text{ kil.}$$

En comparant la puissance à la résistance, on obtient le rapport :

$$\frac{40}{8640} = \frac{1}{216}$$

Le rapport de la puissance à la résistance est de $\frac{1}{1296}$ dans le premier cas et $\frac{1}{216}$ dans le second cas ; mais il faut remarquer que, dans ce dernier cas, le fardeau s'élève 6 fois plus rapidement que dans le premier.

§ 3. — SYSTÈME PLAN

212. Plan incliné. — Nous avons trouvé les conditions auxquelles doit satisfaire un corps pesant reposant sur un plan horizontal pour qu'il soit en équilibre. Si nous supposons que le plan d'appui vienne à faire un certain angle avec l'horizon, il est facile de voir que les conditions d'équilibre changeront. En effet, le poids du corps restant toujours une force verticale, celle-ci ne sera plus détruite par la réaction du plan, lors même que la verticale du centre de gravité tomberait encore à l'intérieur du polygone d'appui. Le poids du corps se décompose en deux composantes, l'une normale au plan incliné, et l'autre parallèle à sa longueur; la première mesure la pression supportée par le plan d'appui, et la seconde tend à entraîner le corps. Pour que celui-ci reste en équilibre, il faudra donc lui appliquer une force d'intensité et de direction convenables; nous allons chercher les relations qui lient cette force au poids du corps.

213. Conditions d'équilibre.— Considérons, en premier lieu, le cas général où le corps se trouve soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces dirigées dans tous les sens. Pour que l'équilibre existe, il faut que l'ensemble des réactions exercées par le plan sur les différents points de contact du corps et des forces extérieures, se réduise à deux forces égales et directement opposées. Or toutes les réactions se composent en une seule résultante normale au plan et appliquée à l'intérieur de la base de sustentation. Par suite, *pour qu'un corps soumis à l'action d'un système quelconque de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que toutes ces forces admettent une résultante unique normale au plan et rencontrant celui-ci à l'intérieur du polygone d'appui.*

Pour traiter le cas où le corps n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur, nous allons d'abord exposer quelques considérations qui nous permettront de simplifier la figure.

1° La force P représentant le poids du corps et la force Q qu'il faut lui appliquer pour le maintenir en équilibre, devant avoir une résultante normale au plan incliné, se trouveront dans un même plan perpendiculaire au premier;

2° Le plan déterminé par les directions P et Q sera perpendiculaire au plan horizontal, puisqu'il contient la verticale du centre de gravité du corps ;

3° Le plan des forces P et Q étant perpendiculaire au plan incliné et au plan horizontal est perpendiculaire à leur intersection.

Il résulte de ces trois considérations que la figure 153 peut désormais se réduire à une coupe verticale faite suivant le plan des forces P et Q. La ligne de plus grande pente BC se nomme la *longueur* du plan incliné ; l'horizontale BA est sa *base ;* la verticale AC sa *hauteur* et le rapport $\frac{AC}{AB}$ ou la tangente trigonométrique de l'angle CBA indique la *pente* ou l'inclinaison du plan à l'horizon.

Cela posé, menons la droite FK parallèle à la longueur du plan incliné et soient α et β les angles du plan avec l'horizon et de la force Q avec la ligne FK. Le poids P du corps peut être décomposé en deux composantes rectangulaires, l'une P cos α normale au plan incliné et l'autre P sin α dirigée suivant OF ; la puissance Q peut de même être décomposée en deux forces, l'une Q sin β normale au plan incliné et l'autre Q cos β dirigée suivant OK. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante des composantes de P et de Q, dirigées suivant FK, soit nulle ; on a donc :

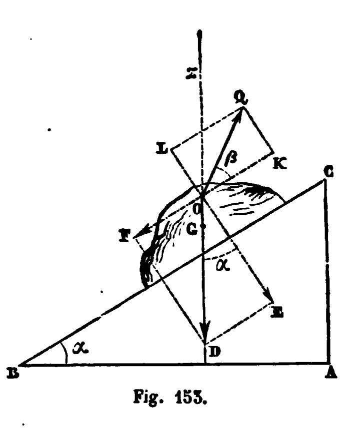


Fig. 153.

$$P \sin \alpha - Q \cos \beta = 0$$

d'où l'on tire :

$$Q = \frac{P \sin \alpha}{\cos \beta}$$

Si la force Q est donnée en intensité, l'équation ci-dessus nous fera connaître sa direction ; en effet, cette équation peut s'écrire :

$$\cos \beta = \frac{P \sin \alpha}{Q}$$

La valeur d'un cosinus ne pouvant jamais dépasser l'unité, il faut que Q soit au moins égal à P sin α, et, dans le cas où ces deux quantités seraient égales, on aurait :

$$\cos\beta = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0$$

c'est-à-dire que la force Q agirait parallèlement à la longueur du plan incliné.

Dans le cas où la force Q est plus grande que P sin α, la valeur

$$\cos\beta = \frac{P\sin\alpha}{Q}$$

convient à deux angles égaux, mais de signe contraire. Cela indique que, pour une même intensité de la force Q, il y a deux directions symétriques par rapport à la droite FK, l'une en dessus, l'autre en dessous, pour lesquelles l'équilibre existe.

Si la force Q tire au-dessus de la droite FK, sa direction ne peut pas dépasser la verticale du point O, car à cet instant on a :

$$\cos\beta = \sin\alpha$$

et par suite : $$Q = P$$

le corps ne fait que toucher le plan sans s'y appuyer.

Si dans cette même hypothèse on fait $Q > P$, le corps ne sera plus en équilibre, il sera soulevé par la puissance. La valeur $Q = P$ est donc le maximum que peut atteindre la puissance lorsqu'elle tire au-dessus de la ligne FK.

Si la puissance Q tire au-dessous de la ligne FK, sa valeur n'a plus de maximum ; elle tend vers l'infini à mesure que l'angle β croît en s'approchant de 90°, c'est-à-dire que la direction Q se rapproche de la normale EL. A cette limite, elle ne pourra pas, quelle que soit son intensité, empêcher le corps de glisser.

Examinons en particulier les deux cas suivants qui peuvent s'énoncer géométriquement :

1° *La puissance* Q *agit parallèlement au plan incliné.* Alors $\beta = 0$ et par suite

$$Q = P\sin\alpha$$

Dans le triangle BAC on a : $$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$$

En remplaçant il vient :

$$Q = P \times \frac{AC}{BC} \quad \text{d'où} \quad \frac{Q}{P} = \frac{AC}{BC}$$

c'est-à-dire *que la puissance est au poids du corps qu'elle tient en équilibre, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

2° *La puissance* Q *agit horizontalement.* Dans ce cas, l'angle β est égal à l'angle α, et, par suite, de l'équation d'équilibre,

$$P \sin\alpha - Q \cos\beta = 0$$

on peut tirer :

$$Q = P \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = P \operatorname{tang}\alpha$$

Mais, dans le triangle BAC, on a :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{AC}{AB}$$

En remplaçant il vient :

$$Q = P \times \frac{AC}{AB} \quad \text{d'où} \quad \frac{Q}{P} = \frac{AC}{AB}$$

c'est-à-dire *que la puissance est au poids du corps qu'elle tient en équilibre, comme la hauteur du plan incliné est à sa base.*

214. Pression supportée par le plan incliné. — Proposons-nous de déterminer la pression supportée par le plan incliné. Dans le cas de la figure ci-contre, où la force Q agit au-dessus de la droite FK, cette pression est donnée par la différence des composantes de P et de Q, dirigées suivant LE ; en la désignant par N, on aura :

$$N = P \cos\alpha - Q \sin\beta \qquad (1)$$

Si, au contraire, la puissance agit au-dessous de la ligne FK, cette pression est exprimée par

$$N = P \cos\alpha + Q \cos\beta.$$

Mais comme il est préférable de renfermer la solution complète de cette question dans une seule équation, on est convenu de regarder l'angle β comme négatif lorsqu'il est situé au-dessous de la droite FK. Avec cette convention, la valeur de la pression supportée par le plan incliné sera toujours donnée par l'équation (1).

215. Usages du plan incliné. — L'application la plus fréquente

du plan incliné consiste, soit dans les grands travaux de terrassement pour l'élévation ou pour la descente des matériaux, soit pour amener le minerai au sommet des hauts fourneaux.

Application. — *Déterminer quelle est l'inclinaison à donner à un plan incliné pour qu'un corps de poids* P *y soit en équilibre sous l'action de trois forces égales chacune au* 1/3 *de son poids et agissant l'une verticalement, l'autre horizontalement et la troisième parallèlement au plan incliné.*

Soit AB (*fig.* 154) le plan dont l'inclinaison est inconnue. Appliquons, au centre de gravité G du corps M, les trois forces F,F′,F″ égales à $\frac{P}{3}$ agissant dans les directions données et cherchons, en supposant l'angle α connu, quelle est la force qui tend à faire glisser le corps. Pour cela, remarquons que la force $F=\frac{P}{3}$ étant directement opposée au poids du corps, peut être supprimée à la condition de diminuer d'autant l'intensité de la force P, c'est-à-dire que nous pouvons considérer le corps avec un poids égal à $\frac{2P}{3}$ et comme s'il était soumis à l'action de deux forces F′ et F″ égales à la moitié de son poids. Dans cette hypothèse, décomposons la force $\frac{2P}{3}$ en deux composantes, l'une normale au plan incliné et qui sera détruite, et l'autre parallèle à sa longueur; cette composante dont la valeur est

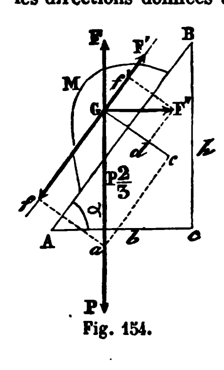


Fig. 154.

$$f=\frac{2P}{3}\sin\alpha$$

est celle qui tend à faire glisser le corps.

La force F″ se décompose aussi en deux autres, l'une suivant Gc normale au plan incliné, et l'autre suivant Gf′ exprimée par

$$f'=F''\cos\alpha=\frac{P}{3}\cos\alpha$$

et qui vient s'ajouter à la force F′ pour contre-balancer l'action de la force f. Pour l'équilibre, il faut que ces trois forces f, F′ et f' dirigées suivant une même droite, aient une résultante nulle. On aura donc :

$$\frac{2P}{3}\sin\alpha-\frac{P}{3}-\frac{P}{3}\cos\alpha=0$$

Cette équation nous permettra de déterminer l'angle α. En effet, elle peut s'écrire en divisant par $\frac{P}{3}$

$$2\sin\alpha-\cos\alpha=1$$

Divisant encore les deux membres de cette nouvelle équation par $\cos\alpha$, il vient :

$$2\,\text{tang}\,\alpha-1=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Mais on sait que

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha}$$

En remplaçant et élevant au carré, on a :

$$4 \,\text{tang}^2 \alpha - 4 \,\text{tang}\, \alpha + 1 = 1 + \text{tang}^2 \alpha$$

En simplifiant il vient :

$$3 \,\text{tang}^2 \alpha - 4 \,\text{tang}\, \alpha = 0$$

Et en mettant tang α en facteur commun il vient :

$$\text{tang}\, \alpha \,(3 \,\text{tang}\, \alpha - 4) = 0$$

Or ce produit peut être nul de deux manières différentes ; en faisant tang $\alpha = 0$, ou bien 3 tang $\alpha - 4 = 0$. La première hypothèse est inadmissible, car l'angle α serait égal à 0, ce qui ne peut pas être ; il reste donc :

$$3 \,\text{tang}\, \alpha - 4 = 0 \quad \text{d'où} \quad \text{tang}\, \alpha = \frac{4}{3}$$

Or la valeur trigonométrique de la tangente α est :

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{h}{b} \quad \text{et par suite} \quad \frac{h}{b} = \frac{4}{3}$$

Donc, pour que le corps donné soit en équilibre, il faudra le placer sur un plan incliné dont le rapport de la hauteur à la base soit égal à $\frac{4}{3}$.

DEUXIÈME PARTIE

CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

216. La *Cinématique* est la partie de la mécanique qui traite du mouvement des corps, indépendamment des forces qui le produisent. Elle comprend deux parties : 1° l'étude de toutes les considérations relatives aux divers mouvements et la composition de ces mouvements ; 2° l'étude des appareils au moyen desquels on communique et l'on transforme les mouvements.

§ 1. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET DÉFINITIONS

217. Nous savons déjà (5) qu'un corps est en *mouvement* quand il occupe successivement diverses positions dans l'espace, et qu'il est au *repos* quand il reste constamment à la même place.

La notion de mouvement implique les idées primordiales d'*espace* et de *temps*, car le mouvement d'un point matériel ne peut être complètement défini qu'à la condition de connaître les déplacements successifs de ce point et le temps qu'il emploie pour opérer ces divers déplacements; de là résulte la nécessité de la connaissance de la mesure du temps.

218. Du temps et de sa mesure. — Le temps, comme l'espace, ne peut être défini; mais la notion du temps nous est acquise par l'expérience, par l'observation des faits. Nous en avons une idée nette, précise, en observant la succession de certains phénomènes, leur durée et l'intervalle qui les sépare.

Le temps est donc, comme toutes les quantités, susceptible d'être mesuré, et pour cela il faut d'abord établir l'égalité de temps égaux. Supposons qu'un phénomène quelconque s'accomplisse pendant un certain temps; un autre phénomène qui se passerait de la même manière, en produisant des effets identiques et en étant soumis aux mêmes influences, s'accomplirait pendant un intervalle de temps égal au précédent, et les mêmes phénomènes se produiraient dans des temps égaux. Par conséquent, en prenant la durée de ce phénomène pour l'unité de temps, il suffira de compter le nombre de phénomènes qui se sont succédé sans interruption, pour avoir la durée d'un temps quelconque.

219. Parmi tous les mouvements que nous observons dans la nature, celui qui se produit d'une manière régulière et uniforme est le mouvement diurne apparent du soleil; et on appelle *jour solaire vrai* le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil au méridien d'un même lieu.

Mais le soleil ne passant pas toujours à ce méridien à des intervalles de temps égaux, on substitue au jour solaire vrai un *jour solaire moyen* qui est une moyenne entre un très-grand nombre de jours solaires vrais.

220. L'unité de temps adoptée dans les usages ordinaires de la vie est *le jour solaire moyen* qui se divise en 24 heures, l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes, de sorte qu'une heure équivaut à 3600 secondes et le jour à 86400 secondes.

L'unité de temps adoptée en mécanique est *la seconde sexagésimale de temps moyen.*

Les anciens se servaient, pour mesurer le temps, d'un instrument appelé *clepsydre* ou *sablier*, qui est encore employé pour apprécier des intervalles de courte durée. Les appareils qui, de nos jours, servent à la mesure du temps, sont : le pendule, les chronomètres, les montres et les horloges.

221. Diverses sortes de mouvement.— Un mouvement quelconque peut être considéré à deux points de vue différents : 1° *par rapport à l'espace* et 2° *par rapport au temps.*

Le mouvement, considéré par rapport à l'espace, peut être *rectiligne* ou *curviligne;* il est *rectiligne* lorsque tous les points du corps se meuvent suivant des lignes droites, et il est *curviligne* lorsque tous ces points décrivent des lignes courbes. Parmi tous

les mouvements curvilignes, le plus simple est celui dans lequel tous les points du corps décrivent des cercles ou des arcs de cercle; le mouvement prend alors le nom de *circulaire* ou de *rotation*.

Les mouvements rectilignes et curvilignes peuvent être *continus* ou *alternatifs;* ils sont *continus* lorsque le corps se meut constamment dans le même sens, et ils sont *alternatifs* lorsque le corps se meut tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre.

222. Le mouvement, considéré par rapport au temps, peut être *uniforme* ou *varié;* il est *uniforme* lorsque le corps parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, ou, en d'autres termes, lorsque les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir. Le mouvement est *varié* lorsque les espaces parcourus ne sont plus proportionnels aux temps employés à les parcourir; si ces espaces vont toujours en croissant pour des temps égaux, le mouvement est dit *accéléré*, et il est dit *retardé* dans le cas contraire. Les espaces parcourus augmentant ou diminuant de quantités égales dans des temps égaux, le mouvement est *uniformément varié*.

On appelle *mouvement périodique* un mouvement dans lequel les mêmes phases se reproduisent après certains intervalles de temps, et on appelle *période* la durée de ces intervalles. Si les périodes sont égales, le mouvement est dit *uniformément périodique*.

223. Trajectoire. — On désigne sous le nom de *trajectoire* la ligne droite ou courbe, essentiellement continue, qui unit toutes les positions successives d'un point matériel en mouvement, depuis sa position initiale jusqu'à sa position finale.

224. Mobile. — En cinématique, on donne souvent le nom de *mobile* à un corps animé d'un mouvement quelconque.

225. Représentation graphique du mouvement d'un mobile. Loi de mouvement. — Le mouvement d'un mobile est complétement défini si l'on connaît sa trajectoire et la loi suivant laquelle ce mobile se déplace sur cette ligne, c'est-à dire la position qu'il y occupe à chaque instant. Ainsi, soit AB (*fig.* 155) la trajectoire parcourue par un mobile M, et O un point quelconque pris sur cette trajectoire. Pour connaître le mouvement que possède le mobile pendant qu'il parcourt l'espace OM, il faut noter, pour cha-

cune des positions intermédiaires, le temps correspondant. On a ainsi la relation qui lie les espaces aux temps, et d'après cette relation on en conclut la nature du mouvement.

Le point O, position du mobile prise arbitrairement sur sa trajectoire, et à partir duquel on mesure l'espace parcouru, s'appelle *origine des espaces*.

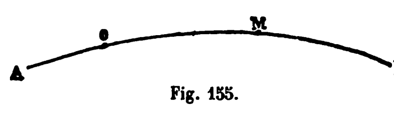


Fig. 155.

L'instant initial à partir duquel on commence à compter le temps s'appelle *origine des temps*.

Ordinairement, l'instant initial se confond avec l'origine des espaces, c'est-à-dire que l'on commence à compter le temps lorsque le mobile passe à l'origine des espaces.

La relation qui lie les espaces aux temps peut être représentée graphiquement, car on conçoit que ces deux quantités peuvent être représentées par des lignes; donc, la représentation graphique d'un mouvement devient très-facile si l'on connaît, pour des valeurs de l'espace parcouru, les valeurs correspondantes des temps employés à les parcourir. Dès lors, l'étude des divers mouvements pourra se faire d'une manière très-simple, au moyen de considérations géométriques.

226. Soit à déterminer la loi du mouvement d'un mobile sur une trajectoire connue, étant données les valeurs du temps comptées à partir de l'instant initial et les valeurs correspondantes de l'espace parcouru comptées à partir de l'origine des espaces. Adoptons des longueurs déterminées pour représenter l'unité de temps ou une seconde, et l'unité de l'espace parcouru. Traçons deux axes rectangulaires OX et OY (*fig.* 156) se coupant au point O; à partir de ce point, portons une longueur Oa représentant la seconde, et élevons en ce point une perpendiculaire ab sur laquelle nous portons, à l'échelle convenable, une longueur ab représentant le chemin parcouru pendant la première seconde. Les unités de temps étant égales, portons à partir du point a des longueurs aa', $a'a''$,... égales entre elles et à Oa, et en chacun de ces points élevons des perpendiculaires sur

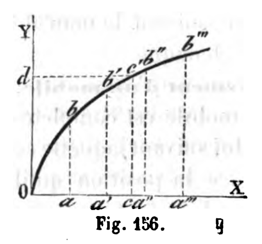


Fig. 156.

lesquelles nous prendrons, à l'échelle adoptée, les espaces parcourus correspondant aux temps. On obtient ainsi les points b', b'',... qui, étant joints par un trait continu, fourniront la courbe représentative du mouvement appelée *loi de mouvement*.

227. Au moyen de cette courbe, il est facile de déterminer l'espace parcouru au bout d'un certain temps, ou, réciproquement, quel est le temps employé par le mobile pour parcourir un espace donné. En effet, soit à déterminer l'espace parcouru au bout de 2″ 2/3; divisons la distance $a'a''$ en trois parties égales, et au point c élevons une ordonnée rencontrant la courbe du mouvement en c'; la longueur cc', mesurée à l'échelle des espaces, fournira la valeur cherchée.

Réciproquement, si l'espace parcouru est connu, portons sur l'axe OY, à partir du point O, une longueur Od représentant l'espace donné à l'échelle adoptée; par le point d menons une parallèle dc' à l'axe OX, rencontrant la courbe du mouvement en c', et de ce point abaissons une perpendiculaire sur cet axe; la longueur Oc, appréciée à l'échelle des temps, fournira la valeur cherchée.

Dans la recherche des lois de mouvement, il faut, autant que possible et pour éviter les difficultés, adopter une même échelle pour les espaces et pour les temps.

228. Abscisses. Ordonnées. Coordonnées. — Les longueurs Oa, aa'..., portées sur l'axe OX, sont appelées *abscisses*, et cette ligne porte le nom d'*axe des abscisses;* les perpendiculaires ab, $a'b'$,... sont appelées *ordonnées*, et la ligne OY porte le nom d'*axe des ordonnées*. L'ensemble des abscisses et des ordonnées se désigne sous l'expression générale de *coordonnées*, et le point O s'appelle *origine*.

229. Différence entre la loi de mouvement et la trajectoire. —Il ne faut jamais confondre la loi de mouvement d'un mobile avec sa trajectoire; la loi de mouvement est la relation des espaces aux temps et la trajectoire est la ligne, droite ou courbe, suivie par le mobile et sur laquelle on mesure les espaces parcourus.

§ 2. — MOUVEMENT UNIFORME

230. Définition. — *Le mouvement est uniforme lorsque le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux quelque petits qu'ils soient.* — Ainsi, supposons qu'un mobile ait parcouru 2 mètres en une seconde ; si, en mesurant l'espace parcouru au bout de 2, 3, 4... secondes, on reconnaît que le chemin décrit est de 4, 6, 8... mètres, c'est-à-dire double, triple, quadruple... du premier, le mobile est dit animé d'un mouvement uniforme. De là la définition donnée que *le mouvement est uniforme quand les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

En désiguant par e, e', e'',... les espaces parcourus et par t, t', t'',... les temps correspondants, on aura la suite de rapports égaux :

$$\frac{e}{t}=\frac{e'}{t'}=\frac{e''}{t''}=\dots$$

231. Vitesse. — Le rapport constant de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir s'appelle *vitesse*, et en la désignant par v on aura

$$v=\frac{e}{t}. \qquad (1)$$

La vitesse à un instant quelconque est donc égale à l'espace parcouru divisé par le temps employé à le parcourir.

Si dans l'équation (1) nous faisons $t=1$, il vient

$$v=e,$$

c'est-à-dire que *dans le mouvement uniforme la vitesse est égale à l'espace parcouru pendant l'unité de temps.*

De l'équation (1) on tire

$$e=v\times t. \qquad (2)$$

L'espace parcouru est égal à la vitesse multipliée par le temps.

Nous avons supposé que le mobile passait à l'origine des espaces à l'instant initial ; lorsque cela n'a pas lieu, le mobile se trouve à

une distance de l'origine des espaces que nous désignerons par e_0. Alors e désignant le chemin total parcouru par le mobile au bout du temps t, on aura pour l'équation générale du mouvement uniforme

$$e = e_0 + vt, \qquad (3)$$

qui renferme implicitement tous les cas qui peuvent se présenter. Si dans cette équation nous faisons $e_0 = 0$, il vient

$$e = vt,$$

qui est l'équation (1) trouvée précédemment.

232. Loi du mouvement uniforme.— Supposons que l'origine des espaces coïncide avec l'instant initial et soit OX (*fig.* 157) l'axe des abscisses. A partir de l'origine A, portons sur cet axe des longueurs OA, AB, BC, représentant des intervalles de temps égaux et en chacun des points A, B, C, élevons des ordonnées sur lesquelles nous prendrons, à la même échelle, les espaces parcourus pendant les temps correspondants. En joignant toutes les extrémités des ordonnées, nous obtiendrons la loi du mouvement uniforme; cette loi est une ligne droite. En effet, nous savons que les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir; nous aurons donc la suite de rapports égaux :

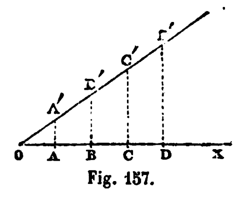


Fig. 157.

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'} = \cdots$$

Les triangles OAA', OBB', OCC' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels; par suite : angle AOA' = BOB' = COC' = ... et comme ces angles ont les côtés OA, OB, OC, communs, les autres côtés OA', OB', OC' doivent se trouver en ligne droite.

233. Si, à l'instant initial, le mobile était déjà éloigné de l'origine des temps d'une quantité quelconque e_0, cette quantité serait portée de O en O' (*fig.* 158) et la droite OC' qui, dans le cas précédent, avait pour origine le point O, passera actuellement par le point O'.

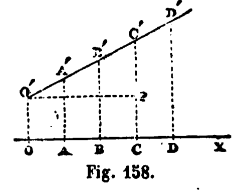


Fig. 158.

La direction de la droite $O'c'$ nous montre que le mobile s'éloigne constamment de l'origine des espaces, c'est-à-dire que la vitesse est positive; si cette vitesse était négative, le mobile se rapprocherait indéfiniment de l'origine des espaces et la droite $O'c'$ occuperait une position symétrique de la précédente par rapport à $O'P$.

Loi des vitesses. — Dans le mouvement que nous considérons, nous savons que la vitesse est constante et égale à l'espace parcouru au bout de l'unité de temps. Par suite, si dans la figure 157 nous menions une ligne parallèle à l'axe des abscisses, passant par le point A', cette ligne représenterait la loi des vitesses.

§ 3. — MOUVEMENT VARIÉ

234. Définition. — On dit qu'*un mouvement est varié lorsqu'il n'est pas uniforme, c'est-à-dire lorsque les espaces parcourus ne sont plus proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

Le mouvement varié, comme nous l'avons déjà dit, peut être varié d'une manière quelconque, uniformément varié, ou périodique.

235. Loi d'un mouvement varié quelconque. — La méthode que nous avons suivie pour la représentation graphique de la loi du mouvement uniforme s'applique également au mouvement varié, et, dans ce cas, la relation qui lie les espaces aux temps n'est plus une ligne droite, mais une courbe dont la convexité peut être tournée vers l'axe des abscisses, ou en sens contraire, ou alternativement dans les deux sens.

Un mouvement varié peut être considéré comme étant composé d'une succession de mouvements uniformes infiniment petits de vitesses différentes. En effet, portons sur l'axe OX des abscisses (*fig.* 159) des divisions égales OA, AB, BC... représentant des secondes; élevons des ordonnées en chacun des points de division et portons, sur chacune d'elles, des longueurs représentant les espaces parcourus au bout d'une 1″, de 2″, de 3″... En joignant les points ainsi obtenus par des lignes droites, on obtient la ligne

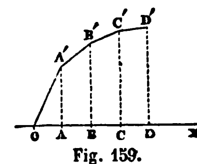


Fig. 159.

brisée OA'B'C'D' dont chacun des éléments représente la loi d'un mouvement uniforme pendant 1". Si nous faisons décroître indéfiniment la durée de ces petits mouvements uniformes, la ligne brisée se rapprochera de plus en plus d'une courbe continue qui, à la limite, représentera la loi du mouvement varié.

236. Vitesse moyenne. Vitesse à un instant donné. — Considérons un mobile animé d'un mouvement varié et parcourant une trajectoire rectiligne. Appelons O le point pris sur cette trajectoire pour origine des espaces et des temps, A' la position de ce mobile au bout d'un certain temps t et B' sa position au bout d'un temps plus grand t'. L'espace parcouru pendant le temps $t'-t$ sera exprimé par A'B'; si cet espace était parcouru d'un mouvement uniforme, la vitesse v serait donnée par la relation

$$v=\frac{OB'-OA'}{t'-t}=\frac{A'B'}{t'-t}.$$

Dans le mouvement varié, ce rapport est appelé *vitesse moyenne.* Lorsque la différence $t'-t$ décroît indéfiniment jusqu'à zéro, le rapport $\frac{A'B'}{t'-t}$ tend vers une limite déterminée qu'on nomme *vitesse au bout du temps* t. Cette limite peut se déterminer graphiquement. En effet, soient OC' la loi du mouvement varié considéré (*fig.* 160), OA et OB les longueurs comptées sur l'axe des temps pour représenter les durées t et t'; en élevant aux points A et B les ordonnées AA' et BB', on obtiendra les espaces parcourus AA' et BB' correspondant aux temps t et t', et en menant par A' une parallèle A'P à l'axe OX, la partie B'P de l'ordonnée BB', sera l'espace parcouru pendant la différence $t'-t$.

Fig. 160.

En désignant par v_1 la vitesse moyenne et par v la vitesse au bout du temps t, on aura :

$$v_1=\frac{B'P}{A'P} \quad \text{et } v=\text{limite } \frac{B'P}{A'P}$$

Mais dans le triangle A'B'P on a :

$$\text{tang } B'A'P=\frac{B'P}{A'P} \text{ et par suite } v=\text{limite tang } B'A'P$$

Or, à mesure que la différence $t'-t$ diminue, les points A′ et B′ se rapprochent de plus en plus; à la limite, lorsque ces deux points coïncideront, le côté A′B′ du triangle A′B′P se confondra avec la tangente à la courbe au point A′; on aura donc

$$\text{limite tang } B'A'P = \text{tang } A'TA.$$

En appelant α l'angle de la tangente A′T avec l'axe des temps, il vient

$$v = \text{tang } \alpha$$

La vitesse à un instant quelconque d'un mouvement varié est donc égale à la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la loi du mouvement au point considéré, avec l'axe des temps.

Dès lors, une simple construction graphique permet de trouver cette vitesse au bout d'un temps quelconque t; pour cela, portons sur l'axe OX des temps (*fig.* 161) une longueur $OA = t$ et élevons l'ordonnée du point A qui rencontre la courbe en A′. Par ce point A′ menons la tangente A′T à la courbe et la parallèle A′B à l'axe OX; portons sur cette parallèle une longueur A′P égale à l'unité de temps et par le point P menons PP′ parallèle à AA′. Cette longueur PP′ représente la vitesse au bout du temps t. En effet, on a

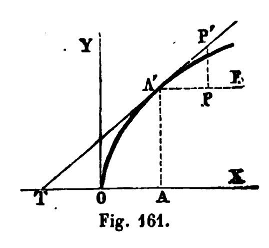


Fig. 161.

$$v = \text{tang } A'TA = \frac{AA'}{AT}.$$

Mais à cause des triangles semblables on a

$$\frac{AA'}{AT} = \frac{PP'}{A'P} \quad \text{et comme } A'P = 1\text{; il vient } v = PP'.$$

Remarque. — Si à l'instant considéré, c'est-à-dire au bout du temps t, le mouvement devenait uniforme, le mobile continuerait à se mouvoir avec la vitesse qu'il possède à cet instant et qui est représentée par PP′. On peut donc dire que *la vitesse du mouvement varié à un instant quelconque est la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié à cet instant.*

257. Loi des vitesses. — Connaissant le procédé à employer

pour trouver la vitesse à un instant quelconque dans un mouvement varié, lorsqu'on connaît la loi des espaces, il est facile de construire la loi des vitesses en déterminant, sur la courbe des espaces, les vitesses au bout de 1″, 2″, 3″,... Sur l'axe des abscisses on porte des longueurs respectivement égales à 1″, 2″, 3″,... et en chacun des points de division on élève des ordonnées sur lesquelles on prend des hauteurs correspondant aux vitesses de tous ces points. En joignant les extrémités de toutes les ordonnées par un trait continu, on obtiendra une courbe représentative de la vitesse dans le mouvement varié considéré.

238. Choix de l'unité de vitesse. — L'unité de longueur généralement adoptée pour exprimer la vitesse est le mètre, et on la compte par seconde. Mais le mouvement uniforme se présente rarement; un train de chemin de fer, une voiture, un homme en marche, parcourent leur trajet d'un mouvement varié; dans ce cas, on a recours à la vitesse moyenne que l'on exprime en kilomètres par heure. Ainsi, on dit qu'un train de chemin de fer à grande vitesse parcourt 80 kilomètres à l'heure, qu'une voiture fait 18 kilomètres à l'heure, qu'un homme en marche fait 6 kilomètres à l'heure; mais il est toujours facile, avec ces données, d'évaluer la vitesse en mètres.

Dans la marine, pour mesurer la vitesse des bâtiments, on se sert d'une unité spéciale, appelée *nœud*, qui correspond à la longueur du mille marin ou à 1852 mètres. Un navire qui file 10 nœuds à l'heure parcourt une distance de 18520 mètres par heure, et sa vitesse par seconde est de $\frac{18520}{60 \times 60} = 5^{m},10$.

239. Mouvement uniformément varié. — Dans le mouvement uniformément varié, le plus simple et le plus remarquable de tous les mouvements variés, la vitesse croît ou décroît de quantités égales dans des temps égaux. La vitesse augmentant proportionnellement au temps, le mouvement est dit *uniformément accéléré* et si cette vitesse diminue proportionnellement au temps, le mouvement est dit *uniformément retardé*. Nous étudierons spécialement chacun de ces deux mouvements.

§ 4. — MOUVEMENTS UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ ET RETARDÉ

240. Mouvement uniformément accéléré. — *Le mouvement est uniformément accéléré lorsque la vitesse croît proportionnellement au temps.*

241. Vitesse. Accélération. — Considérons un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré et cherchons sa vitesse au bout d'un temps t, ce mobile ayant une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire partant du repos. L'accroissement de vitesse pendant l'unité de temps ou 1″ étant représenté par j, la vitesse v du mobile au bout du temps t sera exprimée par

$$v = j \times t. \qquad (1)$$

La constante j, qui est l'accroissement de vitesse pendant l'unité de temps, est appelée *accélération.*

En remarquant que l'accélération est la vitesse acquise pendant la première seconde, on peut dire que *la vitesse acquise par un mobile animé d'un mouvenent uniformément accéléré sans vitesse initiale, au bout d'un temps* t, *est égale au produit de ce temps, exprimé en secondes, par l'accélération.*

Si, à l'origine des temps, le mobile possédait une vitesse initiale v_0, la vitesse acquise par le mobile au bout du temps t serait exprimée par

$$v = v_0 + jt.$$

242. Représentation graphique de la relation des vitesses aux temps. — La relation entre les vitesses et les temps, ou *loi des vitesses*, peut se représenter graphiquement. En effet, traçons les axes des coordonnées OX et OY (*fig.* 162) ; à partir du point O portons sur l'axe OX des abscisses, des longueurs OA, AB, BC,... représentant les secondes écoulées depuis l'origine du mouvement, et en chacun des points de division élevons des ordonnées repectivement égales aux vitesses correspondantes. En joignant toutes les extrémités des ordonnées par un trait continu, on obtiendra une ligne OK′ représentative de la relation des vitesses aux temps.

D'après la définition même du mouvement, les triangles OAA', OBB', OCC',... sont semblables, et l'on a

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = \cdots$$

Ces égalités montrent que les points A',B',C',... se trouvent situés sur une même ligne droite. Donc, *lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale, la relation des espaces aux temps est une ligne droite passant par l'origine* O.

Si le mobile possédait, à l'instant initial, une vitesse v_0, il faudrait porter cette vitesse, à l'échelle adoptée, sur l'axe OY, de O en O', et la relation des vitesses aux temps passerait par le point O'.

243. Détermination de l'espace parcouru. — Soit à déterminer l'espace parcouru par un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré au bout d'un temps t, connaissant la relation des vitesses aux temps. Divisons la durée totale t du mouvement, représentée par OK, en intervalles très-petits et considérons l'un d'eux, BC, par exemple. Supposons que, pendant ce temps très-petit, le mobile se meuve d'un mouvement uniforme, avec une vitesse égale à celle qu'il possède à la fin de l'intervalle précédent, représentée par BB'. La valeur de l'espace parcouru dans le mouvement uniforme étant égale au produit de la vitesse par le temps, l'espace parcouru pendant l'intervalle de temps très-petit BC, sera exprimé par l'aire du rectangle BB'*b*C ou BB'×BC.

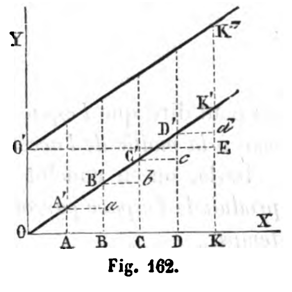


Fig. 162.

En considérant un autre intervalle de temps CD, l'espace parcouru pendant cette durée sera représenté par l'aire du rectangle CC'*c*D ou CC' × CD et ainsi de suite, pour les autres éléments de temps considérés. Or l'erreur commise en remplaçant l'espace réel parcouru par le mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré, par la somme des espaces parcourus à l'aide des différents mouvements uniformes que nous avons considérés, sera d'autant plus petite que le temps OK sera divisé en un plus grand nombre de parties. Mais à mesure que les éléments AB, BC, CD,...

diminueront, les aires des rectangles AA'aB, BB'bC,... se rapprocheront de plus en plus de celles des trapèzes AA'B'B, BB'C'C... Donc, à la limite, l'espace réel parcouru sera égal à la somme des aires de tous ces trapèzes élémentaires, c'est-à-dire à l'aire du triangle OKK' qui a pour mesure

$$\mathrm{OK} \times \frac{1}{2}\,\mathrm{KK'};$$

$$\text{mais } \mathrm{OK} = t \quad \mathrm{KK'} = v = jt.$$

On aura donc, en désignant par e l'espace total parcouru

$$e = t \times \frac{1}{2}\,jt = \frac{1}{2}\,jt^2. \tag{2}$$

L'espace parcouru par un mobile qui se meut d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale, est donc égal à la moitié de l'accélération multipliée par le carré du temps.

En remarquant que si $t = 1''$, la formule (2) devient

$$e = \frac{1}{2}\,j,$$

on peut dire que *l'espace réel parcouru pendant la* 1re *seconde est égal à la moitié de l'accélération.*

De là, on en conclut que *l'espace total parcouru est égal au produit de l'espace parcouru pendant la* 1re *seconde par le carré du temps.*

Si le mobile possédait à l'instant initial une vitesse v_0, l'espace parcouru au bout du temps t se composerait de l'aire du rectangle OO'EK, augmentée de l'aire du triangle EO'K''; les aires de ces deux surfaces étant respectivement égales à

$$\mathrm{OO'} \times \mathrm{OK} \text{ ou } v_0 t \text{ et } \frac{1}{2}\,\mathrm{EK''} \times \mathrm{OK} \text{ ou } \frac{1}{2}\,jt^2,$$

l'expression de l'espace parcouru e sera

$$e = v_0 t + \frac{1}{2}\,jt^2, \tag{3}$$

ce qui s'exprime en disant que *l'espace total parcouru pendant un temps* t *est égal à l'espace que parcourrait ce mobile pendant le*

même temps, s'il était animé d'un mouvement uniforme de vitesse v_0, *augmenté de l'espace qu'il parcourt d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale.*

244. Loi des espaces. — Étant donnés les espaces e, e', e'',... parcourus par un mobile, après des intervalles de temps égaux t, t', t'',... il est facile de trouver la loi de son mouvement, ou la relation qui lie les espaces aux temps. Pour cela, traçons les deux axes OX et OY des coordonnées (*fig.* 163), et portons sur l'axe des abscisses des longueurs OA, AB, BC,... représentant, à une certaine échelle, les temps t, t', t'',...; en chacun des points de division, élevons des perpendiculaires sur lesquelles nous prendrons des longueurs respectivement proportionnelles aux espaces correspondants. En joignant toutes les extrémités des ordonnées par un trait continu, nous obtiendrons la courbe OD′ qui est la loi du mouvement.

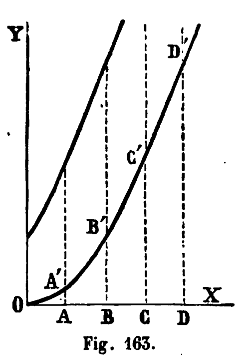


Fig. 163.

En remarquant qu'une ordonnée quelconque, représentant l'espace e parcouru au bout d'un temps t, a pour valeur

$$e = \frac{1}{2} jt^2$$

et que j est constant, on voit que l'espace e est proportionnel au carré du temps employé à le parcourir. La courbe OD′ dont les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses est une *parabole*.

Le mobile partant du repos, l'axe OY est l'axe de la parabole, et l'axe OX est une tangente à son sommet O.

Le mobile ayant déjà parcouru un espace e_0 avant son passage à l'instant initial, le sommet de la parabole ne sera plus en O. Cette courbe coupera l'axe OY en un point O′ qui sera déterminé en portant une longueur OO′ représentant, à l'échelle des espaces, le chemin e_0 parcouru par le mobile depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant initial.

Des formules qui précèdent on déduit les conséquences suivantes :

1° *Dans le mouvement uniformément accéléré, l'espace parcouru par un mobile au bout d'un temps* t *est égal à l'espace qu'il parcourrait s'il était animé d'un mouvement uniforme, dont la vitesse serait une moyenne arithmétique entre les vitesses initiale et finale.*

Considérons la formule générale (3) de l'espace parcouru

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2,$$

que l'on peut écrire
$$e = \left(v_0 + \frac{1}{2} jt \right) t. \qquad (a)$$

La vitesse au bout d'un temps t étant $v = v_0 + jt$, on en tire $jt = v - v'_0$.

En remplaçant dans la formule (a), il vient

$$e = \left(v_0 + \frac{v - v_0}{2} \right) t \text{ ou } e = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Cette formule aurait pu se déduire de la figure 162 elle-même, en remarquant que l'espace total parcouru au bout du temps t étant représenté par la somme des aires du triangle O'K"E et du rectangle OO'KE, est, par suite, égal à leur somme ou à la surface du trapèze OO'KK", qui a pour mesure

$$\left(\frac{\text{KK}' + \text{OO}'}{2} \right) \text{OK} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t.$$

2° *Les vitesses sont proportionnelles aux temps.* — Nous avons vu que la vitesse au bout d'un temps quelconque t est $v = jt$.

Pour un autre temps t', on aura de même $v' = jt'$.

Divisant membre à membre ces deux égalités et supprimant le facteur commun j, il vient

$$\frac{v}{v'} = \frac{t}{t'}.$$

Ainsi, en donnant au temps les valeurs successives 1", 2", 3", 4", on aura

$$v = j, \quad v' = 2j, \quad v'' = 3j, \quad v''' = 4j;$$

donc les vitesses sont bien proportionnelles aux temps.

3° *La vitesse acquise par un mobile au bout d'un temps* t *est*

égale à la moyenne géométrique entre l'espace parcouru et le double de l'accélération.

Reprenons les égalités

$$v = jt \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2} jt^2.$$

Élevant la première au carré, on a

$$v^2 = j^2t^2.$$

Divisant la seconde par cette dernière, il vient

$$\frac{e}{v^2} = \frac{\frac{1}{2}jt^2}{j^2t^2} = \frac{1}{2j};$$

d'où $v^2 = 2je \quad \text{et} \quad v = \sqrt{2je}.$

245. Mouvement uniformément retardé. — *Le mouvement est uniformément retardé lorsque la vitesse décroît proportionnellement au temps.*

Soient v_0 la vitesse initiale du mobile, et j la quantité dont elle diminue à chaque unité de temps. Au bout de la 1re seconde on aura $v' = v_0 - j,$

au bout de la 2e seconde $v'' = v_0 - 2j,$

au bout de la 3e seconde $v''' = v_0 - 3j$

et au bout du temps t, la vitesse sera égale à

$$v = v_0 - jt. \qquad (1)$$

Cette formule ne diffère de celle du mouvement uniformément accéléré qu'en ce que la quantité j est prise négativement.

246. Loi des vitesses. — Pour obtenir la loi des vitesses, traçons les axes des coordonnées OX et OY (*fig.* 164), puis portons sur l'axe OY une longueur Oa représentant, à l'échelle adoptée, la vitesse initiale v'_0. Sur l'axe OX des abscisses, portons des longueurs OA, AB, BC,... représentant, à l'échelle des temps, les secondes successives écoulées depuis l'instant initial, et en chacun des points de division élevons des ordonnées respectivement égales aux vi-

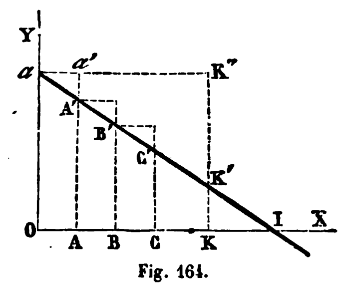


Fig. 164.

tesses correspondantes. La vitesse AA', au bout d'une seconde, s'obtiendra en retranchant de l'ordonnée Oa, l'accélération j portée de a' en A', et les vitesses au bout des secondes successives s'obtiendront d'une manière analogue, en diminuant de l'accélération j les ordonnées correspondant aux vitesses des secondes précédentes. En joignant les extrémités des ordonnées ainsi obtenues, nous aurons la loi des vitesses qui est une ligne droite inclinée en sens contraire de celle représentant la loi des vitesses du mouvement uniformément accéléré.

Le point I, où la loi des vitesses rencontre l'axe des temps, correspond à l'instant où la vitesse v est nulle, et, à cet instant, le mobile est au repos. Pour déterminer le temps OI, faisons, dans la formule (1), $v=0$, et il vient

$$v_0 = jt \quad \text{d'où } t = \frac{v_0}{j}.$$

Or, dans le mouvement uniformément accéléré, le temps employé par le mobile pour acquérir la vitesse v est exprimé par

$$t = \frac{v}{j}.$$

On peut donc dire que, *dans le mouvement uniformément retardé, le temps employé par un mobile pour perdre sa vitesse initiale* v_0, *est exactement le même que celui qu'il nécessiterait si, partant du repos et étant animé d'un mouvement uniformément accéléré, il devait acquérir cette vitesse* v_0.

247. Détermination de l'espace parcouru. — L'espace parcouru e par un mobile pendant un temps t, représenté par OK, est exprimé, comme il serait facile de le voir, par l'aire du rectangle OaKK″ qui a pour mesure $v_0 \times t$, diminuée de l'aire du triangle aK'K″ qui a pour mesure

$$\frac{1}{2} a\text{K}'' \times \text{K}'\text{K}'' = \frac{1}{2} t \times jt = \frac{1}{2} jt^2.$$

On aura donc pour la valeur de e

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} jt^2.$$

Pour trouver l'espace parcouru e par le mobile jusqu'au moment

où sa vitesse devient nulle, il suffit d'évaluer l'aire du triangle aOI qui a pour mesure $\frac{1}{2}\text{OI} \times \text{O}a = \frac{1}{2} v_0 t$.

$$\text{Or} \qquad t = \frac{v_0}{j}; \quad \text{donc}: \quad e' = \frac{1}{2} v_0 \times \frac{v_0}{j} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{j}.$$

Or, dans le mouvement uniformément accéléré, l'espace parcouru au bout du temps t par un mobile, partant du repos, est donné par l'équation

$$e = \frac{1}{2} jt^2.$$

En remplaçant t par sa valeur $\frac{v}{j}$, cette formule devient

$$e = \frac{1}{2} j \times \frac{v^2}{j^2} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{j}.$$

On peut donc dire *qu'un mobile animé d'un mouvement uniformément retardé avec une vitesse v_0 parcourt, pour arriver à une vitesse nulle, le même espace qu'il parcourrait si, étant animé d'un mouvement uniformément accéléré, il devait acquérir la vitesse v_0.*

248. Loi des espaces.— En prenant pour abscisses les valeurs successives du temps et pour ordonnées les espaces parcourus correspondants, on déterminera la loi des espaces qui, dans ce cas, sera une parabole tournant sa concavité vers l'axe des temps.

§ 5. — LOIS DE LA CHUTE DES CORPS

249. Sous l'influence d'une force que nous avons appelée *pesanteur*, tous les corps, abandonnés à eux-mêmes, tombent à la surface du sol avec des vitesses bien différentes, qui varient selon leur forme et leur densité. Cette différence de vitesse dans le mouvement vertical des corps provient seule de la résistance de l'air, et si cette cause venait à disparaître, tous les corps, quelles que soient leur forme et leur nature, tomberaient avec la même vitesse; c'est ce qui se démontre en Physique en faisant le vide dans un long tube de verre contenant des corps de diverses natures.

Les lois du mouvement vertical des corps pesants dans le vide, ou lois de la chute des corps, ont été découvertes par le célèbre physicien Galilée.

250. Démonstration expérimentale des lois de la chute des corps. — Les lois de la pesanteur se démontrent expérimentalement au moyen de la machine d'Atwood et de l'appareil à indications continues de M. Morin.

251. Machine d'Atwood. Son principe. — Considérons une poulie très-mobile autour d'un axe horizontal, sur laquelle s'enroule un fil de soie très-fin portant à chacune de ses extrémités deux poids parfaitement égaux P et P′. Ces deux poids se feront constamment équilibre dans toutes les positions qu'on pourra leur donner; mais si l'on vient à placer sur l'un d'eux, P par exemple, un poids additionnel p, l'équilibre sera rompu et le système se mettra en mouvement sous la seule influence de ce poids additionnel. Les lois de la chute de p ne seront pas changées, c'est-à-dire qu'il se mouvra comme s'il tombait librement, mais l'action de la pesanteur sur lui se trouvera diminuée. En effet, supposons que les poids P et P′ pèsent chacun 24 grammes et que le poids additionnel pèse 1 gramme; au moment où l'on place p sur P, p produit le mouvement descendant de P et le mouvement ascensionnel de P′; or, ces poids se faisant équilibre dans toutes les positions, le poids p ou 1 gramme entraîne seul la somme $P + P' + p$ ou 49 grammes. Par conséquent le mouvement du poids p est le même que s'il se mouvait seul, l'intensité de la pesanteur étant rendue 49 fois plus petite. Ainsi, l'accélération se trouve exprimée, dans le mouvement du poids p entraînant les poids $P + P'$, par le rapport

$$\frac{p}{P + P' + p} = \frac{1}{24 + 24 + 1} = \frac{1}{49}$$

c'est-à-dire qu'elle se trouve réduite au $\frac{1}{49}$.

L'accélération ou la vitesse de chute pouvant être diminuée à volonté sans altérer les lois du mouvement, la résistance de l'air sera rendue très-faible et les espaces parcourus se mesureront facilement. Tel est le principe de la machine d'Atwood.

Nous n'entrerons pas dans les détails de la description et des expériences que l'on fait avec cette machine étudiée plus particulièrement en Physique.

Les deux lois que l'on vérifie sont les suivantes :

1° *Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.*

2° *Les vitesses acquises sont proportionnelles aux temps.*

En examinant ces lois, on reconnaît qu'elles sont identiquement les mêmes que celles du mouvement uniformément varié ; dès lors toutes les formules du mouvement uniformément varié s'appliqueront, sans aucune restriction, à tous les corps tombant dans le vide.

252. Appareil à indications continues de M. Morin. — L'appareil à indications continues de M. Morin permet d'apprécier directement les lois relatives à la chute des corps en forçant ceux-ci à décrire la courbe représentative de leur mouvement.

253. Principe de l'appareil. — Imaginons un cylindre vertical susceptible de prendre un mouvement de rotation uniforme autour de son axe, et un corps pouvant tomber verticalement, muni d'un crayon qui s'appuie contre la surface de ce cylindre. Si nous faisons tourner le cylindre en maintenant le corps fixe, le crayon tracera une circonférence dont le plan du cercle sera perpendiculaire à l'axe de rotation. Si, au contraire, le corps tombe pendant que le cylindre est au repos, le crayon tracera une verticale qui sera une génératrice du cylindre. Mais en laissant tomber le corps pendant que le cylindre tourne, le crayon tracera une ligne continue et essentiellement différente de la circonférence et de la génératrice ; cette ligne, développée sur un plan, sera la loi du mouvement du corps.

253. Description. — L'appareil se compose d'un cylindre vertical en bois AA' (*fig.* 165), auquel on communique un mouvement de rotation au moyen d'un appareil d'horlogerie B, mû par le poids C; un volant à ailettes sert à régulariser ce mouvement et à le rendre uniforme. Un peu en avant du cylindre AA', et parallèlement à ses génératrices, se trouvent deux fils métalliques qui, passant dans des oreilles portées par le corps D, servent à le guider dans sa chute et à le maintenir à une distance constante de la surface extérieure du cylindre. Ce corps D, de forme cylindro-conique, est muni d'un crayon ou d'un pinceau horizontal qui s'appuie constamment sur une feuille de papier enroulée sur le cylindre. On détermine la chute du poids D en ouvrant, à l'aide

d'une ficelle, les deux branches d'une pince qui le maintient lorsque l'appareil ne fonctionne pas.

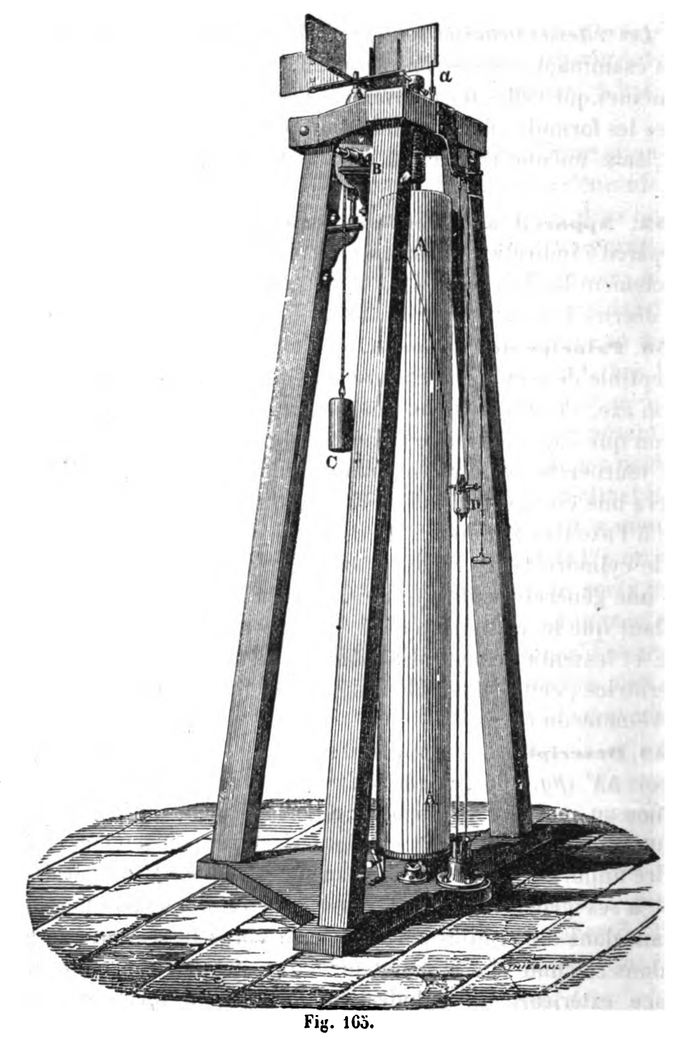


Fig. 165.

254. Expérience. — On commence par entourer le cylindre d'une feuille de papier préalablement divisée en parties égales par des

ordonnées équidistantes II′,KK′,LL′, (*fig.* 166), puis on le met en mouvement, et on attend que ce mouvement soit devenu uniforme. Alors on ouvre la pince et le poids D, en tombant, trace sur le cylindre une ligne CMNPB qui est la courbe représentative de son mouvement et qui en précise la nature. Étendons sur un plan la feuille de papier fixée précédemment sur le cylindre, en l'ouvrant suivant la génératrice AC, passant par l'origine de la courbe; celle-ci se trouve rapportée à deux axes rectangulaires dont l'un CE est l'axe des abscisses ou des temps, et l'autre AC est l'axe des ordonnées ou des espaces parcourus. En comparant les espaces I′M,K′N,L′P,.... parcourus verticalement par le poids D, on trouve qu'ils sont entre eux dans le rapport des nombres 1, 4, 9, 16; les temps correspondants pouvant être représentés par les nombres 1, 2, 3, 4, on voit que *les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir*. Or, les temps étant les abscisses de la courbe, et les espaces parcourus, les ordonnées, on peut encore dire que les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses ; donc, *la loi du mouvement est une parabole*, et par suite *le mouvement du corps est uniformément accéléré*.

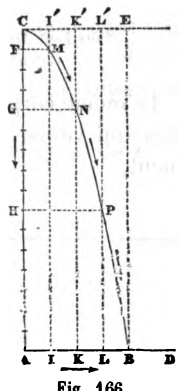


Fig. 166.

Si, maintenant, nous menons les tangentes à la courbe aux points M,N,P, jusqu'à leur rencontre avec l'axe des temps, et que nous mesurions les angles qu'elles font avec cet axe, les tangentes trigonométriques de ces angles représenteront les vitesses aux points considérés. En calculant ces lignes, on trouve qu'elles sont proportionnelles aux temps. Donc *les vitesses sont proportionnelles aux temps*.

L'appareil de M. Morin permet donc d'apprécier très-exactement les lois de la chute des corps, et l'on observe qu'elles sont les mêmes que celles du mouvement uniformément varié.

255. Expression analytique des lois de la chute des corps. — Pour poser analytiquement les lois de la chute des corps, il suffit de reprendre toutes les formules du mouvement uniformément varié ; nous changerons seulement la notation ; nous représenterons l'accélération par g et l'espace parcouru par h.

Si le corps tombe en partant du repos, les formules relatives à son mouvement seront

$$v = gt \quad (1), \quad h = \frac{1}{2} gt^2 \quad (2);$$

d'où l'on tire $t = \frac{v}{g}$ (3), $= \sqrt{2gh}$ (4).

Le même corps étant lancé de bas en haut ou de haut en bas, avec une vitesse initiale v_0, on aura, suivant le sens du mouvement,

$$v = v'_0 + gt \quad (5), \quad h = v'_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \quad (6),$$

$$v = v'_0 - gt \quad (7), \quad h = v'_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (8),$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{v'^2_0}{g} \quad (9).$$

Pour appliquer ces formules, il est nécessaire de connaître la valeur numérique de g, qui est l'accélération due à la pesanteur; cette accélération n'est pas constante pour tous les points du globe ; elle atteint son maximum au pôle pour diminuer ensuite jusqu'à l'équateur, où elle atteint son minimum. Sa valeur peut être déterminée approximativement, soit au moyen de la machine d'Atwood, soit en se servant de l'appareil à indications continues de M. Morin.

Si l'on dispose de la machine d'Atwood, on détermine l'espace que parcourt un corps pendant la première seconde de chute, et l'on prend le double de cet espace, puisque nous avons vu (243) que l'accélération était égale ou double de l'espace parcouru pendant la première seconde. Mais, pour passer de cette accélération obtenue à l'aide de la machine, à celle que la pesanteur donne à un corps tombant librement, il faut multiplier la première par l'inverse du rapport $\frac{p}{P + P' + p}$, car nous savons que cet appareil réduit l'action de la pesanteur dans le rapport du poids additionnel à la somme des poids égaux placés aux extrémités du fil, augmentée du poids additionnel. On trouve ainsi que, à Paris, l'accélération est de 9,80.

En opérant avec la machine de M. Morin, on observe la hau-

teur verticale que parcourt un corps pendant un certain temps; cet espace exprimé en mètres et le temps correspondant exprimé en secondes, étant mis dans la formule (2), on en déduit l'égalité $g = \frac{2h}{t^2}$ qui fournit la valeur de l'accélération g.

Les résultats auxquels on arrive par ces deux expériences sont loin d'être exacts; nous verrons plus tard comment on obtient rigoureusement la valeur de l'accélération due à la pesanteur au moyen du pendule.

Le tableau suivant renferme les valeurs numériques de g en différents points du globe.

LIEUX.	LATITUDES.	VALEURS DE g.
Pôle.	90° N	9.8314
Spitzberg.	79° 49′ 58″	9.8298
Londres.	51° 31′ 8″	9.8110
Paris.	48° 50′ 14″	9.8088
Barcelone.	41° 23′ 15″	9.8053
Équateur.	0°	9.7806
Ile de France.	20° 9′ 40″ S	9.7877

256. Application. — *Un corps est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale $v_0 = 63^m,75$. On demande quelle sera la durée de l'ascension et la hauteur à laquelle le corps s'élèvera?*

Le mouvement du corps sera uniformément retardé, et pour déterminer la durée de l'ascension il suffit, dans la formule (7) $v = v_0 - jt$, de faire $v = o$, et l'on aura $v_0 = jt$; d'où

$$t = \frac{v'_0}{j} = \frac{63^m,75}{9^m,8088} = 6''5.$$

La hauteur à laquelle il s'élèvera sera donnée par la formule (9)

$$h = \frac{1}{2}\frac{v'^2_0}{g} = \frac{\overline{63,75}^2}{2 \times 9,8088} = 205^m25;$$

on l'appelle *hauteur due à la vitesse v_0*.

Actuellement, cherchons quelle sera la vitesse acquise par ce corps en supposant que, partant du repos, il ait à parcourir un espace de 205m,25. Reprenons l'équation (4), nous aurons :

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8088 \times 205{,}25} = 63^{m}{,}75$$

Cette vitesse est appelée *vitesse due à la hauteur h.*

On voit donc que la hauteur à laquelle s'élève un corps lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale v_0, est exactement la même que celle qu'il devrait parcourir de haut en bas, si, partant du repos, il devait posséder en touchant le sol la même vitesse v_0. En d'autres termes, *tout corps lancé verticalement de bas en haut et qui revient au sol, possède des vitesses égales au départ et à l'arrivée.*

§ 6. — MOUVEMENT PÉRIODIQUE. MOUVEMENT UNIFORME DE ROTATION

257. Mouvement périodique. — *Le mouvement est périodique lorsque la vitesse repasse par les mêmes valeurs après certains intervalles de temps appelés périodes ;* si ces périodes sont égales, *le mouvement est uniformément périodique.* Tel est le cas du mouvement du pendule, du châssis d'une scie, du piston des machines à vapeur, des pompes, etc., et de presque toutes les pièces composant les machines.

La figure 167 représente la loi des espaces d'un mouvement uniformément périodique ; pendant chaque période il est successivement retardé et accéléré. Il est retardé dans la première demi-période OA, la courbe OA′ tournant sa concavité vers l'axe des temps ; il est accéléré dans la seconde demi-période AB, la courbe A′B′ tournant sa convexité vers le même axe OX, et la vitesse est presque nulle au milieu de la période.

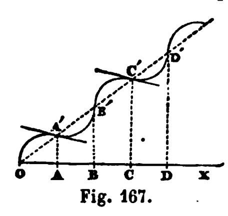


Fig. 167.

On substitue très-souvent à un mouvement uniformément périodique un mouvement uniforme, appelé *mouvement moyen,* tel que les espaces parcourus dans chaque période soient égaux. La vitesse de ce mouvement moyen, appelée *vitesse moyenne,* s'ob-

tiendra en divisant l'espace parcouru pendant une période par le temps nécessaire à ce parcours, et en construisant la loi des espaces de ce mouvement moyen on aura la droite passant par les points O,A',B',C',D'.

258. Mouvement de rotation uniforme. — On dit *qu'un corps est animé d'un mouvement de rotation, lorsqu'il tourne autour d'un axe fixe, et que tous ses points décrivent des circonférences dont les plans sont perpendiculaires à cet axe.* Les meules de moulin, des rémouleurs, les roues d'engrenages, les volants des machines à vapeur, sont des corps animés d'un mouvement de rotation.

Considérons deux points M et N d'un corps quelconque (*fig.* 168), mobile autour de l'axe AB, et supposons qu'au bout d'un certain

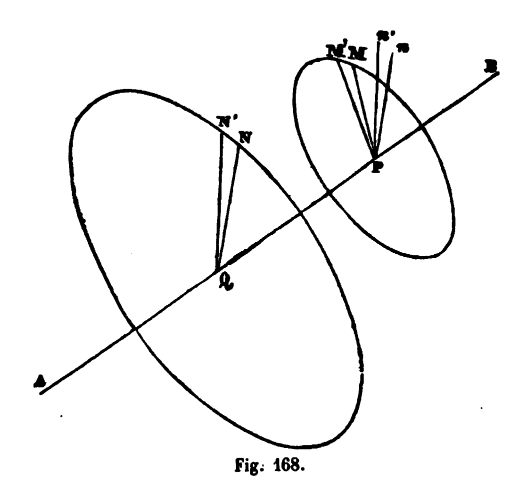


Fig. 168.

temps, le point M se soit transporté en M'; pendant ce même temps, le point N se sera transporté en N', de telle sorte que les angles au centre MPM', NQN' seront égaux, mais les longueurs des arcs seront différentes. En remarquant que les arcs sont proportionnels à leurs rayons, on aura :

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{MP}{NQ}$$

c'est-à-dire que *dans le mouvement de rotation les arcs décrits par les différents points d'un corps sont proportionnels à leurs dis-*

tances à l'axe. Ainsi, un point étant situé à une distance de l'axe de rotation, double, triple, quadruple d'un autre point, le premier parcourra des arcs doubles, triples, quadruples du second.

Les arcs décrits par un même point étant toujours égaux pendant des intervalles de temps égaux, *le mouvement de rotation est uniforme.*

La vitesse, dans le mouvement uniforme, étant l'espace parcouru pendant l'unité de temps et les arcs MM′,NN′, pouvant être considérés comme étant les chemins décrits pendant une seconde, on aura, en désignant par v et v' les vitesses respectives des points M et N,

$$\frac{v}{v'} = \frac{MM'}{NN'} \quad \text{et par suite} \quad \frac{v}{v'} = \frac{MP}{NQ}.$$

Ce qui montre que *les vitesses des différents points d'un corps animé d'un mouvement de rotation uniforme sont proportionnelles à leurs distances à l'axe.*

259. Vitesse angulaire. — D'après ce qui vient d'être exposé, la détermination de la vitesse en différents points d'un corps animé d'un mouvement de rotation uniforme, peut se déduire de la connaissance de la vitesse en un seul point. Celui-ci est supposé à l'unité de distance de l'axe de rotation et le chemin qu'il parcourt pendant une seconde est appelé *vitesse angulaire* et se désigne par ω.

Dès lors, il nous sera facile de déterminer la vitesse v d'un point situé à une distance r de l'axe de rotation, car on a la relation

$$\frac{v}{\omega} = \frac{r}{1} \quad \text{d'où } v = \omega r. \qquad (1)$$

La vitesse d'un point quelconque est donc égale à la vitesse angulaire multipliée par la distance de ce point à l'axe.

Réciproquement, étant donnée la vitesse v, on peut déterminer ω, car on a

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad (2)$$

La vitesse angulaire est donc égale à la vitesse en un point quelconque divisée par la distance de ce point à l'axe.

Connaissant le nombre de tours n par minute du corps en mouvement, on peut en déduire la vitesse angulaire. En effet, l'arc décrit par un point situé à 1 mètre de l'axe a pour mesure 2π pour chaque tour, et pour n tours, il a pour valeur $2\pi n$; l'espace parcouru par seconde ou la vitesse angulaire est donc

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \qquad (3)$$

Réciproquement, la vitesse angulaire étant donnée, le nombre de tours par minute sera exprimé par

$$n = \frac{30\omega}{\pi} \qquad (4)$$

La vitesse angulaire peut encore s'exprimer en fonction du nombre de degrés dont le corps a tourné; si n' représente ce nombre de degrés, on aura :

$$\omega = \frac{2\pi n'}{360} = \frac{\pi n'}{180}. \qquad (5)$$

§ 7. — DES MOUVEMENTS SIMULTANÉS

260. Nous savons (5) que le mouvement d'un corps est *relatif* lorsqu'on rapporte tous ces déplacements successifs à des corps animés eux-mêmes d'un mouvement commun avec le corps que l'on observe, et il est dit *absolu* lorsque les déplacements de ce corps sont rapportés à des points réellement fixes dans l'espace. Les différents mouvements que nous avons étudiés jusqu'ici ont été supposés absolus; nous nous occuperons maintenant des corps animés de deux ou plusieurs mouvements simultanés.

261. Mouvements simultanés d'un point matériel. — Considérons un mobile A (*fig.* 169) parcourant la trajectoire AC sur le pont d'un bateau animé lui-même d'un mouvement tel, que tous ses points décrivent des lignes parallèles à AB. Pour un observateur situé sur le bateau, et qui se déplace avec celui-ci, le mobile A est animé d'un mouvement suivant la trajectoire AC; pour un autre observateur placé en un point fixe sur le rivage, le mobile A décrira une trajectoire AN représentant le mouvement réel du

point dans l'espace. Ce mouvement réel ou absolu provient de la combinaison de deux mouvements dont l'un est le mouvement relatif du point lui-même, et l'autre, celui du bateau. On dit alors *que le mobile est animé de deux mouvements simultanés ;* en réalité, un point ne peut jamais avoir qu'un seul mouvement; on doit donc entendre par mouvements simultanés, le mouvement relatif du point A et celui du bateau, dont la connaissance permet de déterminer le mouvement réel du point dans l'espace.

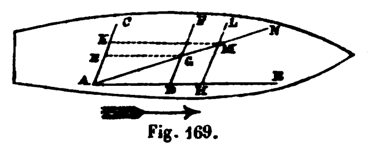


Fig. 169.

Les lignes AC, AB et AN prennent respectivement les noms de *trajectoire relative*, *trajectoire d'entraînement*, *trajectoire absolue*, et les mouvements correspondants, *mouvement relatif*, *mouvement d'entraînement* et *mouvement absolu.*

262. Principe de l'indépendance des mouvements simultanés.—Le principe de l'indépendance des mouvements simultanés consiste en ce que, si un mobile est animé de plusieurs mouvements simultanés, ceux-ci se produisent indépendamment les uns des autres sans se modifier.

Ce principe nous est démontré par l'observation des faits ; ainsi, le mouvement du mobile sur le bateau est le même que si celui-ci était au repos ; il en est de même pour une personne qui se transporterait de l'avant à l'arrière et réciproquement. Si un enfant, assis dans un wagon de chemin de fer, lance verticalement une orange, celle-ci retombera dans ses mains malgré le chemin horizontal parcouru par le wagon pendant l'ascension et la descente de l'orange.

Les divers mouvements simultanés se produisant indépendamment les uns des autres, on pourra déterminer le mouvement absolu d'un point connaissant les mouvements simultanés auxquels il est soumis. Nous déterminerons d'abord la trajectoire absolue.

263. Détermination de la trajectoire absolue. — Imaginons qu'un mobile rapporté à un système d'axes mobiles OX, OY, OZ (*fig.* 170), décrive une trajectoire relative AB, pendant que ce système est entraîné d'un mouvement tel, que la ligne AB occupe successivement les diverses positions A'B', A''B'', A'''B'''. Étant

donnés la trajectoire relative et le mouvement dont sont animés les axes mobiles, il est facile de trouver la trajectoire absolue décrite par le mobile. En effet, supposons qu'aux temps t, t', t'', le

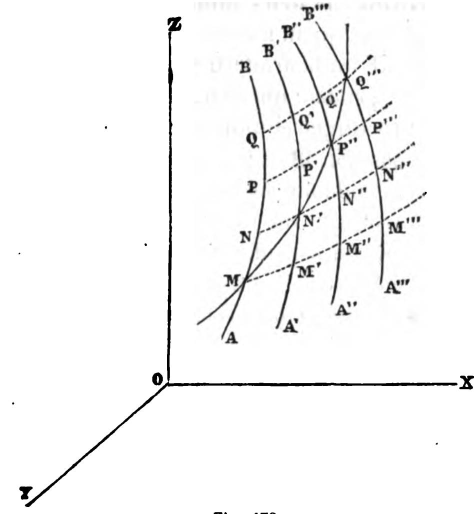


Fig. 170.

mobile occupe, sur sa trajectoire relative, les positions successives M, N, P, Q, et que, pendant ces mêmes temps, AB se soit transportée en A'B', A''B'', A'''B'''. Au commencement du temps t, le mobile est en M ; au bout de ce temps t, il se trouve situé en N sur la ligne AB qui, pendant ce temps, s'est transportée en A'B' ; la position réelle du mobile au bout du temps t est donc en N' sur A'B'. Au bout du temps t', le mobile occupera la position P sur sa trajectoire relative, qui pendant ce temps se sera transportée en A''B'' ; la position réelle du mobile au bout du temps t' est donc en P'' sur A''B''. On verrait de même qu'au bout du temps t'' le mobile occuperait la position Q''' sur A'''B'''. En unissant tous les points M, N', P'', Q''' par un trait continu, on obtiendra la trajectoire réelle ou absolue du mobile dans l'espace.

264. Composition des mouvements. — Le problème de la composition des mouvements peut s'énoncer ainsi : *un mobile étant animé de plusieurs mouvements simultanés connus, déterminer son mouvement absolu.*

Les divers mouvements simultanés prennent souvent le nom de *mouvements composants*, et le mouvement absolu celui de *mouvement résultant*.

265. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes. — Supposons qu'au bout d'un temps t, un mobile ait parcouru la longueur AE sur la droite AC (*fig.* 169), d'un mouvement rectiligne et uniforme, pendant que la ligne AC est elle-même entraînée d'un mouvement rectiligne et uniforme tel, que, au bout du temps t, elle occupe la position DF. Chacun des mouvements simultanés se produisant indépendamment l'un de l'autre, le mobile se trouvera, au bout du temps t, sur la droite DF en un point G, obtenu en portant DG = AE. En considérant le mobile à un autre instant t', on verrait de même qu'il se trouve en M. Joignons le point A aux points G et M. La trajectoire relative AC se transportant parallèlement à elle-même d'un mouvement uniforme, on aura

$$\frac{AD}{AH} = \frac{t}{t'} = \frac{EG}{KM}.$$

Le mobile étant de même animé d'un mouvement uniforme, on a

$$\frac{AE}{AK} = \frac{t}{t'}.$$

A cause du rapport commun il vient

$$\frac{EG}{KM} = \frac{AE}{AK}.$$

Les deux triangles AKM et AEG ayant un angle égal AEG = AKM comme correspondants, et les côtés proportionnels, sont semblables et donnent

$$\text{angle KAM} = \text{angle EAG}.$$

Par conséquent les points G et H se trouvent sur une même ligne droite qui est la diagonale du parallélogramme construit sur les chemins composants. De plus, le mouvement du mobile sur cette diagonale est uniforme, car, de la similitude des triangles AKM et AEG, on tire

$$\frac{AE}{AK} = \frac{AG}{AM}; \quad \text{mais } \frac{AE}{AK} = \frac{t}{t'}, \quad \text{donc} \quad \frac{AG}{AM} = \frac{t}{t'}.$$



Les espaces parcourus suivant le chemin résultant étant proportionnels aux temps employés à les parcourir, il en résulte que le mobile est animé d'un mouvement uniforme suivant la diagonale AM.

266. Composition des vitesses. — Connaissant la composition des chemins, on en déduit la composition des vitesses.

Les vitesses des mouvements relatif et d'entraînement prennent les noms de *vitesse relative* et *vitesse d'entraînement;* on les désigne souvent sous le nom collectif de *vitesses composantes;* la *vitesse absolue* ou *résultante* est celle du mouvement absolu ou résultant.

On admet que, *si un corps est animé de plusieurs vitesses simultanées, la vitesse résultante est la même que si les vitesses composantes agissaient les unes indépendamment des autres sur le corps.*

267. Parallélogramme des vitesses. — *La vitesse résultante de deux vitesses simultanées est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme dont les côtés représentent en grandeur et en direction les vitesses composantes.* En effet, la vitesse, dans le mouvement uniforme, étant égale à l'espace parcouru divisé par le temps, on a sur la figure précédente

$$\frac{AE}{t}=\frac{AD}{t}=\frac{AG}{t}.$$

On conclut de là que si AE et AD représentent en grandeur et en direction les vitesses composantes, AG, ou la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites, représentera en grandeur et en direction la vitesse résultante.

Remarque I. — *La vitesse résultante de deux vitesses composantes de même sens et de même direction est égale à la somme de ces vitesses.* Si elles sont de sens contraire, *la vitesse résultante est égale à la différence des vitesses composantes.*

Remarque II. — *La vitesse résultante de plusieurs vitesses composantes de sens contraire et de même direction est égale à la somme algébrique des vitesses composantes.*

Nous traiterons rapidement la composition et la décomposition des vitesses, car, tout ce qui a été dit relativement aux forces, s'ap-

plique, sans restriction, aux vitesses ; nous énoncerons seulement les principaux théorèmes.

268. Polygone des vitesses. — *Lorsqu'un mobile est animé de plusieurs vitesses simultanées, la vitesse résultante est représentée en grandeur et en direction par le côté qui ferme le polygone dont les autres côtés sont respectivement égaux et parallèles aux droites qui représentent en grandeur et en direction les vitesses composantes.*

269. Cas particulier. Parallélipipède des vitesses. — *Si un mobile est animé de trois vitesses simultanées, non situées dans un même plan, la vitesse résultante est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède dont les trois arêtes, issues d'un même sommet, représentent en grandeur et en direction les trois vitesses composantes.*

270. Décomposition des vitesses. — De même qu'une force, une vitesse quelconque peut être considérée comme la résultante de plusieurs vitesses, et, à ce titre, elle peut être décomposée en deux ou plusieurs vitesses composantes.

271. Décomposition d'une vitesse en deux autres vitesses simultanées.— Ce problème peut présenter 4 cas différents, comme il a été dit dans la décomposition des forces. On peut se donner :

1° La direction des vitesses composantes ;

2° L'intensité des vitesses composantes;

3° L'une des composantes en grandeur et en direction;

4° L'une des vitesses composantes en grandeur et l'autre en direction.

272. Décomposition d'une vitesse en trois autres vitesses simultanées. — Une vitesse donnée peut également être considérée comme la résultante de trois vitesses dont les directions ne sont pas dans un même plan. Donc *les vitesses composantes sont données en grandeur et en direction par les trois arêtes issues du même sommet d'un parallélipipède dont la diagonale représenterait la vitesse donnée en grandeur et en direction.*

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le mobile était animé d'un mouvement uniforme. Si le mouvement était varié d'une manière quelconque, les mêmes théorèmes s'appliqueraient à la composition et à la décomposition des vitesses simultanées. En effet, la vitesse d'un mouvement, à un instant quelconque, étant la vitesse du mouvement uniforme qui succéde-

rait au mouvement varié à l'instant considéré, on peut admettre que les vitesses relative et d'entraînement du mouvement varié sont sensiblement constantes à cet instant, et la vitesse absolue se déterminera comme on l'a fait pour le mouvement uniforme.

273. Application de la composition des mouvements. Méthode de Roberval pour mener des tangentes aux courbes. — A la fin du dix-septième siècle, Roberval, célèbre géomètre, imagina une remarquable application de la composition des mouvements pour mener les tangentes à certaines courbes.

Toutes les fois qu'une courbe pourra être assimilée à la trajectoire d'un mouvement résultant, décrite par un mobile dont on connaît les mouvements composants, si l'on peut déterminer les vitesses de ces divers mouvements, ou simplement les rapports qui les lient entre elles, on obtiendra, par la composition de ces vitesses, la direction de la vitesse résultante. Or, si un mobile décrit une courbe quelconque, la direction de sa vitesse en un point est évidemment la tangente à la courbe en ce point; donc, la direction de la vitesse résultante obtenue par la composition des vitesses simultanées donnera la direction de la tangente.

274. Tangente à l'ellipse. — L'ellipse est, comme on le sait, une courbe plane telle, que la somme des distances d'un point quelconque à deux points fixes, appelés foyers, est constante.

La courbe peut être considérée, relativement au rayon vecteur AF (*fig.* 171), comme étant décrite par le point A glissant avec une vitesse V suivant la ligne AF, pendant que celle-ci tourne autour du point F avec une vitesse d'entraînement V′. La direction de la vitesse absolue étant celle de la tangente à la courbe, composons les deux vitesses simultanées V et V′. Soit AB la vitesse de

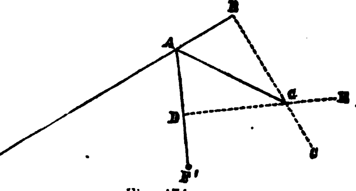


Fig. 171.

glissement du point A sur le rayon vecteur AF; si l'on connaissait la vitesse d'entraînement, en la portant sur la perpendiculaire BC élevée en B sur BF, et joignant le point ainsi obtenu au point A, on aurait, en grandeur et en direction, la vitesse résultante du point A, et par suite la tangente à l'ellipse en ce point.

De même, la courbe peut être considérée, relativement au rayon

vecteur AF′, comme étant décrite par le point A, glissant avec une vitesse V′ suivant la ligne AF′, pendant que celle-ci tourne autour du point F′ avec une vitesse d'entraînement V. La direction de la vitesse absolue étant celle de la tangente à la courbe, composons les deux vitesses simultanées V et V′. Soit AD = AB (la somme des rayons vecteurs AF + AF′ étant constante), la vitesse de glissement du point A sur le rayon vecteur AF′; si l'on connaissait la vitesse d'entraînement autour du point A, en la portant sur la perpendiculaire DE élevée en D sur AF′ et joignant le point ainsi obtenu à A, on aurait, en grandeur et en direction, la vitesse résultante du point A et par suite la tangente à l'ellipse en ce point. Mais la direction de cette vitesse devant se trouver à la fois sur les deux perpendiculaires BC et DE, se trouve à leur intersection G, et en joignant AG on aura la tangente à l'ellipse au point A.

Les triangles ADG et ABG étant égaux comme rectangles, l'un en B, l'autre en D, et ayant l'hypoténuse égale et un côté égal, il s'ensuit que l'angle GAD = GAB, ce qui montre que la ligne AG divise en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre, caractère distinctif de la tangente à l'ellipse.

275. Théorème. — *La vitesse de la projection d'un mobile est égale à la projection de la vitesse de ce mobile.* Supposons que l'on projette, sur un axe fixe donné, toutes les positions successives d'un mobile M animé d'une vitesse V, et imaginons un autre mobile fictif qui, se mouvant suivant cet axe, occuperait à chaque instant une position déterminée par la projection de M. La vitesse réelle V est liée à la vitesse de sa projection par une relation très-simple ; en effet, la vitesse V peut être considérée comme étant la résultante de deux vitesses composantes, dont l'une serait perpendiculaire à l'axe, et dont l'autre serait parallèle à cet axe ; cette dernière est précisément la vitesse du mobile fictif ou la projection de la vitesse réelle V.

En désignant par α l'angle que fait l'axe avec la direction de V, on aura, pour l'expression de la vitesse projetée V′,

$$V' = V \cos \alpha.$$

Donc, la vitesse de la projection est égale à la projection de la vitesse.

CHAPITRE II

DES TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT

§ 1. — ORGANES DE TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT

276. Nous avons vu que le mouvement, considéré par rapport à l'espace, est rectiligne ou circulaire (ou plus généralement curviligne), et qu'il peut être continu ou alternatif ; de là, les quatre mouvements suivants :

1° Mouvement rectiligne continu,
2° Mouvement rectiligne alternatif,
3° Mouvement circulaire continu,
4° Mouvement circulaire alternatif.

On désigne sous le nom d'*organes de transformations de mouvement*, les organes employés pour transformer le mouvement dont on dispose en un autre mouvement déterminé.

On appelle *transmission de mouvement* l'ensemble des organes qui servent à communiquer le mouvement d'une machine motrice à une autre machine quelconque, ou encore l'ensemble des organes qui servent à communiquer le mouvement d'une machine à une autre partie d'elle-même.

Plusieurs classifications ont été données de ces divers organes ; le cadre de cet ouvrage ne nous permet pas d'en adopter une. Nous nous contenterons d'indiquer les principaux organes qui servent aux transformations les plus employées dans l'industrie, en les groupant dans l'ordre qui nous semblera le plus simple et le plus approprié à leur nature, et nous indiquerons, pour chacun d'eux, le genre de transformation qu'ils opèrent.

En combinant les mouvements entre eux et chacun d'eux avec

lui-même, on forme le tableau suivant comprenant toutes les transformations de mouvement.

Mouvement.	rectiligne continu.. .	en rectiligne.. .	continu.
			alternatif.
		en circulaire.. .	continu.
			alternatif.
	rectiligne alternatif..	en rectiligne.. .	continu.
			alternatif.
		en circulaire. ..	continu.
			alternatif.
	circulaire continu.. .	en rectiligne. ..	continu.
			alternatif.
		en circulaire. ..	continu.
			alternatif.
	circulaire alternatif. .	en rectiligne.. .	continu.
			alternatif.
		en circulaire.. .	continu.
			alternatif.

§ 2. — PLAN INCLINÉ. — COIN. — VIS. — ROULEAUX

277. Plan incliné. — *Lorsqu'un corps se meut sur un plan incliné, le chemin qu'il parcourt dans le sens horizontal est au chemin qu'il parcourt dans le sens vertical comme la hauteur du plan est à sa base.*

En effet, supposons que le corps M se soit transporté en M' (*fig.* 172) au bout d'un certain temps ; le chemin parcouru MM' est le chemin résultant de deux chémins composants donnés en grandeur et en direction par les droites M'P et MP qui représentent, l'un M'P, le déplacement dans le sens vertical, et l'autre MP, le déplacement dans le sens horizontal.

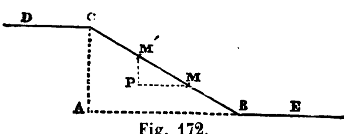


Fig. 172.

Les triangles ABC et MM'P sont semblables et donnent

$$\frac{M'P}{MP} = \frac{AC}{AB} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Les mêmes triangles donnent encore

$$\frac{MM'}{MP} = \frac{BC}{AB},$$

c'est-à-dire *que le chemin parcouru dans le sens de la longueur du plan est au chemin parcouru dans le sens horizontal comme la longueur du plan est à sa base.*

Si le corps s'élève d'un mouvement uniforme suivant BC, il se déplacera uniformément dans le sens vertical, et par suite on peut dire que *la vitesse d'ascension ou la vitesse verticale est à la vitesse de transport le long du plan comme la hauteur de ce plan est à sa longueur.*

278. Le plan incliné peut être employé pour transformer un mouvement rectiligne continu dirigé horizontalement en un mouvement rectiligne continu dirigé verticalement. On obtient cette transformation au moyen d'une tige CD guidée verticalement (*fig.* 173), et terminée par un galet qui s'appuie sur la face EF d'un plan incliné EFI, guidé horizontalement. Si le plan incliné glisse vers la gauche, la tige s'élèvera, tandis qu'elle s'abaissera dans le glissement du plan en sens contraire. On voit qu'en faisant mouvoir le plan incliné de droite à gauche et de gauche à droite, la tige s'élèvera et s'abaissera alternativement. Donc cet organe sert encore à transformer un mouvement rectiligne alternatif guidé horizontalement en un autre mouvement de même espèce dirigé verticalement, *et le chemin parcouru par la tige est au chemin parcouru horizontalement par le plan comme la hauteur de ce plan est à sa base.*

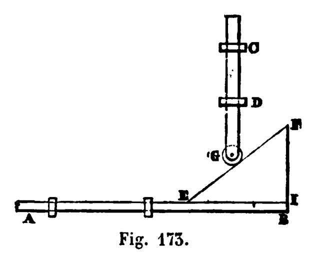


Fig. 173.

279. Coin. — Le *coin* est un prisme triangulaire ABDCEF (*fig.* 174), ordinairement en fer ou en bois très-dur, que l'on introduit par l'arête EF, correspondant à l'angle dièdre le plus aigu, soit entre les parties d'un même corps que l'on veut séparer, soit pour opérer la compression de certains corps disposés à cet effet. Le coin n'est autre chose qu'un plan incliné employé pour d'autres usages.

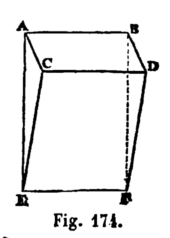


Fig. 174.

La face ABDC s'appelle la *tête* du coin; l'arête EF, le *tranchant*, et les rectangles CDFE et AEFB, qui produisent par leur enfonce-

ment le déplacement latéral des corps avec lesquels ils se trouvent en contact, sont appelés les *faces* du coin.

On distingue deux sortes de coin : 1° le *coin simple* ou à *une face*, dont la section droite est un triangle rectangle, et 2° le *coin double*, ou à *deux faces*, dont la section droite est un triangle quelconque ; dans ce dernier cas, les faces latérales peuvent être également inclinées sur la tête ; la section droite est alors un triangle isocèle, et le coin ainsi formé est dit *coin isocèle ;* c'est la forme la plus généralement adoptée.

280. Coin à une face. — *Lorsqu'on emploie un coin simple, le chemin parcouru par le coin est à l'écartement produit, comme la hauteur du coin est à la largeur de sa tête.*

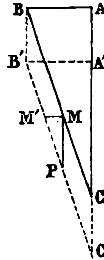


Fig. 175.

En effet, soit ABC le profil d'un coin à une face (*fig.* 175), et supposons qu'il prenne, au bout d'un certain temps, la position A'B'C' ; tous ses points se seront déplacés, parallèlement à eux-mêmes, de la quantité MP = BB', et l'un des points pressés M sera venu en M' ; l'écartement produit est donc MM'. Les triangles semblables ABC et MM'P donnent

$$\frac{MP}{MM'} = \frac{AC}{AB} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

281. Coin à deux faces. — *Lorsqu'on emploie un coin à deux faces, le chemin parcouru par le coin est à l'écartement produit comme la hauteur du coin est à la largeur de sa tête.*

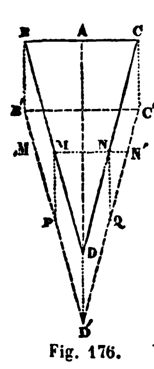


Fig. 176.

En effet, soit BCD (*fig.* 176) un coin isocèle qui, au bout d'un certain temps, prend la position B'C'D' ; tous ses points se sont déplacés, parallèlement à eux-mêmes, de la quantité MP = NQ = BB', et les points pressés M et N se seront transportés en M' et N' ; l'écartement total produit est donc égal à MM' + NN' = 2MM'.

Ce coin pouvant être considéré comme étant formé par deux coins simples adossés par la base AD, nous aurons, d'après ce que nous avons trouvé plus haut,

$$\frac{MP}{2MM'} = \frac{AD}{2AB} = \frac{AD}{BC} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

282. Usages du coin. — Le coin est employé, non-seulement comme organe de compression, mais il est la base de tous les outils nécessaires au travail des matériaux ; il sert encore pour opérer un serrage convenable entre les différentes pièces des machines et il prend, dans ce cas, le nom de *clavette*.

La forme à donner aux outils varie suivant la nature du travail à exécuter et du degré de fini qui doit y être apporté ; en général, leur tranchant doit être aussi aigu que possible, car ils pénètrent plus facilement dans la matière à travailler. Cet angle est limité par la dureté du corps sur lequel on opère, car le tranchant ne doit point se détériorer. Les coins à fendre le bois, les haches, les ciseaux des charpentiers et des menuisiers, les rabots, les couteaux, etc., nous représentent des coins de formes diverses et appropriés aux différents besoins.

Le coin est employé dans une machine appelée *presse à coins*, pour exercer des pressions et principalement pour extraire les matières grasses des graines oléagineuses.

La puissance peut agir sur le coin de deux manières différentes : 1° par choc, comme dans les coins pour fendre le bois, les clous, les presses à coins ; 2° par pression continue comme dans les clavettes.

283. Vis et écrou. — **1° Vis.** La *vis* se compose d'un cylindre droit à base circulaire, appelé *noyau*, sur lequel s'enroule, en hélice, une saillie nommée *filet*, qui doit avoir partout la même section par rapport à un plan passant par l'axe du cylindre.

284. Hélice. — L'*hélice* est une courbe qui peut être considérée comme étant décrite par un point qui se mouvrait le long d'une génératrice, supposée fixe, d'un cylindre, pendant que celui-ci tournerait d'un mouvement uniforme. La quantité dont s'élève le point décrivant, pour un tour entier du cylindre, se nomme le *pas* de l'hélice, et la portion de courbe décrite pendant ce tour prend le nom de *spire*.

On construit l'hélice d'une manière très-simple. Imaginons une feuille de papier rectangulaire AA'MM' (*fig.* 177), ayant pour longueur la circonférence de base du cylindre développée, et pour hauteur la hauteur de ce cylindre. La surface du rectangle sera égale à la surface latérale du cylindre et s'y appliquera exactement.

Cela posé, portons sur les côtés AM et A′M′ des longueurs AC, CE, EM et A′C′,C′E′,E′M′ égales au pas de l'hélice, et joignons les

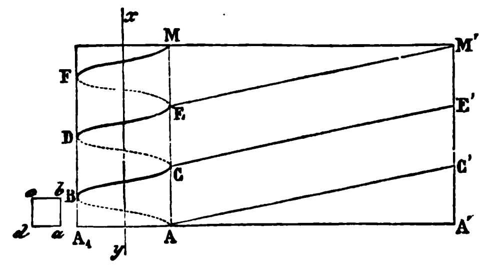
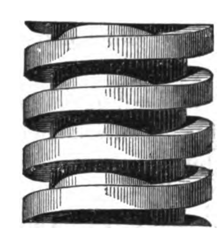


Fig. 177.

points A,C,E aux points C′,E′,M′. En enroulant la feuille de papier sur le cylindre, les droites AC′,CE′,EM′ se transformeront en une courbe continue ABCDEFM qui sera l'hélice que l'on s'est proposé de construire, et dont chacune des droites nommées formera une spire.

285. Génération de la vis. — Considérons l'hélice ABCD... tracée sur le cylindre droit à base circulaire de diamètre AA_1 ; si l'on imagine une figure plane *abcd*, dont le plan passe constamment par l'axe *xy*, et qui se meuve de telle sorte que l'un de ses sommets *a* décrive l'hélice ABCD..., on obtiendra le filet de la vis ; l'ensemble du noyau et du filet prend le nom de *vis*.



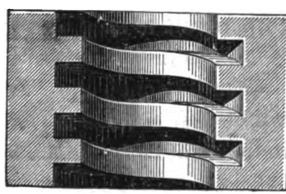


Fig. 178.

Si la figure *abcd* qui engendre le filet, est un carré, on dit que la vis est *à filets carrés* (*fig.* 178) ; si cette figure est un triangle, la vis est dite à *filets triangulaires*.

On appelle *pas* de la vis, le pas de l'hélice directrice, c'est-à-dire la distance verticale comprise entre deux spires consécutives, ou, encore, la hauteur verticale comprise entre deux révolutions du filet.

Les vis en fer d'un assez fort diamètre sont généralement à filets

carrés. Toutes les vis en bois, quelles que soient leurs dimensions, sont toujours à filets triangulaires, et le triangle générateur est un triangle isocèle rectangle dont l'hypoténuse s'appuie sur le noyau. Pour les vis en fer d'un faible diamètre, le triangle générateur est tantôt un triangle équilatéral, tantôt un triangle isocèle dont la base s'appuie sur le noyau et dont les côtés forment entre eux un angle inférieur à 60°.

Dans les vis à filets triangulaires, le pas est égal à la base du triangle générateur ; il résulte de là que la surface extérieure du noyau est complétement recouverte des spires successives du filet, ce qui n'a pas lieu dans les vis à filets carrés, où la partie recouverte est précisément égale à celle qui reçoit le filet.

286. 2° Écrou. — *L'écrou* (*fig.* 178) est engendré par la même figure plane qui a servi à la formation du filet de la vis ; mais au lieu de former une saillie, elle détermine, dans un cylindre creux de même diamètre intérieur que le diamètre du noyau de la vis, une rainure hélicoïdale qui offre en creux une forme exactement pareille à la saillie de la vis, et dans laquelle vient s'engager cette saillie. Si l'on maintient l'écrou fixe et qu'on y introduise l'extrémité de la vis, celle-ci prendra, en la faisant tourner, outre son mouvement de rotation, un mouvement de translation produit par le glissement de ses filets sur ceux de l'écrou, et pour une révolution entière elle se sera avancée, parallèlement à son axe, d'une quantité égale au pas. Au contraire, si la vis est fixe, et que l'on fasse tourner l'écrou, celui-ci se déplacera, parallèlement à l'axe, d'une quantité qui, pour un tour, sera égale au pas. On pourra donc transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne continu.

Pour communiquer un mouvement de rotation à la vis, celle-ci est ordinairement munie, à l'une de ses extrémités, d'une partie plus grosse, prismatique ou cylindrique, qu'on nomme *tête*, et cette tête est percée d'un ou plusieurs trous pouvant recevoir des leviers qu'on manœuvre à la main.

287. Rapport des chemins parcourus. — *Le chemin parcouru par la vis ou par l'écrou est au chemin parcouru par la main qui agit comme le pas de la vis est à la longueur de la circonférence décrite par cette main.* En effet, soit h le pas de la vis et R le rayon de la circonférence décrite par la main qui agit sur le levier.

Pendant une révolution de la vis, celle-ci se sera élevée, dans le sens de son axe, d'une quantité h égale au pas, et la main qui agit aura parcouru la longueur $2\pi R$ de la circonférence de rayon R. Donc le rapport des chemins parcourus sera donné par la relation

$$\frac{h}{2\pi R}.$$

288. Usages de la vis. — La vis est un des organes de transformation dont l'emploi est le plus fréquent; ses usages sont très-variés et diversement combinés.

1° *La vis est mobile et l'écrou est fixe.* — La presse représentée par la figure 179 nous offre un exemple de cette transformation. La vis A est terminée, à son extrémité inférieure, par une partie C d'un plus fort diamètre, percée de trous destinés à recevoir des leviers. Un plateau D, dont le mouvement de rotation est empêché

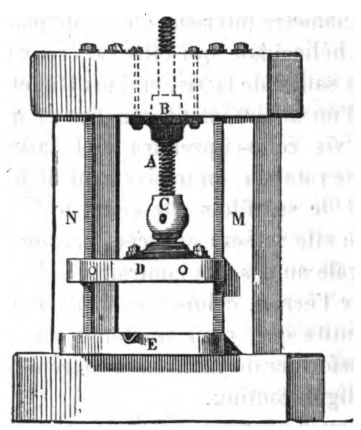


Fig. 179.

par deux oreilles latérales qui s'engagent dans des rainures verticales pratiquées dans les montants M et N, participe au mouvement de translation de la vis. L'écrou B est boulonné à une forte traverse supérieure qui relie les deux montants. Si l'on fait tourner la vis A, le plateau D descendra et les corps placés entre D et E seront comprimés.

La vis est encore mobile dans les balanciers à découper, à frapper les monnaies, à percer et dans les vérins.

2° *L'écrou est mobile, mais il ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de son axe.* — La vis prend alors un mouvement de translation dans le sens de son axe, comme dans les vis des anciennes manœuvres de vannes, dans les appareils de serrage appelés *clefs à vis*, et dans les lorgnettes ou jumelles de théâtre.

3° *L'écrou est mobile, mais il ne peut prendre qu'un mouvement de translation parallèle à l'axe.* — La vis est alors maintenue de façon à ne pouvoir prendre qu'un mouvement de rotation. Cette disposition est employée dans les machines à diviser, à fileter, dans les vis calantes, vis de rappel et vis micrométriques.

4° *La vis est fixe.* — L'écrou est animé de deux mouvements, l'un de translation et l'autre de rotation, comme dans les boulons de serrage.

289. Vis différentielle de Prony. — *La vis différentielle de Prony* se compose d'un noyau portant, à ses deux extrémités, deux vis de pas différents h et h', dont l'une pénètre dans un écrou fixe et l'autre dans un écrou mobile en translation.

Supposons que h, pas de la vis s'engageant dans l'écrou mobile, soit plus grand que h', pas de la vis s'engageant dans l'écrou fixe. Pendant que la vis fait un tour, elle pénètre dans l'écrou fixe d'une quantité égale au pas correspondant h'; si l'écrou mobile faisait corps avec la vis, il se serait approché de l'écrou fixe de cette quantité; mais, pendant ce temps, il s'en est éloigné d'une quantité h. Par conséquent, la quantité dont l'écrou mobile se sera éloigné de l'écrou fixe sera $h - h'$. En rendant cette différence très-faible, on rendra le déplacement de l'écrou mobile, pour un tour de la vis, aussi petit qu'on le voudra.

290. Vis à pas contraires. — On emploie quelquefois une vis dite *à pas contraires*, formée d'un noyau sur lequel sont disposées, à ses deux extrémités, deux vis dont les filets sont inclinés en sens contraire, et chacune de ces vis reçoit un écrou qui ne peut se mouvoir qu'en translation. En faisant tourner la vis qui ne peut prendre qu'un mouvement de rotation, les deux écrous se rapprocheront ou s'éloigneront suivant le sens du mouvement. Si les pas sont égaux, le chemin parcouru par chacun des écrous, pour un tour de la vis, sera égal au pas, et les écrous se rapprocheront ou s'éloigneront d'une quantité double du pas.

Cette disposition est employée dans les tendeurs d'attelage qui relient les wagons d'un même train, et pour réunir les extrémités de deux conduits qui doivent être dans le prolongement l'un de l'autre. On l'emploie encore dans la détente Meyer pour éloigner ou pour rapprocher deux plaques mobiles servant à régler la détente.

291. Rouleaux.— On appelle *rouleaux* des cylindres en bois ou en métal servant à déplacer horizontalement des pierres, des pièces de charpente, etc.

Ordinairement, la pièce à transporter est placée sur deux rouleaux (*fig.* 180) et, en agissant à l'une des extrémités de cette pièce avec un levier, on la force à avancer en faisant tourner les

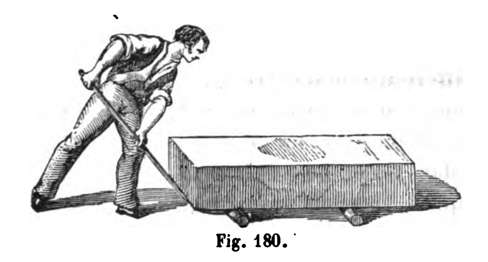


Fig. 180.

rouleaux qui transforment ainsi un mouvement circulaire continu en rectiligne continu.

292. Rapport des chemins parcourus. — *Le chemin parcouru par le corps est le double du chemin parcouru par les axes des rouleaux.* En effet, supposons que les rouleaux de rayon R aient accompli une révolution entière; le chemin qu'ils auront parcouru sur le sol sera évidemment égal à la longueur de leur circonférence ou à $2\pi R$, et le corps se sera avancé de la même quantité $2\pi R$ que les axes des rouleaux; mais, pendant ce temps, tous les points de la surface des rouleaux seront venus en contact avec les points successifs du corps; celui-ci avancera donc, par rapport aux rouleaux, d'une quantité qui est encore égale à $2\pi R$. Donc, le chemin réel parcouru par le corps a pour valeur 2 fois $2\pi R$, c'est-à-dire qu'il parcourt un chemin double de celui parcouru par les axes des rouleaux, ce qui fait que les rouleaux s'échappent très-souvent par l'arrière et qu'il faut les rapporter à l'avant.

§ 3. — TRANSMISSION PAR POULIES ET COURROIES

293. Position des axes. — Lorsqu'on veut transmettre le mouvement circulaire d'un arbre à un autre, les deux axes peuvent occuper des positions très-diverses qu'on rapporte aux quatre cas suivants :

1° *Axes parallèles situés à grande ou à petite distance;*

2° *Axes se coupant sous un certain angle ou situés dans des plans perpendiculaires entre eux ;*

3° *Axes situés dans le prolongement l'un de l'autre;*

4° *Axes situés d'une manière quelconque.*

294. Axes parallèles situés à grande distance. — Si l'on dispose d'un arbre animé d'un mouvement circulaire continu et qu'on veuille transmettre ce mouvement à un autre arbre parallèle situé à une grande distance, on monte, sur chacun de ces arbres et dans un même plan perpendiculaire à leurs axes, une poulie en bois ou plus ordinairement en fonte, que l'on réunit l'une à l'autre par l'intermédiaire d'une courroie sans fin, c'est-à-dire une courroie dont les deux extrémités sont solidement reliées entre elles. Ces courroies se font généralement en cuir et quelquefois en gutta-percha.

La poulie qui transmet le mouvement prend le nom de *poulie motrice*, et l'autre s'appelle *poulie conduite*.

Au moment de la mise en marche, la courroie glisse toujours sur la poulie motrice pendant un certain temps; mais, en vertu du frottement développé entre les surfaces en contact, il en résulte une certaine adhérence entre la poulie et la courroie, et celle-ci se met en mouvement. Elle glisse de nouveau sur la poulie conduite qui, au bout d'un certain temps, est entraînée et prend un mouvement de rotation.

Si la rotation des deux axes doit toujours avoir lieu dans le même sens, on dispose les brins de la courroie suivant les tangentes extérieures aux circonférences des deux poulies; dans le cas contraire, la courroie devra être dirigée suivant les tangentes intérieures.

Proposons-nous de déterminer la vitesse angulaire des axes auxquels le mouvement est transmis par poulies et courroies.

295. Les axes tournent dans le même sens. — Soit O et O′ les projections verticales des axes (*fig.* 181, (1), OA et O′A′ les rayons des poulies, que nous désignerons par R et R′, ω et ω' les vitesses angulaires correspondantes. Tout glissement de la courroie sur la poulie étant supposé nul, la quantité dont la courroie se déroule sur l'une des poulies sera égale à la quantité dont elle s'enroule sur l'autre ; par suite, la vitesse en tous les points de la courroie est constante, et il en est de même aux circonférences extérieures des poulies. On aura donc

$$R\,\omega = R'\,\omega'; \quad \text{d'où} \quad \frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux rayons des poulies.

Les nombres de tours N et N′ étant proportionnels aux vitesses angulaires, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{N}{N'}.$$

En comparant cette égalité avec la précédente, il vient

$$\frac{R}{R'} = \frac{N'}{N}.$$

Les rayons sont inversement proportionnels aux nombres de tours. Ainsi, l'une des poulies devant faire 3, 4, 5 tours, pendant que l'autre n'en fera qu'un seul, le rayon de la première poulie devra être 3, 4, 5 fois plus petit que le rayon de la seconde.

296. Détermination de la longueur de la courroie. — Appelons α l'angle au centre AOB, d la distance des centres O et O′, et par le point O′ menons O′C parallèle à AA′. La longueur totale l de la courroie a pour valeur

$$l = 2AA' + \text{arc } AMB + \text{arc } A'M'B'.$$

Or, dans le triangle O′OC, on a $\quad O'C \text{ ou } AA' = d \times \sin\frac{\alpha}{2}.$

On a aussi $\quad \text{arc } AMB = (2\pi - \alpha)R \quad \text{et} \quad \text{arc } AM'B' = \alpha R'.$

En remplaçant ces quantités par leurs valeurs dans l'expression

de l on aura

$$l = 2d \sin\frac{\alpha}{2} + (2\pi - \alpha) R + \alpha R',$$

$$l = 2d \sin\frac{\alpha}{2} + 2\pi R + \alpha (R' - R).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de l'angle α en fonction des quantités connues R, R′ et d; pour cela, remarquons que dans le triangle OCO′ on a

$$OC = OO' \times \cos\frac{\alpha}{2}; \quad \text{d'où} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{OC}{OO'} = \frac{R - R'}{d},$$

équation qui détermine la valeur de l'angle α.

297. Les axes tournent en sens contraire. — Soit O et O′ les projections verticales des axes (*fig.* 181, (2); on démontrerait,

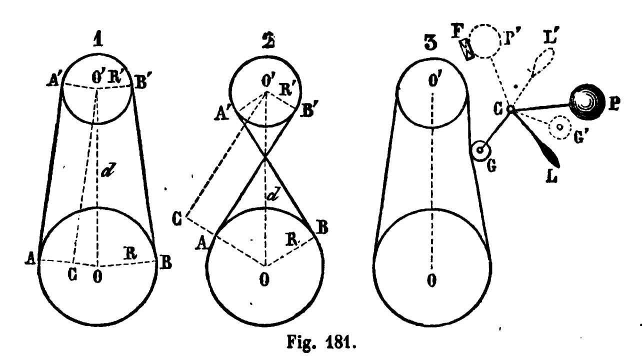


Fig. 181.

comme précédemment, que *les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux rayons des poulies, et que ces rayons sont inversement proportionnels aux nombres de tours.*

La direction des brins étant dirigée suivant les tangentes intérieures AB′ et A′B, l'arc embrassé par la courroie est plus grand que dans la disposition précédente; par suite, on obtient une plus grande adhérence de la courroie sur la poulie, et elle peut supporter un effort plus considérable; aussi doit-on croiser la courroie si l'effort à vaincre est très-grand, car il y a moins de chances de glissement.

La courroie qui doit être croisée, ne peut plus conserver, sur

toute sa longueur, la position à plat qu'elle possède sur les poulies, car, au point de croisement, les deux brins tendraient à se couper mutuellement, et il en résulterait des pressions latérales qui pourraient faire tomber la courroie. Pour éviter cet inconvénient, on retourne cette courroie au point où les deux brins se croisent, et ceux-ci, se rencontrant à plat, ne déterminent qu'un faible frottement ; en outre, cette disposition présente l'avantage que ce soit toujours la face rugueuse qui soit en contact avec la surface extérieure des poulies.

298. Détermination de la longueur de la courroie. — Appelons α l'angle AOB, d la distance des centres, et par le point O' menons O'C parallèle à AB', jusqu'à sa rencontre en C avec le prolongement du rayon OA. La longueur totale l de la courroie a pour valeur

$$l = 2AB' + \text{arc } AMB + \text{arc } A'M'B'.$$

Or

$$AB' = O'C = d \times \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{arc } AMB = (2\pi - \alpha) R \quad \text{et} \quad \text{arc } A'M'B' = (2\pi - \alpha) R'.$$

En remplaçant dans la valeur de l, on aura

$$l = 2d \sin\frac{\alpha}{2} + (2\pi - \alpha) R + (2\pi - \alpha) R',$$

$$l = 2d \sin\frac{\alpha}{2} + (2\pi - \alpha)(R + R').$$

Pour trouver la valeur de l'angle α, remarquons que dans le triangle OO'C on a

$$OC = OO' \times \frac{\cos\alpha}{2}; \quad \text{d'où} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{OC}{OO'} = \frac{R + R'}{d}.$$

Cette égalité fait voir que la valeur de l'angle α est constante si la distance des centres et la somme des rayons ne varient pas ; donc, lorsqu'on emploiera une courroie croisée, on pourra, sans changer sa longueur, faire varier le diamètre des deux poulies pourvu que la somme des rayons reste la même. Cette particularité n'a pas lieu si la courroie n'est pas croisée, car sa longueur change quand la différence des rayons varie.

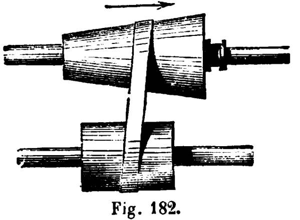
299. Tendeur. — La transmission s'opérant en vertu de l'adhérence qui existe entre la poulie et la courroie, celle-ci doit toujours

être assez tendue pour éviter tout glissement, et pour cela le frottement des surfaces en contact doit être plus grand que la résistance à vaincre. Si la tension de la courroie est trop faible pour vaincre la résistance, on augmente cette tension au moyen d'un *tendeur*.

On appelle *tendeurs* des appareils servant à développer, sur la courroie, la tension nécessaire pour éviter tout glissement, sans toutefois l'accroître d'une manière trop considérable. Les poulies conductrice et conduite (*fig.* 181, 3) étant O et O′, on obtiendra la tension nécessaire au fonctionnement de la machine en faisant appuyer, contre le brin conducteur de la courroie, un galet mobile G articulé à l'extrémité d'une barre GC, faisant partie d'un levier à trois branches. Ce levier, mobile autour d'un axe horizontal C, se manœuvre au moyen d'une poignée L, et un contre-poids P, fixé à la branche CP, est réglé de façon à déterminer la tension nécessaire et suffisante à la marche.

300. Forme des poulies. — La surface extérieure des poulies ne doit pas être cylindrique comme on pourrait le croire, car une légère pression exercée sur les courroies, parallèlement à l'axe des poulies, les déplacerait avec facilité, et la moindre obliquité les ferait tomber. Il faut donc donner aux poulies une forme telle que la stabilité des courroies soit assurée.

Considérons une courroie passant sur une poulie conique (*fig.* 182) ; dès que le mouvement sera communiqué, la pression qui s'établit entre la courroie et la poulie étant normale à la surface de cette poulie, cette pression se décomposera en deux composantes dont l'une, dirigée vers l'axe, sera détruite, et dont l'autre, dirigée parallèlement à cet axe et dans le sens de la flèche, tendra à entraîner la courroie du côté où le cône s'élargit.


Fig. 182.

Il résulte de là que si on donne à la poulie la forme d'un double cône adossé par la grande base, la stabilité de la courroie sera complétement assurée, car elle tendra toujours à revenir sur l'arête la plus élevée. En pratique, la surface des poulies est légèrement bombée.

Si plusieurs machines, situées à peu de distance l'une de l'autre,

doivent prendre leur mouvement sur un même arbre de couche, on place sur celui-ci une large poulie cylindrique en bois qui prend le nom de *tambour*.

Les courroies sont toutes à section rectangulaire, dont la largeur est assez grande relativement à l'épaisseur qui varie entre 2mm,1/2 et 4mm; leurs dimensions se déterminent d'après l'effort à transmettre.

REMARQUE. — On transmet quelquefois le mouvement au moyen de cordes et de poulies ; celles-ci présentent alors, sur leur cir-

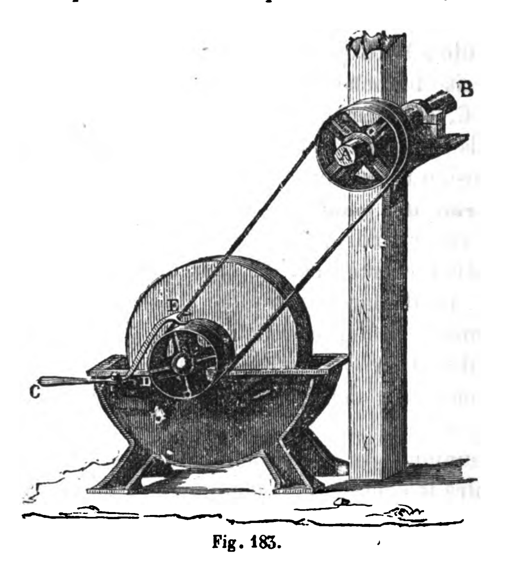


Fig. 183.

conférence, une gorge triangulaire dans laquelle la corde vient s'engager; cette corde qui est cylindrique est, soit en chanvre, soit en coton, soit en boyaux de certains animaux, soit en caoutchouc.

301. Poulie folle. — Presque toutes les machines-outils doivent pouvoir être facilement arrêtées pour être remises en mouvement à un instant donné. Pour cela, on dispose à côté de la poulie fixe E (*fig.* 183) calée sur un arbre, une autre poulie, appelée *poulie folle,* montée sur le même axe et de même diamètre que la première, mais complétement indépendante, c'est-à-dire pouvant tourner librement sans entraîner l'arbre. La machine fonction-

nant, la courroie passe sur la poulie fixe E; pour l'arrêter, on produira le déplacement latéral de la courroie en agissant sur une fourchette CE mobile autour d'un axe fixe, et dont les branches parallèles embrassent cette courroie ; celle-ci vient alors passer sur la poulie folle et la machine se trouve arrêtée; pour rétablir la marche, il suffira de pousser le levier de la fourchette en sens inverse pour ramener la courroie dans sa position première.

302. Poulie étagée.— Les machines-outils, telles que les tours, les machines à percer, les limeuses, etc., doivent marcher avec des vitesses très-différentes, suivant la dureté du métal à travailler. On monte sur l'axe moteur et sur celui de la machine des poulies dites *étagées*, composées de poulies de différents diamètres faisant corps entre elles et disposées de telle sorte, que la somme des rayons des poulies correspondantes soit constante. La vitesse angulaire étant dans le rapport inverse des rayons, il suffira de déplacer la courroie dans le sens convenable pour augmenter ou diminuer la vitesse.

303. Transmission à de grandes distances. — Pour transmettre le mouvement à de grandes distances, 100, 1000, 1500 mètres, par exemple, on emploie, aujourd'hui, des câbles cylindriques formés de fils de fer ou d'acier contournés en hélice, et renfermant une âme en chanvre. Ce câble doit être soutenu de distance en distance, tous les 75 mètres environ, par des poulies d'un grand diamètre, et son poids seul détermine l'adhérence nécessaire au mouvement. Ce mode de transmission, imaginé par M. Hirn et employé pour la première fois en Alsace, tend à se généraliser de plus en plus.

Les poulies portent une gorge en forme de queue d'hironde, recouverte de gutta-percha, et le câble a la liberté de se mouvoir entre les deux rebords déterminés par cette forme de la gorge.

304. Emploi et avantages des courroies. — Les poulies et les courroies sans fin sont d'un emploi continuel dans l'industrie où elles constituent un précieux organe de transmission. Elles transmettent généralement le mouvement de la machine motrice à une foule d'appareils ; elles servent à faire fonctionner les tours, les machines à percer, à raboter et à aléser, les métiers à tisser et à filer, les scies circulaires et sans fin, les ventilateurs, et presque

toutes les machines légères devant marcher avec une grande vitesse.

Les avantages généraux que présente l'emploi des poulies et des courroies sont les suivants :

1° La transmission s'opère sans bruit, sans choc, s'installe avec facilité et absorbe peu de force motrice.

2° La résistance venant à augmenter brusquement, la poulie conduite s'arrêtera, la courroie glissera sur sa surface, puis tombera; il en sera de même toutes les fois que la puissance deviendra trop faible. Ce glissement empêche la rupture de la courroie et prévient les accidents plus graves.

3° La facilité de transmettre le mouvement à de grandes distances.

Remarque. — Dans les appareils de précision où l'on a besoin d'un rapport constant, rigoureux, de vitesse angulaire, on doit rejeter l'emploi des poulies et courroies, car il n'arrive jamais que le glissement soit complétement nul.

305. Axes non situés dans un même plan. — On peut opérer la transmission entre deux axes quelconques non situés dans un même plan, au moyen de poulies et courroies; seulement il faut employer, outre les poulies conductrice et conduite, des poulies dites de *renvoi*, dont le but est de changer la direction des brins de la courroie.

Étant données les poulies calées sur les axes O et O′ (*fig.* 184, 1), on détermine l'intersection CC′ des plans milieux de ces poulies, puis, par un point D de cette intersection on mène les tangentes Da,Db aux circonférences extérieures des poulies; la tangente Da se trouvera dans le plan milieu de la poulie A et la tangente Db, dans le plan milieu de la poulie B. Ces deux tangentes déterminent un plan dans lequel on place une poulie de renvoi d qui, par suite, aura son axe perpendiculaire à ce plan. Pour conduire le second brin de la courroie, on fera une construction analogue en prenant un autre point E sur l'intersection CC′; les nouvelles tangentes Ea',Eb' déterminent un second plan dans lequel on placera encore une nouvelle poulie de renvoi d'. Par cette disposition, les brins de la courroie, en arrivant sur les poulies et en les quittant, se trouvent toujours dans leurs plans milieux, et le mouvement peut être transmis indifféremment dans les deux sens.

Cette transformation peut encore s'opérer en supprimant les poulies de renvoi ; mais, dans ce cas, le mouvement ne pourra se transmettre que dans le sens pour lequel la courroie aura été installée. On s'appuie sur ce fait d'expérience que l'axe du brin de la courroie qui s'enroule sur une poulie, doit forcément se trouver dans le plan milieu de cette poulie, tandis que l'axe du brin qui la quitte, peut avoir une direction quelconque.

Étant donnés les deux axes A et B (*fig.* 184, 2), on mène leur perpendiculaire commune, c'est-à-dire qu'on détermine leur plus courte distance TS ; ensuite on mène à ces axes des perpendicu-

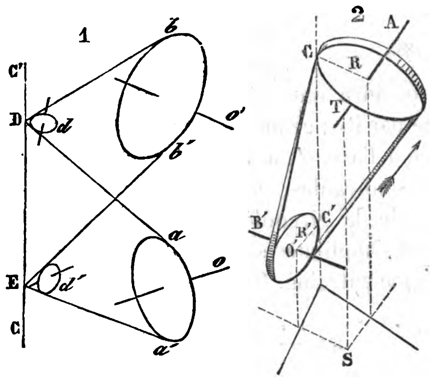


Fig. 184.

laires OC,O'C' respectivement égales aux rayons imposés des poulies, en ayant soin de choisir les pieds O et O' de ces perpendiculaires de telle sorte, que la droite CC' qui joint leurs extrémités soit parallèle à TS. En calant sur les axes A et B deux poulies dont les rayons respectifs seraient R et R', et en disposant la courroie comme l'indique la figure, le mouvement se transmettra dans le sens de la flèche.

§ 4. — THÉORIE ET TRACÉ DES ENGRENAGES.

306. Axes parallèles situés à petite distance. Cylindres de friction. — Lorsque l'axe auquel on veut communiquer le mouve-

ment est situé à une petite distance de l'axe moteur, et si l'effort à transmettre est très-faible, on peut opérer la transmission par simple adhérence.

Soit o l'axe animé d'un mouvement circulaire continu et o' l'axe auquel on veut transmettre le mouvement (*fig.* 185). Sur chacun de ces axes, montons un disque cylindrique en métal, à base circulaire et de diamètre tel, que ces disques soient tangents suivant une génératrice projetée en a. Appelons ω et ω' les vitesses angulaires des axes, d la distance de ces axes, R et R' les rayons des disques. Le point de contact a, supposé entraîné par la rotation autour de l'axe o, aura une vitesse linéaire, perpendiculaire à cet axe, exprimée par $R\omega$; ce même point étant considéré comme invariablement lié à l'axe o', aura une vitesse linéaire $R'\omega'$. Or ces deux vitesses sont égales, car le glissement étant supposé nul, tous les arcs de la circonférence du disque moteur viendront successivement s'appliquer sur des arcs égaux de la surface cylindrique du disque entraîné. On a donc

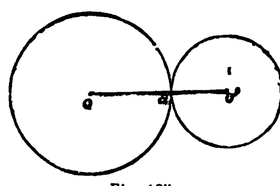


Fig. 185.

$$R \times \omega = R' \times \omega', \text{ d'où } \frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}; \qquad (1)$$

ce qui montre que le point de contact a divise la droite oo' en deux parties inversement proportionnelles aux vitesses angulaires. Donc, la distance d des axes étant donnée, ainsi que les vitesses angulaires, la relation (1) permet de déterminer les rayons R et R'.

Cette transmission prend le nom de *transmission de mouvement par cylindres de friction.*

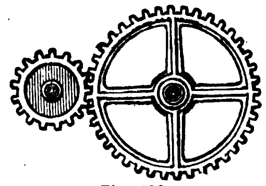
Dans la pratique, pour augmenter l'adhérence et empêcher le glissement, on place des bandes de cuir ou de caoutchouc sur les surfaces convexes des cylindres.

Les surfaces cylindriques en contact s'usent nécessairement par suite du mouvement, et l'adhérence diminue ; pour compenser cette usure, on dispose ordinairement l'un des axes de manière à pouvoir le déplacer parallèlement à lui-même d'une petite quantité, et l'on obtient une pression constante de l'un des cylindres sur l'autre au moyen d'un poids ou d'un ressort. Mais cette

pression ne peut pas être forte, car il en résulterait des frottements considérables des tourillons sur les coussinets des arbres tournants.

Ce mode de transmission ne peut être employé pour transmettre de grands efforts, car le glissement du cylindre moteur serait inévitable; dans ce cas, on remplace les cylindres tangents par des roues dentées.

207. Engrenages plans. — On appelle *roues dentées*, *roues d'engrenage*, ou simplement *engrenages*, des roues que l'on cale sur des arbres entre lesquels on veut établir une communication de mouvement de rotation. Ces roues (*fig.* 186) portent, sur leur pourtour, des saillies et des creux disposés de manière que les saillies de l'une des roues s'engagent dans les creux de l'autre et réciproquement. Cette disposition fait que la pression exercée par les dents de l'une des roues sur les dents de l'autre, force cette seconde roue à suivre la première dans son mouvement. La transmission est ainsi assurée sans qu'on ait à craindre le moindre glissement.


Fig. 186.

208. Définitions. — Lorsque deux roues engrènent ensemble, on donne le nom de *roue* à la plus grande, et celui de *pignon* à la plus petite.

On appelle *ligne des centres* la droite qui joint le centre de la roue à celui du pignon.

Les saillies dont on arme les roues qui doivent engrener ensemble, se nomment les *dents* de l'engrenage.

Les circonférences tangentes idéales qui se conduiraient par simple contact et sur lesquelles les dents font saillie, prennent le nom de *circonférences primitives*. La denture une fois tracée, il ne reste pas trace de ces circonférences primitives, mais elles ne jouent pas moins un grand rôle dans le tracé des engrenages.

On appelle *pas* de l'engrenage l'arc compté sur la circonférence primitive, correspondant à un plein ou dent, et à un creux.

La partie de la dent extérieure à la circonférence primitive s'appelle la *face* de la dent.

La partie de la dent située à l'intérieur de la circonférence primitive s'appelle le *flanc* de la dent.

L'arc de circonférence primitive embrassé par une dent se nomme l'*épaisseur* de la dent.

On appelle *largeur* des dents ou des roues, leur dimension comptée parallèlement à l'axe.

La roue qui communique le mouvement s'appelle la *roue menante*, et celle qui le reçoit s'appelle la *roue menée.*

Dans un engrenage quelconque, la couronne circulaire qui porte les dents s'appelle la *jante;* le cylindre creux qui sert à fixer cette couronne sur l'arbre, s'appelle le *moyeu*, et l'on réunit la jante au moyeu par des *bras* ou *rayons* également espacés, dont le nombre est un sous-multiple de celui des dents.

209. Problème général des engrenages. — Le problème des engrenages peut s'énoncer ainsi : *Trouver quelle est la forme à donner aux dents des roues qui doivent se conduire mutuellement, pour que la transmission s'opère avec rapport constant de vitesses angulaires*, ou, autrement dit, *comme si les roues se conduisaient par simple contact.*

Il est évident que le profil du creux de la roue menée doit rester constamment tangent au profil de la dent de la roue menante ; les deux profils en prise auront donc une normale commune, et pour que le mouvement se transmette comme si les roues roulaient l'une sur l'autre, il faut que cette normale passe constamment par le point de contact des circonférences primitives. Nous allons le prouver en faisant voir qu'on peut se donner arbitrairement le profil du creux de l'une des roues et en déduire le profil de la dent de l'autre roue.

Nous savons que lorsque deux circonférences se conduisent mutuellement, des arcs de l'une d'elles viennent successivement s'appliquer sur des arcs égaux de l'autre. Or le mouvement sera identique si nous supposons l'une des roues fixes pendant que l'autre roule tout autour sans glisser. Cela posé, soit O et O′ deux circonférences primitives (*fig.* 187) tangentes en A, et soit AB le profil du creux de la roue O′. Faisons rouler la circonférence O′ sur la circonférence O. La courbe AB prendra successivement différentes positions et le profil de la dent de la roue O devant rester constamment tangent à la courbe donnée, il est clair que ce profil sera l'*enveloppe* ADM des différentes positions que prend la courbe AB lorsqu'elle est entraînée par la circonférence O′ roulant sur le

cercle O supposé fixe. Considérons maintenant la circonférence mobile O′ dans une autre position quelconque O'_1 ; la courbe AB sera venue en A_1B_1 de manière que l'on ait

$$\text{arc } A_1C = \text{arc } AC.$$

Du nouveau point de contact C des deux circonférences primitives, abaissons la normale CD sur la courbe A_1B_1; pendant un temps infiniment petit, cette courbe peut être considérée comme tournant autour du point C comme centre, pour venir prendre une position voi-

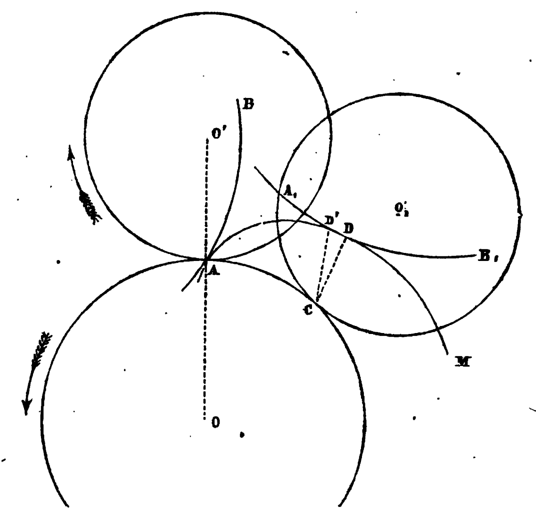


Fig. 187.

sine; ce point C prend le nom de *centre instantané de rotation*. Or l'enveloppe d'une courbe étant le lieu géométrique des intersections des positions successives que prend cette courbe, le point D appartient à l'enveloppe AMD et détermine un point de contact avec son enveloppée. Il résulte de là que, pour tracer le profil des dents de la roue O, il suffit de faire rouler la circonférence O′ sur la circonférence O, d'abaisser des différents points de contact des normales sur le profil donné du creux de la roue O′, et de joindre tous les pieds de ces normales par un trait continu.

Cependant, comme il n'est pas facile de mener des normales à toutes les courbes, on n'adopte, en pratique, que des courbes

auxquelles on puisse facilement les mener; nous donnerons, un peu plus loin, le tracé de ces courbes.

D'après la courbe employée pour le profil des dents, on divise les engrenages en trois classes :

1° Engrenages à lanterne,
2° Engrenages à flancs,
3° Engrenages à développantes.

310. Pas et jeu d'un engrenage. — Pour que le mouvement puisse se produire dans les deux sens, on donne à la dent le même profil de chaque côté ; elle est ainsi symétrique par rapport au rayon de la circonférence primitive qui divise en deux parties égales l'arc que cette dent doit embrasser. Il est évident que toutes les dents d'une même roue doivent être égales. De même, pour que l'engrenage soit réciproque, c'est-à-dire que la roue menée puisse à son tour devenir roue menante, on munit les deux roues conjuguées de dents et de creux. Les profils des dents des deux roues sont quelquefois différents comme nous le verrons en étudiant les divers tracés. Théoriquement, le plein doit être égal au creux; mais il n'en est pas ainsi en pratique à cause des irrégularités de la construction. On fait toujours la largeur du creux un peu plus grande que l'épaisseur de la dent de manière à avoir, en appelant d l'épaisseur de la dent et c celle du creux,

$$\frac{d}{c} = \frac{12}{13} \text{ ou } \frac{15}{16} \text{ ou } \frac{20}{21},$$

suivant le degré de perfection qu'on veut obtenir.

La différence entre le creux et le plein s'appelle le ***jeu*** de l'engrenage.

311. Dans le mouvement de deux roues dentées, chaque dent de la roue menante en pousse une de la roue menée. Considérons la dent de la roue O (*fig.* 188), dont le profil *ch* se trouve sur la ligne des centres, et faisons-lui décrire un arc égal au pas; la dent *ki* sera venue la remplacer sur la ligne des centres et la dent *k'c'* de la roue O' aura pris la position de la dent *ar*, c'est-à-dire que la roue O' aura aussi tourné d'un arc égal à son pas. Mais si les roues se transmettent le mouvement dans les conditions de rapport cons-

tant de vitesses angulaires, les arcs décrits par la circonférence O sont égaux aux arcs décrits pendant le même temps par la circonférence O′; il s'ensuit que l'arc *ca* est égal à l'arc *c′a* et par con-

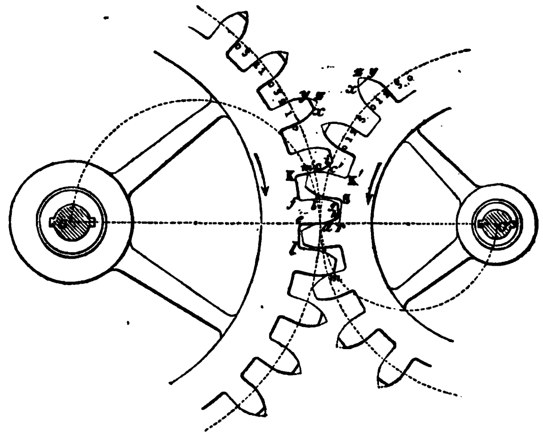


Fig. 188.

séquent le pas de la roue O est égal au pas de la roue O′. Donc, *sur deux roues qui engrènent ensemble, la longueur absolue du pas doit être la même.*

Si nous appelons p le pas de l'une des roues, d le plein, c le creux et p', d', c', les quantités analogues de l'autre roue, on a

$$p = d + c \text{ et } p' = d' + c'.$$

Or p devant être égal à p' on en conclut

$$d = d' \text{ et } c = c'.$$

212. Calcul du nombre de dents. — Le pas devant diviser exactement les circonférences primitives, si nous appelons n et n' les nombres de dents des roues O et O′, R et R′ leurs rayons, on aura

$$\frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'}; \text{ d'où } \frac{R}{R'} = \frac{n}{n'}.$$

Les nombres de dents de deux roues qui engrènent sont entre eux

comme les rayons de ces roues. Nous avons vu que les rayons sont en raison inverse des vitesses angulaires, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}, \text{ et par suite } \frac{n}{n'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Les nombres de dents de deux roues qui engrènent sont en raison inverse de leurs vitesses angulaires. Tous les nombres entiers qui satisfont à la relation ci-dessus ne pourront pas être employés, car il faut que la dent ait une épaisseur suffisante pour résister à l'effort qu'on veut lui faire transmettre.

On construit les engrenages de manière qu'il y ait toujours au moins deux couples de dents en prise, mais on calcule l'épaisseur de la dent pour que chacune d'elles puisse résister à l'effort total qui s'exerce sur la circonférence primitive. La Résistance des matériaux apprend à déterminer cette épaisseur suivant la nature de la matière qui sert à faire les roues. Voici les formules dont on se sert en pratique et dans lesquelles d désigne l'épaisseur de la dent et P l'effort à transmettre :

$$d = \begin{cases} 0{,}105\sqrt{P} \text{ si la roue est en fonte.} \\ 0{,}131\sqrt{P} \text{ si la roue est en bronze ou en cuivre.} \\ 0{,}138\sqrt{P} \text{ si la roue est en sorbier ou en charme.} \end{cases}$$

L'épaisseur de la dent étant ainsi déterminée, on en déduit le pas, car on sait que l'on a $p = 2d + j$, en appelant j le jeu. Le pas étant obtenu, on trouvera les nombres de dents n et n' à l'aide des formules

$$n = \frac{2\pi R}{p} \quad \text{et} \quad n' = n\frac{R}{R'}$$

Il arrivera presque toujours que ces nombres seront fractionnaires et l'on ne pourra pas les employer ; mais comme il n'y a aucun désavantage à augmenter l'épaisseur de la dent, on prendra pour n et n' les nombres entiers immédiatement inférieurs aux nombres fractionnaires qu'on a trouvés. Cette substitution conduit à modifier les rayons des roues et par suite le rapport des vitesses angulaires. L'écart étant peu considérable, cette modification n'offre ordinairement pas d'inconvénients dans la pratique.

318. Application.— *On propose de déterminer les rayons et les nombres de dents de deux roues d'engrenages dont les deux axes sont situés à une distance de* $1^m, 80$, *de manière que le pignon fasse* 36 *tours pendant que la roue en fera* 5.

Pour trouver les rayons primitifs, il suffit de diviser la distance $1^m, 80$ des axes, en deux parties inversement proportionnelles aux nombres de tours; on aura

$$R=\frac{1,80\times 36}{36+5}=1^m,5805 \quad \text{et} \quad R'=\frac{1,80\times 5}{36+5}=0^m,2195.$$

Supposons que le pas, calculé d'après l'effort à transmettre et la nature de la matière des roues, soit de $0^m,025$; on aura

$$n=\frac{2\pi\times 1,5805}{0,025}=397,22 \quad \text{et} \quad n'=\frac{2\pi\times 0,2195}{0,025}=55,165.$$

Nous arrivons ainsi à des nombres fractionnaires; prenons donc 397 pour le nombre des dents de la roue et 55 pour celui des dents du pignon.

Le rapport des nombres de dents est égal au rapport inverse des nombres de tours; or le rapport $\frac{397}{55}$ ou 7,218 que nous adoptons diffère très-peu du rapport proposé $\frac{36}{5}$ ou 7,200; cette approximation est suffisante en pratique.

Pour calculer les rayons des nouveaux cercles primitifs, il suffit de se rappeler que ces rayons sont proportionnels aux nombres de dents; on aura donc

$$\frac{R}{R'}=\frac{n}{n'}=\frac{397}{55},$$

et comme la somme de ces rayons doit être encore égale à la distance $1^m,80$ des axes, il faudra diviser cette distance en deux parties proportionnelles aux nombres 397 et 55; par suite

$$R=\frac{1,80\times 397}{397+55}=1^m5809 \text{ et } R'=\frac{1,80\times 55}{397+55}=0^m,2191.$$

Ces rayons, comme on le voit, diffèrent très-peu des rayons trouvés précédemment. Le rayon de la roue a $0^m,0004$ de plus, et

celui du pignon $0^m,0004$ de moins. Il reste à déterminer le nouveau pas qui est égal à la longueur de la circonférence divisée par le nombre de dents :

$$p = \frac{2\pi R}{n} = \frac{2 \times 3,1416 \times 1,5809}{397} 0^m,02502.$$

L'augmentation de $0^m,00002$ du pas est inappréciable en pratique.

214. Courbes des profils des dents. — Avant de nous occuper des différents tracés des engrenages, nous allons donner le tracé des courbes qui nous seront nécessaires pour déterminer le profil des dents. Ces courbes, outre la circonférence qui a été vue en géométrie, sont au nombre de trois.

1° Cycloïde. — On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'une circonférence d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe située dans son plan.

Soit O le cercle roulant (*fig.* 189), xy la droite fixe et A le point

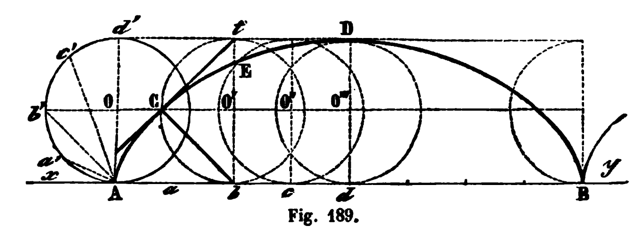


Fig. 189.

de la circonférence, dont les positions successives doivent engendrer la courbe. Faisons rouler le cercle O et supposons qu'il soit arrivé en O'; pendant ce mouvement, des arcs très-petits de la circonférence viennent s'appliquer successivement sur des parties de la droite xy, égales en longueur aux petits arcs correspondants. Lorsque le cercle roulant sera venu en O', le point décrivant A se sera élevé, sur la circonférence, jusqu'en un point C tel, que l'on aura

$$Ab = \text{arc } Cb.$$

Lorsque ce même cercle sera venu en O'', le point A se trouvera en un certain point E, et l'on aura

$$Ac = \text{arc } Ec,$$

et ainsi de suite pour les autres positions du cercle roulant.

Par le point C menons la droite C*b'* parallèle à *xy*; joignons le point *b* au point C et le point A au point *b'*; la figure A*b'*C*b* est un parallélogramme. De là résulte la construction suivante : pour trouver les différents points de la courbe, on divise la demi-circonférence A*d'* en un certain nombre de parties que l'on prend égales pour plus de simplicité, et par chacun des points de division on mène des parallèles à la droite fixe. On porte ensuite les arcs A*a'*, *a'b'*, ... rectifiés sur la droite *xy*, et des points *a*,*b*,*c*, ... ainsi obtenus, avec un rayon égal à la corde correspondante du cercle O, on décrit des arcs qui coupent les diverses parallèles; en joignant tous les points d'intersection par un trait continu, on obtient la cycloïde.

Lorsque le cercle mobile aura parcouru la distance A*d* égale à la longueur de la demi-circonférence, le point décrivant sera venu en D ; à partir de cette position, le point A redescendra vers la droite fixe et décrira une nouvelle portion de courbe DB symétrique de la partie AD. Si, étant arrivé en B, le cercle continue son mouvement, le point mobile engendrera une autre courbe identique à la première.

La longueur AB, égale au développement de la circonférence O, prend le nom de *base*, et la hauteur D*d*, égale au diamètre du cercle mobile, prend le nom d'*ouverture* de la courbe.

Considérons le cercle roulant dans sa position O'; pendant un temps infiniment petit, le point C tend à décrire un arc de cercle autour du point *b*; ce point *b* est le centre instantané de rotation, et par suite la droite *b*C est la normale au point C de la courbe. Si l'on joint le point C à l'extrémité *t* du diamètre *bt*, l'angle *t*C*b* est droit comme angle inscrit dans une demi-circonférence, et par suite la droite *t*C est la tangente à la courbe.

Cette considération du centre instantané de rotation nous fournit une construction pratique de la cycloïde. En effet, si de chacun des points de division *a*, *b*, *c*,.., de la droite *xy* et avec des rayons égaux aux cordes correspondantes, on décrit des arcs de cercle, la courbe enveloppe de tous ces arcs, sera la cycloïde demandée. Ce procédé simple et rapide est presque le seul employé dans la pratique.

2° Épicycloïde. — L'*épicycloïde* est la courbe décrite par un

point d'une circonférence de cercle qui roule sans glisser sur une autre circonférence fixe, située dans son plan.

Soit O la circonférence roulante (*fig.* 190) et O′ la circonférence fixe. On voit que la droite fixe *xy* du cas précédent est remplacée par la circonférence fixe O′, et les parallèles menées par les points de division du cercle mobile, par des circonférences concentriques au cercle O′. Avec ces modifications, tout ce que nous avons dit pour le tracé de la cycloïde s'applique au tracé de l'épicycloïde.

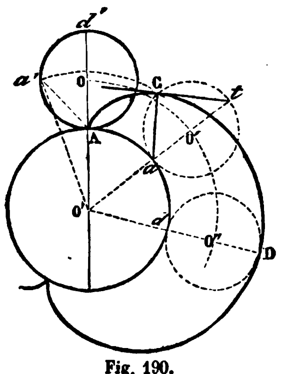


Fig. 190.

Considérons la circonférence roulante dans la position O′; cette circonférence ayant roulé, sans glisser, sur la circonférence fixe, le point A s'est élevé en un point C tel, que l'on a

$$\text{arc } Aa = \text{arc } Ca.$$

Le point C est un point de la courbe, et on l'obtient en décrivant du point de contact *a* avec un rayon égal à la corde A*a*, un arc qui coupe la circonférence décrite du point O′ avec O′*a*′ pour rayon.

Le point *a* est un centre instantané de rotation, et par suite la droite *a*C est une normale, et la droite *t*C une tangente à la courbe. Quand le cercle roulant sera dans une position telle, que

$$\text{arc } Ad = \text{arc } Aa'd',$$

la courbe redescendra vers la circonférence fixe, pour la rejoindre lorsque le point décrivant aura parcouru un arc égal au précédent.

Remarque. — Si le cercle mobile se trouve à l'intérieur du cercle fixe, le point A engendre une autre courbe facile à construire par le procédé indiqué, et cette courbe s'appelle *épicycloïde intérieure*, ou plus généralement *hypocycloïde*.

2° Développante de cercle. — On appelle *développante de cer-*

cle, la courbe engendrée par l'extrémité d'un fil inextensible qui, en restant toujours tendu, se déroule sur un cercle fixe.

Soit O (*fig.* 191) le cercle fixe et A l'extrémité du fil lorsqu'il est complétement enroulé. Le fil, devant toujours rester tendu, sera constamment tangent à la circonférence O, et il est évident que la longueur de ce fil sera égale, à chaque instant, à la longueur de l'arc de circonférence dont il se sera déroulé. La construction de cette courbe est donc très-simple, car il suffit, pour l'obtenir, de diviser la circonférence fixe en parties égales A*a*, *ab*, *bc*...; de mener, en chaque point, la tangente à la circonférence O, puis de prendre sur ces tangentes des longueurs $aa' = Aa$ pour la première ; $bb' = Ab$ ou $2Aa$ pour la seconde ; $cc' = Ac$ ou $3Aa$ pour la troisième, et ainsi de suite. Considérons, par exemple, le fil tangent au point *d* ; en faisant $dt = \text{arc}\, Ad$, on obtient le point *t* de la courbe. Or le point *d* est un centre instantané de rotation ; par conséquent, la droite *dt* est la normale à la courbe. La ligne MN, menée perpendiculairement à *dt* par le point *t*, sera la tangente en ce point. Les lignes MN et O*d* sont parallèles, comme étant respectivement perpendiculaires à *dt* ; donc, *la tangente à la développante est parallèle au rayon mené au point de contact de la normale avec le cercle fixe.*

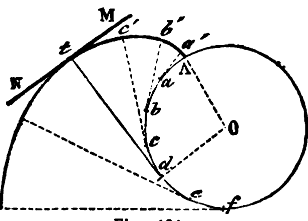


Fig. 191.

315. Tracés des engrenages plans.— Nous avons dit que les engrenages, d'après la courbe choisie pour profils de leurs dents, se divisent en trois classes. Sauf la première, qui n'est plus guère employée, nous traiterons les tracés de ces trois classes avec tous les détails que comporte cette importante question.

316. Engrenage à lanterne.— Dans cet engrenage, le profil des dents du pignon est un cercle dont le centre se trouve sur la circonférence primitive.

Considérons d'abord (*fig.* 192) les cercles formant les dents du pignon comme ayant un diamètre nul. Soit O et O' les circonférences primitives de la roue et du pignon, et A le point représentant les dents du pignon. Faisons rouler le cercle O' sur le cercle O ; l'enveloppe des positions successives que prendra le point A,

c'est-à-dire le profil à donner aux dents de la roue O, sera l'épicycloïde décrite par ce même point A ; cette épicycloïde sera AA' ou AA_1 suivant le sens du mouvement de O' sur O. Si nous rendons les cercles mobiles autour de leurs axes et si nous fixons l'épicycloïde AA' au cercle O, en faisant tourner ce cercle dans le sens de la flèche, la courbe poussera le point A du pignon et lui transmettra le mouvement ; or, d'après les propriétés de l'épicycloïde, on sait que le mouvement aura lieu comme si les cercles étaient simplement tangents, c'est-à-dire avec rapport constant de vitesses angulaires. Tel est le principe théorique de cet engrenage.

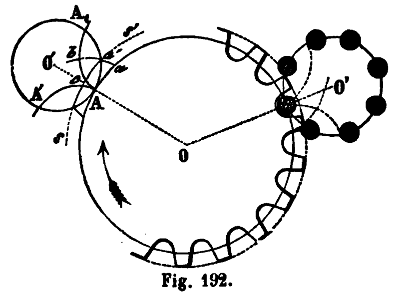


Fig. 192.

On s'impose l'arc pendant lequel la dent de la roue doit pousser la dent du pignon; faisons cet arc égal au pas, et soit $Aa = Aa'$ ce pas. Lorsque les roues auront tourné de cette quantité, *ab* sera la position de l'épicycloïde AA' et *a'* la position du point A qui, pendant le mouvement, a dû s'appuyer constamment sur la courbe et en a parcouru la portion *aa'*. A partir de cet instant, la dent de la roue devant quitter celle du pignon, la portion de la courbe *a'b* devient inutile. On limite donc les dents de la roue en décrivant du centre O et avec O*a'* pour rayon, la circonférence SS'.

Afin que la roue puisse conduire le pignon dans les deux sens, on termine la dent de l'autre côté par un profil symétrique ; A*caa'* est donc la forme à donner à la dent de la roue O. Lorsque cette dent quittera le point qu'elle a conduit, un autre point, représentant une dent du pignon, sera venu sur la ligne des centres et sera à son tour conduit par la dent suivante de la roue; le mouvement s'effectuera donc d'une manière continue.

317. En pratique, les dents du pignon ne peuvent pas se réduire à un point, et on les remplace par des cylindres droits à base circulaire, dont le diamètre est calculé d'après l'effort à transmettre et d'après la nature de la matière employée. Les dents de la roue doivent être amaigries, de chaque côté, d'une quantité égale au rayon de ces cylindres, augmentée de la moitié du jeu. Les profils de ces

dents ne sont plus l'épicycloïde décrite par le centre du cercle de base des dents du pignon, mais une courbe parallèle, comme on le voit sur le tracé pratique de la figure.

Pour loger les dents du pignon, on pratique, dans la roue, des creux circulaires dont le centre est situé sur la circonférence primitive, et dont le rayon est égal à celui de la dent du pignon, augmenté de la moitié du jeu.

Les cylindres formant les dents du pignon sont encastrés à leurs extrémités dans deux plateaux circulaires nommés *tourteaux*, traversés par l'axe de rotation, et dont la distance est un peu plus grande que la largeur de la roue.

Dans cet engrenage, appelé *engrenage à lanterne*, les dents du pignon prennent le nom de *fuseaux* et celles de la roue celui d'*alluchons*.

Les fuseaux s'usant plus vite que les alluchons, on les fait ordinairement en fonte, tandis que les alluchons sont en bois dur, encastrés dans la jante de la roue.

218. Dans l'engrenage à lanterne, le contact ne peut avoir lieu en deçà et au delà de la ligne des centres. Lorsque c'est la roue qui conduit, le contact commence à la ligne des centres; si, au contraire, c'est le pignon qui conduit, la conduite cesse à la ligne des centres. Il y a avantage, comme nous le verrons plus loin, à ce que la conduite ait lieu après la ligne des centres; c'est pourquoi la roue conduit toujours le pignon.

On dit que l'engrenage à lanterne n'est pas réciproque, et cet inconvénient fait qu'on ne l'emploie presque plus aujourd'hui; on le rencontre surtout dans les vieux moulins.

219. Engrenage à flancs. — Dans cet engrenage, on s'impose la condition que les profils des flancs des dents soient des portions de rayon des cercles primitifs.

Soit O et O′ les circonférences primitives (*fig.* 193) et O′A le profil des creux du pignon. Pour trouver le profil de la face de la dent de la roue O, il faut faire rouler le cercle O′ sur le cercle O et des différents points de contact, abaisser des normales sur les diverses positions que prend le rayon O′A. Supposons que le cercle O′ soit venu en O″; la position du rayon O′A sera telle, que l'on aura $Aa = aa'$. Si du point a nous abaissons la perpendiculaire ad sur $O''a'$, le pied d de cette perpendiculaire sera un point de la

courbe cherchée. L'angle $O''da$ étant droit, le point d appartient à la circonférence du cercle décrit sur $O''a$ comme diamètre. Remarquons en outre que l'arc ad est égal à l'arc aa' ; en effet, l'angle $a'O''a$, considéré comme inscrit dans le cercle C, a pour mesure la moitié de l'arc ad ; ce même angle, considéré comme angle au centre dans le cercle O'', a pour mesure l'arc aa'. Il résulte de là que l'arc ad a un nombre double de degrés que l'arc aa' ; mais comme le rayon Ca est la moitié du rayon $O''a$, les degrés de l'arc aa' sont deux fois plus grands que les degrés de l'arc ad. Donc ces deux arcs sont égaux et par suite $ad \doteq Aa$, Le point d qui se confondra avec le point A, si l'on fait reprendre au cercle O' sa position primitive, est un point de l'épicycloïde engendrée par le point A du cercle C roulant sans glisser sur le cercle O.

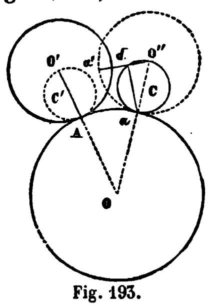


Fig. 193.

Ce principe nous montre que les profils des faces des dents de la roue sont des arcs d'épicycloïde engendrée par un cercle roulant, ayant pour diamètre le rayon du pignon, et que le contact des dents se fait constamment sur la circonférence de ce cercle roulant.

Si l'on veut rendre l'engrenage réciproque, il est évident que l'on devra prendre, pour profils des dents du pignon, des arcs d'épicycloïde engendrée par un cercle ayant pour diamètre le rayon de la roue O, roulant sur la circonférence primitive du pignon.

220. Tracé des engrenages à flancs.— Soit O et O' (*fig.* 194) les axes sur lesquels on doit monter les deux roues dentées. Après avoir calculé l'épaisseur des dents d'après la nature de la matière à employer, et que l'on connaît par suite le pas et le nombre de dents de chaque roue, on détermine les rayons primitifs. Soit OA et O'A ces rayons; divisons les circonférences primitives en parties Aa, ab.... et Aa', $a'b'$.... égales au pas, et chaque pas en deux parties Ac, ca et Ac', $c'a'$ respectivement égales au plein et au creux. Traçons les cercles roulants C et C' ; en faisant rouler le premier sur la circonférence O', dans le sens de la flèche f, le point A engendrera un arc d'épicycloïde AM, qui sera le profil des

faces des dents du pignon. Le cercle C′ roulant sur la circonférence O, engendre l'arc d'épicycloïde AM′ qui est le profil des faces des dents de la roue. Menons les rayons O*m* et O′*m*′ qui divisent le plein en deux parties égales, et faisons passer, par les points *c* et *c*′, un arc de l'épicycloïde correspondante, symétrique de celui

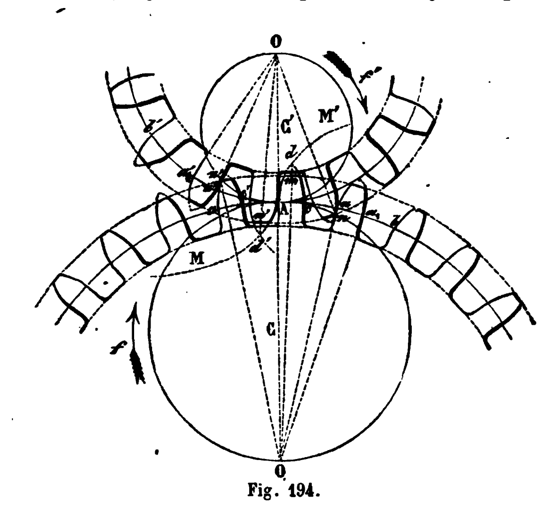


Fig. 194.

qui se trouve de l'autre côté de ces rayons. Les courbes se couperont aux points *d* et *d*′ et l'on aura A*dc* pour profil complet des faces des dents de la roue ; de même A*d*′*c*′ sera le profil des faces des dents du pignon. En découpant, avec soin, un gabarit sur ces faces, on tracera aisément le profil de toutes les dents. Pour obtenir les flancs, on sait qu'il suffit de mener les rayons tels que O*a*, Oa_1 et O′*a*′, O′a'_1 à tous les points de division des circonférences primitives.

Remarque. — En examinant la figure, on voit que, dans un engrenage réciproque, le contact a lieu avant et après la ligne des centres ; avant cette ligne, c'est le flanc de la roue menante qui pousse la face de la roue menée, et après, c'est la face de la roue menante qui pousse le flanc de la roue menée. Le contact a toujours lieu sur la circonférence des cercles roulants, et il s'éloigne de plus en plus de l'axe de rotation de la roue qui mène, en se rapprochant de celui de la roue menée, puisqu'il commence au

dedans de la circonférence primitive de la première roue pour finir au dedans de la seconde.

321. Échanfrinage des dents.—En pratique, on ne peut donner aux dents leur saillie maximum A*dc*, parce qu'elles ne seraient pas assez fortes, vers la pointe, pour résister à l'effort à transmettre et que cette pointe s'userait très-vite par le frottement. En outre, pour éviter le danger des *arcs-boutements* dont nous parlerons plus tard, il convient de diminuer, autant que possible, la durée de la prise de deux dents, tout en leur laissant une longueur suffisante pour assurer la continuité du mouvement. A cet effet, on se contente d'avoir constamment deux couples de dents en prise, c'est-à-dire que le contact commence un pas avant la ligne des centres pour finir un pas après cette ligne. De là, la nécessité de retrancher la partie aiguë des dents, opération qu'on appelle *échanfrinage*.

322. Limite des dents.—Pour limiter la conduite un pas avant la ligne des centres et un pas après, on opère de la manière suivante : on prend les arcs A*a* et A*a'*, égaux au pas de l'engrenage, et on mène les rayons O*a* et O'*a'* ; les points *n* et *n'* d'intersection de ces rayons avec les cercles roulants, sont les points extrêmes de contact. Si donc, du point O comme centre, on décrit une circonférence avec O*n'* pour rayon, cette circonférence limitera toutes les faces des dents de la roue. De même, si l'on décrit une circonférence concentrique à la circonférence O' avec O'*n* pour rayon, cette circonférence limitera toutes les faces des dents du pignon. Après avoir limité les faces, il faut limiter les flancs ; on y arrive très-simplement en décrivant des centres O et O' des circonférences dont les rayons r_1 et r'_1 sont donnés par les formules suivantes, dans lesquelles r et r' représentent les rayons des circonférences limitant les faces de la roue et du pignon, et j le jeu de l'engrenage

$$r_1 = OO' - (r' + j) \text{ et } r'_1 = OO' - (r + j).$$

En pratique, on arrondit tous les angles vifs des dents en raccordant les différentes parties par de petits arcs de cercle, comme le montre la figure.

323. Inconvénients des engrenages à flancs.— Le tracé que nous venons de décrire, pour les engrenages à flancs, est le plus généralement employé dans la pratique ; cependant, il présente deux

inconvénients que nous allons signaler et dont l'un est très-grave.

1° La normale commune aux profils des dents fait avec la ligne des centres des angles de plus en plus petits à mesure que le point de contact s'éloigne de cette ligne, ce qui fait que l'effort de la dent menante sur la roue menée, varie pendant toute la durée de la prise; cet effort diminue d'abord jusqu'à la ligne des centres pour augmenter ensuite jusqu'à la fin de la conduite, et il en résulte que les dents s'usent inégalement; aussi voit-on, au bout d'un certain temps de marche, les dents s'arrondir à leurs extrémités et leurs flancs se creuser. Pour remédier à cet inconvénient dans une certaine mesure, il convient de prendre le pas le plus petit possible.

2° Le second inconvénient et le plus grave, c'est qu'une roue taillée à l'aide de ce tracé ne peut engrener qu'avec le pignon pour lequel elle a été construite. En effet, dans ce tracé, le profil des faces des dents de la roue est engendré par un point d'un cercle ayant pour diamètre le rayon du pignon, roulant sur la circonférence primitive de la roue. Si le rayon du pignon vient à changer, le diamètre du cercle roulant changera aussi et par suite, pour chaque pignon de diamètre différent, on obtiendra une courbe distincte pour les faces des dents de la roue. Donc une roue à flancs ne peut conduire, avec un degré de précision suffisant, deux ou plusieurs pignons de diamètres différents, soit successivement, soit simultanément.

Dans une foule de machines on a besoin qu'une roue, appelée *roue principale*, puisse en conduire plusieurs autres, soit successivement pour varier le rapport des vitesses angulaires, soit simultanément pour communiquer le mouvement à plusieurs arbres. Il faut, dans ces circonstances fréquentes en pratique, employer un tracé qui permette à une roue d'engrener avec une autre roue quelconque, à la condition que le pas soit le même.

224. Engrenages épicycloïdaux.— Le tracé de ces engrenages, malheureusement peu employé dans les ateliers, remplit les conditions précédentes. Son principe peut s'énoncer ainsi : lorsqu'on prend pour flancs des dents du pignon un arc d'hypocycloïde, sa courbe enveloppe ou le profil à donner aux faces des dents de la roue, est un arc d'épicycloïde engendrée par le cercle générateur de l'hypocycloïde, roulant sur la circonférence primitive de la

roue. Ceci peut être facilement expliqué en remarquant que le tracé des engrenages à flancs n'est qu'un cas particulier de ce principe. En effet, lorsqu'un cercle roule à l'intérieur d'un autre cercle de diamètre double, l'hypocycloïde engendrée par un quelconque des points du cercle mobile se confond avec un diamètre du cercle fixe. On peut s'en assurer en traçant la courbe d'après le procédé que nous avons indiqué pour décrire l'épicycloïde. Ainsi le rayon O'A (*fig.* 193) que nous avons pris pour déterminer l'épicycloïde enveloppe, n'est autre chose que l'hypocycloïde enengendrée par le même cercle C' roulant à l'intérieur de O'. Donc en généralisant on conclut que deux épicycloïdes, l'une intérieure et l'autre extérieure, de même cercle générateur, sont respectivement enveloppe et enveloppée, et se conduisent avec rapport constant de vitesses angulaires, condition à laquelle sont assujetties les roues d'engrenages.

Si le cercle roulant n'a pas un diamètre égal au rayon du cercle à l'intérieur duquel il roule, les flancs des dents ne seront plus droits, et les profils de celles-ci seront formés par la réunion de deux courbes, l'une intérieure et l'autre extérieure à la circonférence primitive.

Pour qu'une roue puisse en conduire plusieurs autres de même pas, il suffit de choisir, pour tout le système, un cercle générateur de diamètre constant ; de faire rouler ce cercle à l'extérieur de chacune des circonférences primitives pour décrire les épicycloïdes formant les faces, puis de faire rouler le même cercle à l'intérieur de chacune de ces circonférences pour décrire les hypocycloïdes formant les flancs.

La limite des dents s'obtiendra comme dans le cas précédent.

Le diamètre du cercle générateur ne doit jamais être plus grand que le rayon primitif de la plus petite des roues conjuguées, car les dents de celles-ci auraient, vers la base, une épaisseur moindre que sur la circonférence primitive, et elles pourraient devenir trop faibles pour résister à l'effort à transmettre. Au contraire, si le diamètre du cercle roulant est plus petit que le rayon de la circonférence primitive, la courbure que prennent les flancs fait que les dents augmentent d'épaisseur vers la base et deviennent ainsi plus résistantes. Il ne faudrait pas croire, pour cela, qu'il convienne de prendre le cercle roulant très-petit, car, dans ce cas,

la courbure des faces serait très-prononcée et les dents deviendraient trop courtes et trop pointues. Généralement, on prend pour diamètre du cercle roulant le rayon du cercle primitif de la plus petite roue du système.

Dans ces engrenages, comme dans les engrenages à flancs, l'effort de la dent menante sur la dent menée n'est pas constant. Aussi est-il préférable d'employer le tracé par développantes, qui remédie aux deux inconvénients que nous venons de signaler.

225. Engrenage à développantes.— Avant de nous occuper du tracé de ces engrenages pour lequel quelques mots suffiront, nous allons prouver qu'en prenant des développantes de cercle pour profils des faces, on obtient : 1° un rapport constant de vitesses angulaires : 2° l'effort exercé par une dent sur une autre est constant ; 3° une roue quelconque peut engrener avec plusieurs autres de diamètres différents, pourvu que le pas soit le même.

Soient O et O′ (*fig.* 195) les circonférences primitives et A leur point de contact. Menons par le point A une ligne droite quelconque TT′, et des centres O et O′ abaissons, sur cette droite, les perpendiculaires OP et O′P′, puis, des points O et O′ comme centres, décrivons des circonférences avec OP et O′P′ pour rayons. Ces circonférences qui ont la droite TT′ pour tangente commune, s'appellent les *circonférences conjuguées*. Faisons rouler la portion AT de la tangente sur le cercle OP ; le point A décrira une développante *m*AM ; la tangente AT′ roulant sur la circonférence O′P′ décrira de même la développante *m*′AM′ ; les deux courbes *m*AM, *m*′AM′ seront tangentes en A, point de contact situé sur la ligne des centres des circonférences primitives. Cela posé, faisons tourner la roue O pour que le point *m* vienne en m_1 ; le pignon tournera aussi, et le point *m*′ viendra en m'_1 ; le point A viendra en *a* sur la circonférence O, et en *a*′

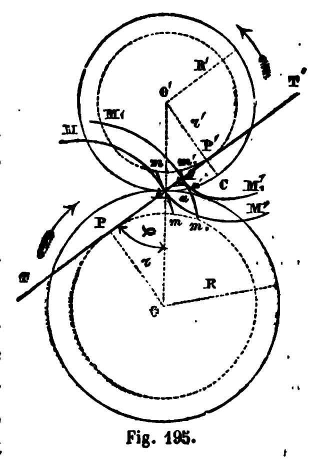


Fig. 195.

sur la circonférence O′ et l'on aura

$$\frac{mm_1}{Aa}=\frac{OP}{OA}=\frac{r}{R} \text{ et } \frac{m'm'_1}{Aa'}=\frac{O'P'}{O'A}=\frac{r'}{R'}.$$

Mais les triangles OAP et O′AP′ sont semblables et donnent

$$\frac{OP}{OA}=\frac{O'P'}{O'A} \text{ ou } \frac{r}{R}=\frac{r'}{R'} \quad \text{et par suite} \quad \frac{mm_1}{Aa}=\frac{m'm'_1}{Aa'}.$$

De plus, les arcs Aa et Aa' sont égaux comme arcs décrits dans un même temps, par les circonférences primitives ; on a donc finalement

$$mm_1=m'm'_1$$

Soit maintenant A_1 et A′ les points où les courbes, dans leur nouvelle position, coupent la tangente TT′. On sait, d'après les propriétés de la développante, que $PA_1=Pm_1$ et $PA=Pm$; par suite $AA_1=mm_1$; pour l'autre courbe on a de même : $AA'=m'm'_1=mm_1$. On voit donc que le point A s'est déplacé sur la tangente TT′, et pour chacune des courbes, d'une quantité égale à mm_1 ; par suite les points A_1 et A′ coïncident. Tirons les conclusions de ce que nous venons de démontrer

1° Le contact ayant toujours lieu sur la droite TT′, normale commune aux courbes passant par le point de tangence A des cercles primitifs, *le rapport des vitesses angulaires est constant.*

2° La normale commune aux courbes étant la tangente TT′ commune aux deux cercles conjugués, l'inclinaison de cette droite sur la ligne des centres ne varie pas, et l'*effort exercé par la dent menante sur la dent menée est constant.*

Il nous reste à prouver que, dans ces engrenages, une même roue peut conduire plusieurs pignons et réciproquement. Pour cela, il nous suffira de remarquer que les profils des dents ne dépendent nullement des cercles primitifs ; ainsi, dans la construction de la développante mAM, il n'entre que le cercle OP, et dans celle de la développante m'AM′ il n'y a que le cercle O′P′ qui intervient. Si donc on adopte une inclinaison quelconque de la droite TT′ sur la ligne des centres, toutes les roues de même pas pourront engrener ensemble, quels que soient leurs diamètres.

326. Inclinaison de la tangente.— L'inclinaison de la droite

TT′ sur la ligne des centres n'est pas indifférente. En effet, les rayons r et r' des cercles conjugués varient avec l'angle α ; plus cet angle sera petit et plus la courbure des développantes sera prononcée ; les courbes symétriques formant le profil des dents convergeront trop rapidement l'une vers l'autre, et il pourrait arriver que ces courbes se rejoignent avant que la dent menante ait conduit la dent conjuguée pendant toute la longueur de l'arc qu'on s'impose, ou tout au moins, que les dents soient trop faibles vers leur extrémité pour résister à l'effort à transmettre. Il faut donc déterminer l'inclinaison de la tangente TT′ ; le meilleur procédé consiste à porter, sur la circonférence primitive de la plus petite des roues du système, une longueur AC égale au pas, de mener le rayon O′C et d'abaisser, du point de contact A des cercles primitifs, la perpendiculaire AT sur ce rayon. Dans la plupart des ateliers, on se contente d'adopter un angle invariable, et l'on fait $\alpha = 75°$.

227. Tracé des engrenages à développantes. — Soit O et O′ (*fig.* 196) les circonférences primitives et A leur point de contact. Par le point A menons la droite TT′ faisant avec OO′ un angle de 75°. Avec les rayons OP, O′P′, décrivons les cercles conjugués et

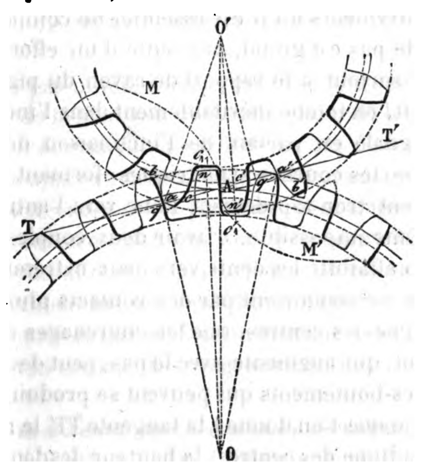


Fig. 196.

traçons les développantes AM et AM′ qui déterminent les profils des dents de la roue et du pignon. Portons, sur les circonférences primitives, des divisions égales au pas et partageons ces divisions

en deux parties respectivement égales au plein et au creux. Menons les rayons O*n* et O'*n'* qui divisent le plein en deux parties égales, et faisons passer par les points *c* et *c'*, un arc de la développante correspondante, symétrique de celui qui se trouve de l'autre côté de ces rayons. Les courbes se couperont aux points c_1, c'_1, et en découpant avec soin un gabarit sur ces dents, on tracera aisément l'engrenage complet.

228. Limite des dents. — Pour limiter les dents, traçons la courbe *a'b'* située à un pas de distance de la ligne des centres; cette courbe coupe la tangente TT' au point *a'* et si nous décrivons une circonférence du point O comme centre avec O*a'* pour rayon, cette circonférence limitera extérieurement toutes les dents de la roue. On limitera pareillement toutes les dents du pignon avec la circonférence O'*a*. Pour limiter intérieurement les dents, on opère exactement comme nous l'avons fait pour les engrenages à flancs. Les profils des dents sont des portions de rayon depuis la naissance des développantes sur le cercle conjugué jusqu'à la circonférence qui les limite intérieurement.

229. Inconvénients.— Les engrenages à développantes offrent aussi des inconvénients qu'il est essentiel de connaître.

1° Lorsque le pas est grand, par suite d'un effort considérable à transmettre, surtout si le rapport du rayon du pignon à celui de la roue est petit, on tombe inévitablement dans l'inconvénient que nous avons signalé en parlant de l'inclinaison de la tangente, c'est-à-dire que les courbes symétriques formant le profil des dents convergent trop rapidement l'une vers l'autre et il devient difficile, et même impossible, d'avoir deux couples de dents en prise sans trop affaiblir les dents vers leur extrémité. En outre, ces engrenages se conduisent par des contacts plus obliques, par rapport à la ligne des centres, que les engrenages épicycloïdaux; cet inconvénient, qui augmente avec le pas, peut devenir fort grave à cause des arcs-boutements qui peuvent se produire.

2° Lors même que l'on donne à la tangente TT' le minimum d'inclinaison sur la ligne des centres, la hauteur des dents, dans le sens du rayon, est plus grande, pour un même pas, que dans les engrenages épicycloïdaux, ce qui diminue leur solidité d'autant plus que la courbure des développantes est toujours plus accentuée que celle des épicycloïdes.

En définitive, on devra employer les engrenages à développantes de préférence à tout autre, toutes les fois que l'effort à transmettre ne sera pas très-considérable et qu'on voudra obtenir une grande régularité dans le mouvement, comme dans les horloges et dans tous les instruments de précision, par la raison que les pressions mutuelles des dents en contact sont constantes. Un autre avantage qui doit faire préférer cet engrenage, c'est que la distance des centres peut varier sans que la régularité du mouvement soit altérée, car il résulte des propriétés de la développante que la normale commune aux courbes, menée au point de contact, reste toujours tangente aux cercles conjugués et passe constamment par le point de tangence des cercles primitifs.

230. Tracé pratique des engrenages.— Les arcs de courbe, soit d'épicycloïde, soit de développante, qui forment le profil des dents dans les roues d'engrenage, ont toujours une longueur assez faible pour qu'il n'y ait pas d'inconvénient, dans la construction, à remplacer la portion de courbe théorique par un ou plusieurs arcs d'une autre courbe plus simple à tracer et se confondant sensiblement avec le profil exact. La circonférence étant la courbe la plus facile à décrire, il est tout naturel qu'on ait cherché à l'utiliser.

Lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande exactitude, on peut remplacer le profil de la dent par un seul arc de cercle dont le rayon et le centre sont convenablement déterminés ; mais si l'on veut une plus grande approximation, on arrive à un degré d'exactitude qui suffit aux exigences de la pratique, en remplaçant le profil des dents par deux arcs de cercle dont l'un forme la face et l'autre le flanc. Nous allons donner le tracé de ces engrenages au moyen de la méthode indiquée par Euler et introduite par Robert Willis dans les ateliers anglais ; cette méthode repose sur les théorèmes relatifs à la théorie des engrenages, due également à ce savant.

231. Tracé des dents par deux arcs de cercle.— Pour cette construction, on s'impose la condition que le point d'action exact du profil de la dent menante sur la dent menée, ait lieu un peu avant et un peu après la ligne des centres et à égale distance de cette ligne ; nous prendrons cette distance égale à la moitié du pas.

Soit O et O′ (*fig.* 197) les circonférences primitives de la roue et du pignon; par leur point de contact A, menons la droite TT′ qui peut être quelconque, mais qui, d'après Willis, doit faire un angle de 75° avec la ligne des centres pour que les dents aient une forme convenable. Menons, par le point A, la perpendiculaire PP′

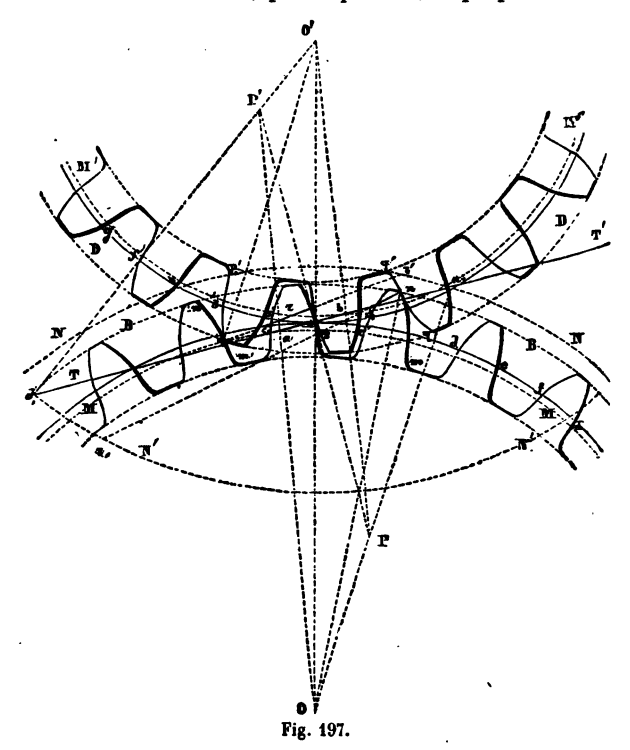


Fig. 197.

à la droite TT′ et prenons sur cette ligne des longueurs quelconques AP, AP′, mais égales entre elles. Joignons le centre O aux points P et P′; les lignes OP′, OP rencontrent la droite TT′ aux points a, a_1 qui sont les centres des arcs de cercle formant les faces et les flancs des dents de la roue O. Pour obtenir leur rayon, prenons sur la circonférence primitive O, des longueurs Ac, Ac_1 égales à la moitié du pas ; ac est le rayon des faces et a_1c_1 celui des flancs; avec Oa et Oa_1 pour rayons, on décrit des circonférences concentriques à la roue O et ces circonférences sont les lieux des centres

de courbure des faces et des flancs. Pour tracer les faces des dents, après avoir marqué sur la circonférence primitive les points d, e, f,.... par lesquels ces faces doivent passer, on prend une ouverture de compas égale à ac et on promène, sur la circonférence MM et dans le sens convenable, la pointe fixe du compas de manière que la pointe traçante passe par les points d, e, f,....

Pour tracer les flancs, on prendra a_1c_1 pour rayon et on procèdera d'une manière analogue en promenant la pointe fixe sur la circonférence NN. La denture du pignon se déterminera de la même manière. En joignant le centre O′ aux points P et P′, on obtient les points b et d_1 pour centres de courbure des faces et des flancs dont les rayons bs' et $d_1s'_1$ s'obtiennent en portant, sur la circonférence primitive, des longueurs As', As'_1 égales à la moitié du pas. En décrivant les circonférences M′M′, N′N′ avec $O'b$, $O'd_1$ pour rayons, on aura les lieux géométriques des centres des faces et des flancs.

332. Limite des dents.— Pour limiter les dents de la roue de manière que l'arc de conduite soit égal à un pas avant la ligne des centres et un pas après cette ligne, traçons les profils mn et qq' situés à une distance de la ligne des centres égale au pas de l'engrenage et joignons les centres s et r_1 de la face de la roue et du flanc du pignon. La droite sr_1 est la normale commune aux courbes et n leur point de contact. La conduite devant cesser à partir de cette position, on limitera les faces en décrivant la circonférence BB du point O comme centre avec On pour rayon.

On limitera pareillement les faces du pignon en déterminant le point de contact p' des courbes $p'p'_1$, $m'n'$ situées un pas avant la ligne des centres, et en décrivant la circonférence DD du point O′ comme centre avec $O'p'$ pour rayon.

Les flancs se limiteront comme dans tous les autres tracés d'engrenages.

333. Remarque importante. — Dans le tracé pratique de Willis, la denture de l'une quelconque des roues est complètement indépendante de l'autre. En effet, les dents de la roue O ne changeraient pas de forme lors même que cette roue engrènerait avec un autre pignon dont le rayon serait différent de O′A, à la condition que la longueur $AP = AP'$ reste constante. La position du centre O′ sur la ligne des centres ne modifie que les rayons de courbure bs', $d_1s'_1$ des faces et des flancs du pignon ; le rayon des flancs aug-

mente si O'A diminue, et ce même rayon diminue dans le cas contraire; l'inverse a lieu pour le rayon des faces qui augmente ou diminue avec O'A. Il résulte de là qu'en faisant l'angle TAO = angle T'AO' constamment égal à 75° et ne modifiant pas la longueur AP, toutes les roues de même pas pourront engrener convenablement ensemble quels que soient leurs diamètres.

La longueur AP ne peut pas être absolument quelconque. A mesure que O' se rapproche de A, la droite O'P' tend à devenir parallèle à TT', et lorsqu'elle est arrivée à cette position, le centre d_1 est rejeté à l'infini et le flanc du pignon O' devient une ligne droite.

Cette limite détermine la longueur maximum de AP, car si cette limite était dépassée, la ligne O'P' viendrait couper TT' du côté de T' et les flancs auraient une forme concave qu'on ne saurait pas admettre. Ainsi, lorsqu'on aura à construire un système quelconque d'engrenages, on prendra pour longueur maximum de AP' celle qui, combinée avec le rayon du plus petit pignon, rendra la droite O'P' parallèle à TT'; le flanc du plus petit des pignons sera alors une ligne droite.

La méthode que nous avons employée pour limiter les dents a l'avantage de faire voir que cet engrenage ne transmet pas rigoureusement le mouvement avec rapport constant de vitesses angulaires, puisque les normales communes aux courbes ne passent pas par le point contact A des cercles primitifs. Il n'y a que lorsque les profils en contact se trouvent aux points c et c_1 et s' ou s'_1 que cette condition existe; avant, les normales passent au-dessus du point A, et, après, elles passent au-dessous de ce même point.

A notre avis, le meilleur tracé pratique est celui qui consiste à tracer rigoureusement les courbes de profil et à chercher ensuite, par tâtonnements, le rayon et le centre des arcs de cercle qui se confondent sensiblement avec la portion utile de ces profils.

224. Engrenages intérieurs. — On appelle *engrenages intérieurs* les engrenages dont le cercle primitif du pignon est tangent intérieurement au cercle primitif de la roue. Dans ce cas, le point de contact des circonférences primitives se trouve sur le prolongement de la ligne des centres et les deux arbres tournent dans le même sens.

Théoriquement, tous les tracés que nous avons donnés pour les

engrenages sont applicables aux engrenages intérieurs ; mais en pratique on rencontre des difficultés qui les rendent inacceptables.

Dans les engrenages intérieurs, la jante de la grande roue est extérieure à sa circonférence primitive et elle a la forme d'une couronne placée en porte-à-faux à l'extrémité de son arbre.

Les engrenages intérieurs à lanterne, de même que les engrenages extérieurs du même genre, ne peuvent pas être réciproques. Si la roue conduit le pignon, on donne à celui-ci la forme d'une lanterne, et on prend pour profils des faces et des flancs des dents de la roue, des courbes parallèles à l'hypocycloïde et à l'épicycloïde engendrées par un point de la circonférence primitive du pignon, roulant intérieurement et extérieurement à la circonférence primitive de la roue.

On peut aussi disposer les fuseaux sur la circonférence primitive de la roue et armer de dents le pignon ; dans ce cas, c'est le pignon qui conduit.

L'engrenage intérieur à flancs n'est pas réalisable ; on verrait facilement, en faisant l'épure, qu'on ne peut pas armer, à la fois, de faces et de flancs les deux roues conjuguées et l'engrenage n'est pas réciproque ; les flancs droits pour la roue sont même complétement inadmissibles. Quand on veut employer ce tracé, on donne des faces hypocycloïdales à la roue et des flancs droits au pignon, et c'est la roue qui conduit.

Le tracé des engrenages à développantes donne aux dents de la roue des profils concaves ; cet inconvénient ne peut s'atténuer qu'en faisant un grand nombre de dents et le contact n'a lieu qu'à une petite distance avant et après la ligne des centres.

225. Engrenage intérieur à profils mixtes. — Le tracé qu'il convient le mieux d'employer pour les engrenages intérieurs est le suivant : Soit CC et C'C' (*fig.* 198) les circonférences primitives de la roue et du pignon et A leur point de contact. Traçons deux cercles roulants, l'un *c'c'* quelconque et l'autre *cc* ayant pour diamètre le rayon O'A du pignon. Le cercle *cc* roulant à l'intérieur de la circonférence CC engendre l'hypocycloïde AM, profil des faces de la roue ; ce même cercle, roulant à l'intérieur du cercle C'C', décrit une hypocycloïde qui se confond avec le diamètre O'A du pignon, et par suite les flancs de celui-ci sont droits. Le cercle

$c'c'$ roulant sur la circonférence $C'C'$, engendre l'épicycloïde AM', profil des faces du pignon ; ce même cercle, roulant sur la circonférence CC, décrit l'épicycloïde AM_1 profil des flancs de la roue.

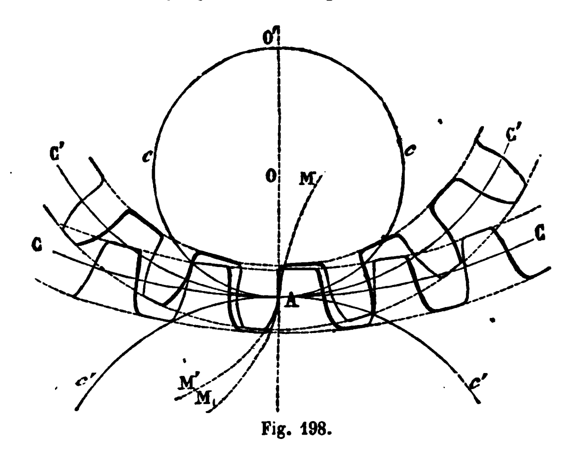


Fig. 198.

Tous les profils étant ainsi déterminés, on achèvera le tracé et on limitera les dents comme il a été dit pour les engrenages extérieurs à flancs, en remarquant que le contact a toujours lieu sur les cercles roulants.

Le cercle roulant $c'c'$ peut être quelconque, mais afin que les dents du pignon ne soient pas trop longues et trop pointues, il convient de le prendre assez grand ; généralement on lui donne un diamètre égal à celui du pignon.

336. Roues parasites.—Les engrenages intérieurs sont fort peu employées, car il est toujours facile d'obtenir des rotations de même sens au moyen d'engrenages extérieurs. En effet, soit O et O″ (*fig.* 199) la projection de deux axes qui doivent tourner dans le même sens. Montons sur ces axes deux roues d'engrenage ordinaires, de manière que leurs dents ne se touchent pas et dont les rayons R et R″ soient dans le rapport inverse des vitesses angulaires données, puis disposons une troisième roue quelconque O′ engrenant avec les deux autres. Si l'on fait tourner la roue O de gauche à droite par exemple, la roue O′ tournera de droite à gauche et forcera le pignon O″ à tourner dans le même sens que la première roue.

Dans ce système, le rapport des vitesses angulaires des roues O et O″ est le même que si ces roues engrenaient directement ; en effet, pendant le mouvement, les vitesses linéaires des circonférences primitives sont égales et si l'on appelle $\omega, \omega', \omega''$ les vitesses angulaires des trois roues, on aura

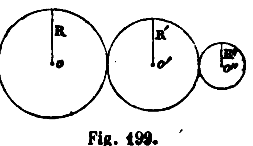


Fig. 199.

$$R\omega = R'\omega' = R''\omega'' \text{ d'où } \frac{\omega}{\omega''} = \frac{R''}{R}.$$

327. Trains d'engrenages.— Lorsque le rapport des vitesses angulaires doit être très-grand, on ne peut plus transmettre directement le mouvement, car il faudrait employer des roues d'un très-grand diamètre et des pignons trop petits ; dans ce cas, on a recours à un ou plusieurs arbres intermédiaires sur lesquels on cale des pignons et des roues.

La figure 200 représente un train avec deux arbres intermédiaires. La roue A engrène avec le pignon *b* et fait tourner la roue B ; celle-ci engrène avec le pignon *c* et fait tourner la roue C qui communique enfin le mouvement au pignon *d*.

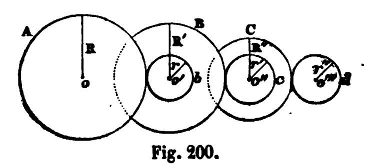


Fig. 200.

Le rapport des vitesses angulaires de la première roue et du dernier pignon est égal au rapport du produit des rayons des pignons et du produit des rayons des roues ; r, r', r'' étant les rayons des pignons et ω, ω', ω'', ω''' les vitesses angulaires des axes O, O′, O″, O‴, on aura, en considérant successivement chaque couple de roues conjuguées,

$$R\omega = r\,\omega'\,;\ R'\,\omega' = r'\,\omega''\,;\ R''\,\omega'' = r''\,\omega'''.$$

Multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs, on aura

$$R.R'.R''.\omega = r.r'.r''.\omega''' \text{ d'où } \frac{\omega}{\omega'''} = \frac{r.r'.r''}{R.R'.R''}.$$

328. Cas particulier des engrenages plans.— Supposons que, dans un engrenage extérieur ou intérieur, le rayon de la roue aug-

mente de plus en plus jusqu'à devenir infini; à la limite, sa circonférence deviendra une ligne tangente à la circonférence primitive du pignon. La roue se trouve alors remplacée par une barre droite portant la denture sur la face tournée vers le pignon; cette barre porte le nom de *crémaillère*, et elle doit être guidée de manière à ne pouvoir prendre qu'un mouvement de translation suivant sa direction propre.

Cet engrenage sert à transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne continu et réciproquement; il n'est qu'un cas particulier des autres engrenages et par suite tous leurs tracés lui sont applicables. Nous ne parlerons que de deux tracés qui offrent quelques particularités.

229. Crémaillère à flancs. — Soit O (*fig.* 201) le cercle primitif du pignon et XY la ligne primitive de la crémaillère. Le rayon OA qui passe au point de contact prend, par extension, le

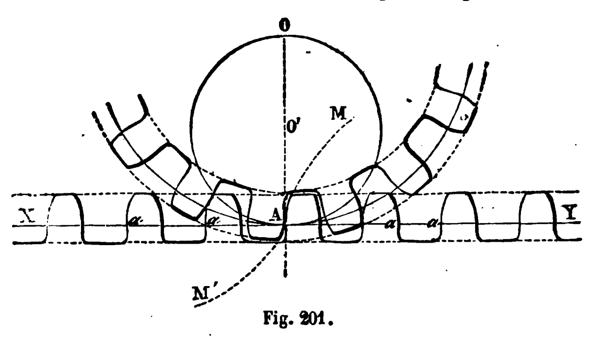


Fig. 201.

nom de *ligne des centres*. Traçons un cercle roulant O' ayant pour diamètre le rayon du pignon; ce cercle, roulant sur la ligne XY, engendre une cycloïde AM, profil des faces de la crémaillère; le même cercle, roulant à l'intérieur du cercle O, décrit un diamètre OA profil des flancs du pignon. Le cercle roulant qui doit engendrer les faces du pignon se trouve avoir un rayon infini; sa circonférence se confond avec la ligne XY et l'épicycloïde se transforme en une développante AM', décrite par le point A de la droite XY s'enroulant sur la circonférence primitive du pignon; le profil des faces du pignon est donc une développante. Quant aux flancs de la crémaillère, on les obtient en raccordant avec les courbes des faces, des droites perpendiculaires à sa ligne primitive.

Les dents se limitent comme dans les autres engrenages, en remarquant que, à gauche de la ligne des centres, le flanc du pignon conduit la face de la crémaillère et le contact a lieu sur le cercle roulant, tandis que de l'autre côté de la ligne des centres, c'est la face du pignon qui conduit le flanc de la crémaillère et le contact a constamment lieu sur la ligne XY.

Dans ce tracé, les flancs de la crémaillère ne servent qu'à donner passage aux dents du pignon. En effet, pendant la rotation du pignon autour de son centre O, la droite XY lui est toujours tangente; elle est donc constamment normale à toutes les faces du pignon et, comme il est dit plus haut, le contact de ces faces, avec les flancs de la crémaillère se fait sur la ligne XY, c'est-à-dire aux points *a*, sans jamais descendre plus bas. Il en résulte que les dents de la crémaillère s'usent promptement vers ces points *a* d'action unique et les profils se déforment; en outre, une crémaillère taillée pour un pignon déterminé ne peut pas engrener avec un autre pignon de diamètre différent, quoique ayant même pas.

340. Crémaillère à flancs courbes. — On évite ce double inconvénient en adoptant des flancs courbes. Les cercles générateurs sont quelconques; les faces et les flancs de la crémaillère sont des cycloïdes, et les faces et les flancs du pignon sont, comme dans le

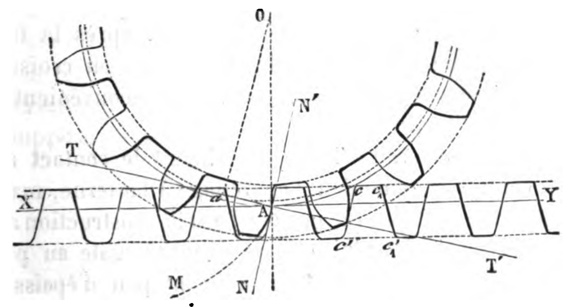


Fig. 202.

cas précédent, des épicycloïdes et des hypocycloïdes; mais ces dernières ne sont plus des lignes droites. Par ce tracé, on retombe dans le cas des engrenages épicycloïdaux.

341. Crémaillère à dents obliques.—Le tracé des engrenages

à développantes donne à la crémaillère une forme particulière représentée par la figure 202. Menons la droite TT′ passant par le point de contact A des lignes primitives du pignon et de la crémaillère. L'un des cercles conjugués se décrira avec Oa pour rayon et sa développante sera AM ; l'autre aura son centre à l'infini et sa développante sera une ligne droite NN′ perpendiculaire à la tangente commune TT′. La courbe AM sera le profil des dents du pignon et la droite NN′ celui des dents de la crémaillère. Le contact devant toujours avoir lieu sur la normale commune TT′ aux deux développantes, on limitera les dents comme on l'a fait pour les engrenages à développantes. Les dents de la crémaillère ont la forme d'un trapèze $cc_1c'c'_1$.

342. Arc-boutement. — On appelle *arc-boutement* l'effet qui se produit lorsque, dans un engrenage mal exécuté, le contact commence à une trop grande distance avant la ligne des centres. Reportons-nous à la figure 194 et soit O′ la roue menante et n' le point de contact des flancs de la roue O′ et de la face de la roue O ; joignons O′n' et On' ; la somme des droites O′n' et On' est évidemment plus grande que la ligne des centres OO′, et cette somme diminue graduellement pour devenir égale à OO′. Par conséquent, jusqu'à leur passage à la ligne des centres, les dents en contact agissent en se poussant et tendent à pénétrer l'une dans l'autre : c'est ce qui constitue l'arc-boutement. Il peut y avoir arrêt dans le mouvement ou rupture des dents. Après la ligne des centres, la somme O′n' + On' allant toujours en croissant, les dents tendent au contraire à se dégager et cet inconvénient n'existe plus.

L'arc-boutement serait évité en supprimant le contact avant la ligne des centres, comme dans l'engrenage à lanterne, mais alors l'engrenage ne serait pas réciproque. Dans la construction actuelle, on fait généralement conduire d'une quantité égale au pas avant et après la ligne des centres, en donnant peu d'épaisseur aux dents et en augmentant leur largeur ; l'engrenage étant bien exécuté, les dangers de l'arc-boutement sont peu à craindre.

343. Coinçage. — On appelle *coinçage* l'effet qui se produit lorsque, dans un engrenage, les arbres conducteur et conduit ne sont pas exactement parallèles, ou que les roues ne sont pas perpendiculaires aux axes des arbres ; dans ces deux cas, le contact n'a plus

lieu suivant une génératrice, et du côté où les plans des roues forment un angle aigu, la surface limitant extérieurement la dent vient s'appliquer fortement contre la surface limitant intérieurement le creux correspondant ; il en résulte un frottement considérable qui peut même arrêter le mouvement. Pour éviter le coinçage, il suffit d'opérer convenablement le montage des arbres et des roues.

244. Axes concourants.— Cônes de friction. — Lorsque les axes se rencontrent sous un certain angle, si l'effort à transmettre n'est pas considérable, on peut opérer la transmission par simple adhérence. Soit O et O′ (*fig.* 203) les axes qui se rencontrent au point S ; menons, dans l'angle OSO′, une droite quelconque SA ; cette droite, entraînée par la rotation de l'axe O, engendre un cône droit SAB à base circulaire, et la même droite, en tournant autour de l'axe O′, engendre le cône SAB′. Ces deux cônes se touchent suivant la génératrice SA et s'ils sont suffisamment pressés l'un contre l'autre, le cône moteur fera tourner le cône conduit sans qu'il y ait le moindre glissement. Appelons ω et ω' les vitesses angulaires des axes O et O′, R et R′ les rayons des circonférences de base des cônes respectifs; la vitesse linéaire du point A sera ωR sur la circonférence O, et $\omega' R'$ sur la circonférence O′. Le glissement étant supposé nul, ces deux vitesses linéaires sont égales et l'on a

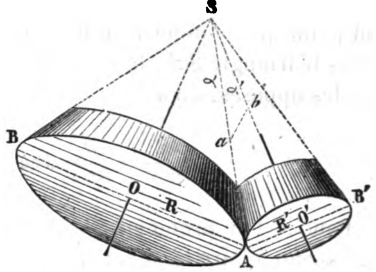


Fig. 203.

$$\omega R = \omega' R' \text{ d'où } \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}, \qquad (1)$$

ce qui montre que les vitesses angulaires des axes sont en raison inverse des rayons des sections droites des cônes faites par un même point de la génératrice de contact, ou, en d'autres termes, *que le mouvement est transmis avec rapport constant de vitesses angulaires.*

Les triangles SOA, SO′A sont rectangles et donnent

$$R = SA \sin \alpha \text{ et } R' = SA \sin \alpha',$$

d'où

$$\frac{R}{R'} = \frac{SA \sin \alpha}{SA \sin \alpha'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}.$$

Remplaçant dans la relation (1) il vient

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}.$$

Cette relation permet de trouver la direction de la droite SA lorsqu'on connaît le rapport des vitesses angulaires. En effet, par un point quelconque b de l'axe O′ menons ba parallèle à l'axe O; dans le triangle Sab, les côtés étant proportionnels aux sinus des angles opposés, on a

$$\frac{ab}{\sin \alpha'} = \frac{Sb}{\sin \alpha} \text{ d'où } \frac{ab}{Sb} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{\omega}{\omega'}.$$

Donc, si l'on prend sur l'axe O′ une longueur Sb représentant la vitesse angulaire ω' et si par le point b on mène à l'axe O une parallèle ba représentant la vitesse ω, la droite SaA sera la génératrice de contact des deux cônes qui se conduiront dans le rapport donné de vitesses angulaires.

Dans la pratique, on n'emploie jamais les cônes entiers et l'on se contente de deux troncs de cône de faible hauteur.

245. Engrenages coniques.— Les cônes de friction sont très-peu employés, car il arrive rarement que la simple adhérence suffise pour transmettre et assurer le mouvement. On les remplace par des troncs de cône dont les surfaces en contact sont armées de saillies et de creux, comme on remplace les cylindres de friction par des roues dentées. On constitue ainsi les *engrenages coniques* nommés aussi *roues d'angle*.

Le problème qu'on se propose ici est le même que pour les engrenages cylindriques, c'est-à-dire de trouver quelle est la forme à donner aux dents pour que le mouvement ait lieu comme si les cônes se conduisaient par simple contact. La solution théorique de ce problème rentre dans le domaine de la géométrie de la sphère, et n'est jamais employée dans la pratique à cause de la difficulté qu'offre le tracé des courbes sphériques. On leur substitue

la méthode approximative due à Tredgold, et qui repose sur ce que les dents étant toujours petites, le contact s'éloigne peu du plan des axes et des cônes primitifs, et l'on peut remplacer les lignes sphériques par des courbes tracées sur des surfaces coniques qui, comme on le sait, jouissent de la propriété d'être développables sur un plan.

346. Tracé pratique des engrenages coniques. — Soit SO et SO′ (*fig.* 204) les axes, et SAA_1, SAA'_1 les deux cônes se conduisant dans le rapport donné de vitesses angulaires et se touchant suivant la génératrice SA. Portons, sur cette génératrice, une longueur Aa', égale à la largeur des dents dans le sens des cônes; les troncs de cône $Aa'a_1A_1$ et $Aa'aA'_1$ ainsi obtenus constitueront les cônes primitifs servant de base au tracé des engrenages coniques. Menons, par le point A et dans le plan de la figure, une perpendiculaire OO′ à la génératrice de contact; cette droite rencontrera les axes aux points O et O′. Cela fait, prenons les points O et O′ pour sommets de deux nouveaux cônes OAA_1, $O'AA'_1$, respectivement opposés par la base aux cônes primitifs; ces nouveaux cônes s'appellent les *cônes de tête extérieurs*. Dans la rotation du système autour des axes SO, et SO′, les circonférences de base AA_1, AA'_1 sont toujours tangentes au point A, et les cônes OAA_1, $O'AA'_1$ ne cessent pas d'avoir une génératrice commune suivant OO′; ces cônes ont donc un plan tangent passant par OO′ et perpendiculaire au plan de la figure. Si on admet que les surfaces des deux cônes de tête aient une petite étendue commune de chaque côté de la génératrice de contact OO′, et si les courbes des dents qui viennent successivement passer dans le plan tangent sont assez petites pour être comprises dans cette étendue commune, on voit que ces deux cônes se transmettront le mouvement comme si les cercles de base, tangents en A, étaient armés d'un engrenage plan. Donc, en développant, dans le plan tangent, les surfaces coniques des deux cônes OAA_1, $O'AA'_1$ qui se transforment en deux secteurs circulaires tangents en A, et en déterminant, sur ces secteurs, un engrenage plan par l'un quelconque des tracés que nous avons étudiés, on obtiendra les patrons qui, appliqués sur les cônes respectifs, fourniront les profils des dents des roues d'angle, du côté opposé au sommet, ou ce qu'on appelle *la directrice de la surface des dents*.

Rabattons maintenant, dans le plan de la figure, les surfaces coniques développées dans le plan tangent. Pour obtenir les secteurs circulaires correspondants, des points O et O′, avec des

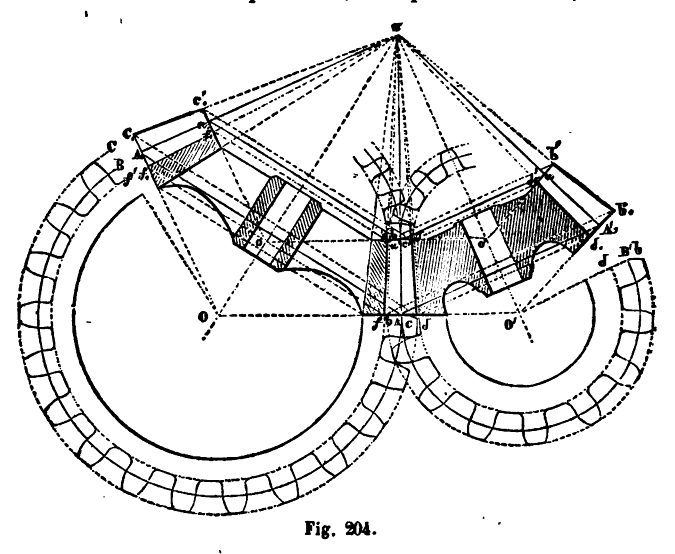
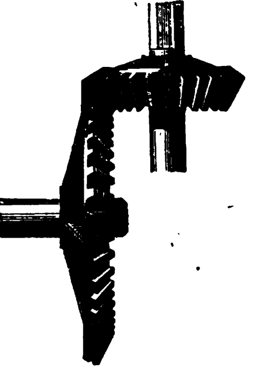


Fig. 204.

rayons OA et O′A, décrivons des arcs que l'on prendra égaux aux longueurs des circonférences de base AA_1, AA'_1 développées. Sur ces arcs AB, AB′, considérés comme des circonférences primitives, traçons un engrenage plan quelconque, à flancs, par exemple, en remarquant que le pas doit diviser exactement les arcs AB, AB′. Ces engrenages plans ayant été tracés sur des feuilles minces de tôle ou de carton, appliquons ces feuilles sur leurs cônes de tête respectifs. Une droite, passant constamment par le sommet S et assujettie à se mouvoir sur le profil des dents comme directrice, engendrera la surface conique des dents et le tracé sera terminé.

En pratique, le sommet S n'existe pas pour aider à l'exécution des dents ; on le remplace par une seconde directrice tracée sur une autre surface conique $oa'a_1$, $o'aa'$, parallèle à la surface conique qui contient la première directrice ; cette nouvelle surface porte le nom de *cône de tête intérieur*. Les deux tracés étant reportés sur les cônes de tête intérieur et extérieur et convenablement répétés par rapport aux mêmes plans méridiens, les profils de

l'un et de l'autre tracé, qui sont semblables, se correspondent exactement. En joignant les points homologues par des lignes droites, on obtiendra la surface complète des dents.


Fig. 205.

Les troncs de cône $cc_1c'_1c'$ et $bb_1b'_1b'$ limitent les faces des dents de la roue et du pignon; les troncs de cône $ff_1f_1'f'$ et $dd_1d_1'd'$ limitent pareillement tous les flancs.

Pour éviter toute confusion, nous n'avons pas projeté les dents sur la figure qui représente ainsi, suivant une coupe faite dans son plan, la forme des roues avec les bras et les moyeux. La figure 205 représente un engrenage conique monté sur deux axes se rencontrant à angle droit.

247. Axes dirigés d'une manière quelconque. — Soit O et O' (*fig.* 206) des axes non concourants et non parallèles, entre lesquels on veut établir une transmission avec rapport constant de vitesses angulaires. Prenons un axe intermédiaire AB (*a*) rencontrant les axes donnés aux points A et B; on peut toujours, pour

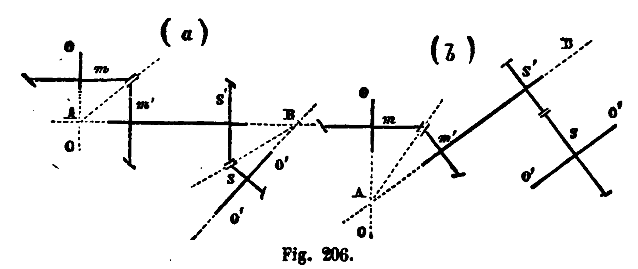


Fig. 206.

simplifier, faire l'un des angles OAB ou O'BA droit. Montons, sur ces trois axes, deux engrenages coniques, l'un ayant son sommet en A et l'autre en B. La transmission entre les axes O et O' sera assurée et, de plus, elle aura lieu avec rapport constant de vitesses angulaires. Ordinairement, on donne aux deux roues auxiliaires m' et s' un même nombre de dents et alors ce nombre est indifférent. En effet, soit ω, ω', ω'' les vitesses angulaires des axes O, O' et AB, n et n' les nombres de dents des roues m et s, et n'' le nombre de dents des roues m' et s' montées sur l'axe intermédiaire;

on aura

$$\frac{\omega}{\omega''} = \frac{n''}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\omega''}{\omega'} = \frac{n'}{n''}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n},$$

c'est-à-dire que le mouvement se transmet comme si les roues extrêmes *m* et *s* engrenaient directement ensemble.

On peut encore opérer cette transmission en prenant l'axe intermédiaire AB (*b*), parallèle à l'un des axes donnés, et le deuxième engrenage sera cylindrique. En adoptant les mêmes notations que ci-dessus, on verrait que ce nouveau système jouit des mêmes propriétés que le premier.

348. Cas particulier.—Vis sans fin.— Dans le cas particulier où les axes sont situés dans des plans perpendiculaires, on emploie une vis, appelée *vis sans fin*, formée de quelques filets, engrenant avec un pignon qui généralement est conduit par la vis.

349. Principe.— Imaginons que l'on ait tracé (*fig.* 207) l'engrenage d'un pignon et d'une crémaillère, dans le plan passant par l'axe

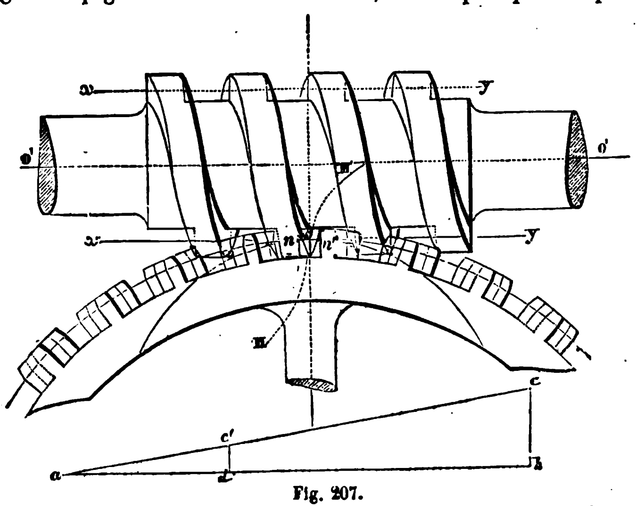


Fig. 207.

moteur O'O' perpendiculaire à l'axe O, de telle sorte que la ligne primitive *xy* de la crémaillère, soit parallèle à O'O'. Si l'on fait tourner le profil de la crémaillère jusqu'à ce que celle-ci ait accom-

pli une révolution entière pendant qu'elle s'est déplacée, de droite à gauche, d'une quantité égale au pas, les profils des dents décriront, dans ce mouvement de rotation, des surfaces hélicoïdales et la crémaillère sera transformée en une vis de même pas, dont le noyau sera le cylindre engendré par la ligne limitant les flancs et dont le filet aura pour section le profil d'une dent. Le cylindre $xyxy$, engendré par la ligne primitive de la crémaillère, prend le nom de *cylindre primitif;* on l'appelle quelquefois *cylindre moyen.*

Supposons maintenant que le pignon soit sans épaisseur dans le sens de son axe O, et que la vis, maintenue latéralement, ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation. Dans ce mouvement, les sections du filet qui viennent successivement se mettre en contact avec les dents du pignon, c'est-à-dire qui passent dans le plan de la figure, sont toujours égales et ont même profil, mais elles se déplacent graduellement et parallèlement à elles-mêmes dans le sens de l'axe O′O′; ces sections joueront donc, par rapport à la roue, le rôle des dents d'une crémaillère sans fin se mouvant en translation. Il résulte de là que les dents du pignon sont poussées et forcées de se déplacer; or la roue ne pouvant se mouvoir qu'autour de son axe, celui-ci prendra un mouvement de rotation. Tel est le principe de la vis sans fin.

250. Tracé pratique. — Le pas de la vis ayant été déterminé par la résistance des matériaux, d'après l'effort à transmettre, et le rayon du pignon, d'après le rapport des vitesses angulaires, on obtiendra la génératrice xy du cylindre primitif de la vis et la circonférence primitive O du pignon, tangente en A à xy. Actuellement, traçons l'engrenage d'un pignon et d'une crémaillère; les faces des dents du pignon seront données par la développante AM′, obtenue en enroulant la tangente Ay sur la circonférence O, et les flancs seront des hypocycloïdes ou des portions de rayon OA; les faces des dents de la crémaillère seront données par la cycloïde AM, obtenue en faisant rouler une circonférence de rayon $\frac{OA}{2}$ sur la droite xy, et les flancs seront des droites perpendiculaires à xy. Les faces et les flancs seront limités à la manière ordinaire.

Ceci posé, le filet de la vis s'obtiendra en enroulant la section plane d'une des dents de la crémaillère autour du cylindre primitif, ayant pour axe O′O′, de telle sorte que tous les points de cette

section décrivent des hélices de même pas égal au pas donné, et l'engrenage serait terminé si le pignon était sans épaisseur. Mais cette roue devant avoir, dans le sens de son axe O, une largeur égale à 4 ou 5 fois l'épaisseur de la dent, les faces latérales de cette dent, qui ont pour profils des développantes de cercle, doivent avoir, pour que la transmission soit possible, une certaine obliquité déterminée par l'inclinaison des filets de la vis. Pour obtenir cette obliquité, développons, sur un plan, la circonférence de base du cylindre primitif, en *ab*; en *b* élevons une perpendiculaire *bc* égale au pas, et joignons le point *a* au point *c*; portons sur *ab* une longueur *ad* égale à la largeur de la roue, et en *d* élevons la perpendiculaire *dc'*. Cette longueur *dc'* donne l'inclinaison totale des dents de la roue par rapport à son axe : si donc nous portons de chaque côté de la génératrice projetée en A, la moitié de *dc'*, à gauche sur la face antérieure et à droite sur la face postérieure, la droite qui joindra les deux points *n* et *n'* ainsi obtenus donnera l'inclinaison des dents de la roue.

Dans la plupart des cas, l'inclinaison du filet de la vis n'est pas très-grande et l'engrenage n'est pas réciproque; cette propriété est utilisée, en pratique, dans les manœuvres de vannes et dans les appareils à élever les matériaux, car, si pour une cause quelconque la puissance devient trop faible, la résistance qui agit sur l'axe de la roue ne peut pas entraîner cette roue et le mouvement devient impossible. Il faut, pour qu'il y ait réciprocité, que l'inclinaison des filets de la vis soit au moins égale à 45°.

Les vis sans fin peuvent être à un seul filet, à deux filets et quelquefois à trois filets au maximum; si elles sont à deux ou trois filets, le pas de la roue est égal au pas de la vis divisé par le nombre de filets.

Lorsque la vis est à un seul filet, pour un tour de la vis, le pignon tourne d'une dent; on aura donc, en désignant par ω et ω' les vitesses angulaires du pignon et de la vis et par n le nombre de dents du pignon,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{n}.$$

La vis étant à plusieurs filets, en désignant par n' ce nombre de filets, on aura

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}.$$

§ 5. — JOINTS

351. Joint de Oldham.—Pour établir une transmission directe entre deux arbres parallèles situés à une faible distance, on peut employer, outre les engrenages cylindriques, un organe connu sous le nom de *joint de Oldham.*

On réalise cette transformation de mouvement en terminant les bouts des deux arbres A et B (*fig.* 208) par des fourches F et F′, reliées entre elles au moyen d'un croisillon formé de deux tiges cylindriques *aa*, *bb*, dont les axes sont perpendiculaires et qui peuvent s'engager et glisser à frottement doux dans des trous *a*, *a*, *b*, *b*, appelés *œilletons*, pratiqués aux extrémités des branches des fourches F et F′. Ce croisillon peut ainsi glisser dans le sens des bras *aa*, *bb*, en restant dans un même plan perpendiculaire aux arbres. En communiquant le mouvement à l'arbre A, la fourche F sera entraînée, et par suite, la fourche F′ et l'axe B entreront en mouvement et les deux arbres seront rendus complétement solidaires si, comme nous l'avons supposé, les extrémités des croisillons glissent dans les œilletons des fourches des arbres.

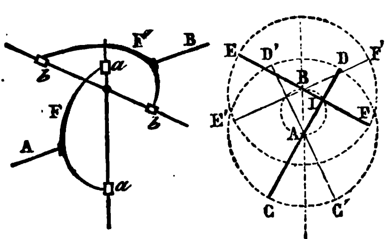


Fig. 208.

352. Rapport des vitesses angulaires. — Soit A et B les projections des axes sur un plan vertical; les projections des fourches se confondront avec les projections des bras du croisillon et seront représentées par les droites CD et EF, perpendiculaires entre elles et passant, la première par le point A et la seconde par le point B. Remarquons que les axes des bras *aa*, *bb*, décrivent, dans un même plan, des cercles perpendiculaires aux axes A et B; les extrémités C et D se trouveront donc, à chaque instant du mouvement, sur une circonférence décrite du point A comme centre avec AC pour rayon, et les extrémités E et F, sur une autre circonférence décrite du point B comme centre avec BF

pour rayon. Actuellement, supposons que la barre CD soit venue en C'D'; pour déterminer la position correspondante de l'autre barre, il suffit de mener, par le point B, une droite E'F' perpendiculaire à la direction C'D'. Or les angles FBF' et CAC' sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; donc, les angles décrits par chacun des bras du croisillon sont égaux. La vitesse angulaire des deux arbres est donc égale, et, si le premier est animé d'un mouvement uniforme, il en sera de même du second.

La direction des bras du croisillon passant constamment par la direction des arbres A et B, leur point d'intersection I, qui est le centre du croisillon, décrit, pendant une révolution entière des arbres, une circonférence ayant AB pour diamètre, car ce point se trouve, à chaque instant, sur le sommet d'un angle droit BIA inscrit dans cette circonférence.

358. Joint universel. — Le *joint universel*, appelé *joint de Cardan* ou *joint de Hooke*, est un organe employé pour transmettre le mouvement de rotation d'un arbre à un autre arbre faisant avec le premier un certain angle.

Soit A et B (*fig.* 209) les arbres dont les axes se coupent en un point I; on termine les bouts des deux arbres A et B par des fourches F et F' reliées entre elles au moyen d'un croisillon analogue à celui du joint précédent, qui présente aux extrémités de ses deux bras *aa*, *bb*, perpendiculaires entre eux, quatre tourillons venant s'engager dans les œilletons pratiqués dans les fourches. Ces tourillons ont la faculté de tourner dans les œilletons, mais sans prendre un mouvement de glissement longitudinal, et le centre du croisillon coïncide avec le point d'intersection des axes A et B. Le mouvement de rotation étant imprimé à l'arbre moteur A, la fourche qui le termine, ainsi que le croisillon, seront entraînés avec lui, et comme les bras *aa*, *bb* sont solidaires, l'arbre B prendra un mouvement de rotation.

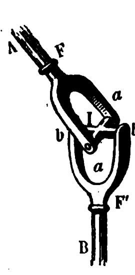


Fig. 209.

L'axe du bras *aa* décrira un cercle de centre I, perpendiculaire à l'arbre A; et l'axe du bras *bb* décrira un autre cercle de même centre que le premier, mais situé dans un plan perpendiculaire à l'arbre B.

Il est évident que les arbres accomplissent une révolution en-

tière pendant le même temps, mais le rapport des vitesses angulaires n'est pas constant; l'arbre moteur ayant un mouvement uniforme, l'arbre conduit prendra un mouvement varié.

On démontre que les vitesses angulaires sont égales après chaque quart de tour et qu'elles passent par les mêmes phases pendant chaque quart de révolution. Ce rapport des vitesses angulaires varie suivant l'angle des axes, et il varie d'autant plus que cet angle devient plus petit. Si l'angle est égal à 90°, la transmission devient impossible, car la rotation des arbres tend à tordre les tourillons et non à les faire tourner.

En général, on ne doit employer cet organe que si l'angle AIB formé par les deux axes n'est pas inférieur à 135°.

Il résulte de la disposition même de cet appareil que l'on peut faire varier l'inclinaison des axes, soit pendant la marche, soit au repos ; cette propriété caractéristique du joint universel est mise à profit pour relier les diverses parties d'un arbre de couche de grande longueur. Comme il est très-difficile, en pratique, de disposer un arbre de couche formé de plusieurs parties, de telle sorte que les axes soient exactement en ligne droite, on relie entre elles les extrémités des arbres par des joints universels. En outre, on évite les flexions qui pourraient se produire par suite d'un tassement irrégulier du terrain et qui détermineraient des pressions nuisibles des tourillons sur les coussinets des paliers. Les angles formés par les axes des arbres étant voisins de 180°, la transmission du mouvement a sensiblement lieu avec rapport constant de vitesses angulaires.

En Hollande, on emploie le joint universel pour transmettre le mouvement donné par les moulins à vents aux vis d'Archimède destinées aux épuisements, les variations de vitesse étant sans inconvénient pour ce travail.

On l'emploie dans la marine en remplaçant le croisillon par une couronne, pour suspendre les lampes et particulièrement les boussoles qui peuvent ainsi rester sensiblement immobiles malgré les oscillations en tous sens du navire.

Lorsque l'angle formé par les deux axes est inférieur à 135°, ou lorsque ces deux axes ne se rencontrent pas, on emploie un troisième axe intermédiaire coupant les deux premiers sous un angle de 135° environ. En reliant les extrémités de ce troisième arbre à

celles des arbres donnés, par deux joints universels, on pourra transmettre le mouvement avec des rapports de vitesse bien différents, variant, comme nous l'avons déjà dit, avec les angles des axes.

Dans le cas particulier où les axes conducteur et conduit sont parallèles, l'axe intermédiaire fait avec chacun d'eux des angles égaux ; il en résulte que les variations de vitesse se balancent à chaque instant et, par suite, le mouvement est transmis avec rapport constant de vitesses angulaires.

354. Double joint de Hooke.— Si l'on veut transmettre le mouvement entre deux axes se coupant sous un angle inférieur à 135°, et dont les extrémités sont trop rapprochées pour permettre l'emploi d'un axe intermédiaire, on se sert de la disposition appelée *double joint de Hooke*. Ce double joint (*fig.* 210) n'est autre chose que l'axe intermédiaire réduit aux deux fourches qui le terminent ; il permet de transmettre le mouvement quel que soit l'angle formé par les deux axes. En disposant la double fourche de telle sorte que son axe fasse des angles égaux avec les deux autres, le mouvement se transmettra avec rapport constant de vitesses angulaires.

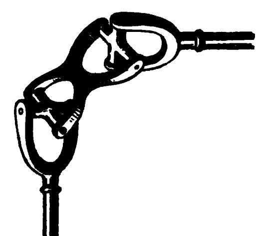


Fig. 210.

§ 6. — BIELLE ET MANIVELLE. — MANIVELLE ET TIGE GUIDÉE

355. Bielle et manivelle.— Pour transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif et réciproquement, on emploie le dispositif *bielle et manivelle* représenté par la figure 211.

Sur l'arbre D qui doit être animé d'un mouvement de rotation, on fixe invariablement, par une clavette, une pièce en fer ou en fonte, appelée *manivelle*, qui porte, à son extrémité K, un tourillon cylindrique appelé *bouton*, dont l'axe est parallèle à celui de l'arbre D. Ce bouton K vient s'articuler à l'une des extrémités d'une longue pièce en fonte ou en fer, nommée *bielle*, dont l'autre extrémité est articulée à la tête de la tige du piston, mobile entre

deux glissières parallèles E placées symétriquement et de chaque côté de cette tige qui reçoit un mouvement rectiligne alternatif;

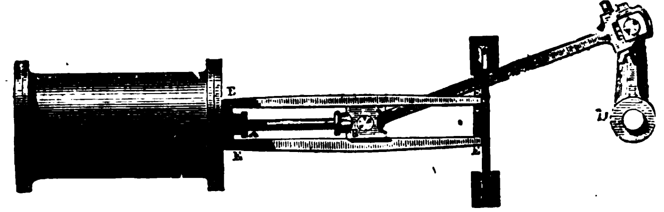


Fig. 211.

celui-ci est transmis par l'intermédiaire de la bielle et de la manivelle à l'arbre D qui prend un mouvement de rotation.

256. Rapport des vitesses. — Soit D (*fig.* 212) la projection verticale de l'axe de l'arbre sur lequel est calée la manivelle DK, et BK la bielle dont l'une des extrémités est articulée au bouton K de la manivelle, et l'autre à la tige AB du piston. Dans le mouvement simultané de la bielle et de la manivelle, le point K décrit une trajectoire qui est la circonférence ayant DK pour rayon, et le point B parcourt une ligne droite. Considérons une position quelconque DK et BK du système et proposons-nous de déterminer le rapport qui existe entre la vitesse angulaire de l'arbre et la vitesse linéaire de la tige du piston. Si aux points B et K nous menons les normales aux trajectoires décrites, ces normales viendront se couper en un point O, centre instantané de rotation, et pendant un temps infiniment petit, le mouvement réel du système pourra être considéré comme s'effectuant autour du point O comme centre. Or, dans le mouvement de rotation, les vitesses étant proportionnelles aux rayons, nous aurons, en désignant par V et V′ les vitesses simultanées des points B et K,

$$\frac{V}{V'}=\frac{OB}{OK}. \qquad (1)$$

Au point D, menons le rayon DI perpendiculaire à la direction AD; prolongeons BK jusqu'à sa rencontre en I avec ce rayon, et appelons r et h les longueurs DK et DI. Les triangles OBK et IDK étant semblables donnent

$$\frac{OB}{OK}=\frac{h}{r}.$$

Remplaçant dans l'équation (1), il vient :

$$\frac{V}{V'} = \frac{h}{r}, \quad \text{d'où l'on tire } V = V' \times \frac{h}{r}.$$

Mais ω étant la vitesse angulaire de l'arbre D, la vitesse linéaire du point K sera exprimée par ωr, et l'on aura pour l'expression de la vitesse du point B

$$V = \omega r \times \frac{h}{r} = \omega h.$$

Cette relation nous montre que, si la vitesse angulaire ω est constante, la vitesse linéaire V varie proportionnellement à h. Cette vitesse sera maximum lorsque h atteindra sa plus grande valeur Dk'

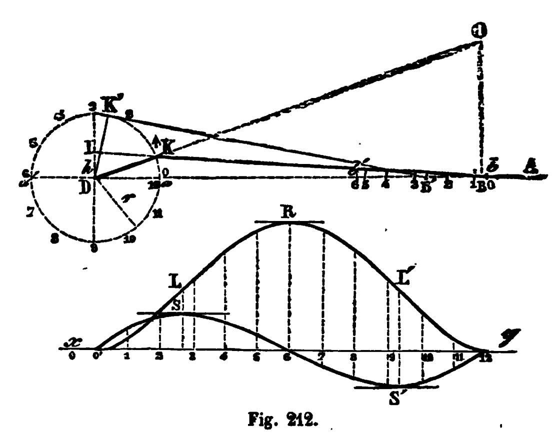


Fig. 212.

correspondant à l'instant où la bielle et la manivelle sont à angle droit, et elle sera minimum ou égale à zéro à l'instant où la bielle et la manivelle seront dans le prolongement l'une de l'autre. Les points a, a' correspondant à l'instant où la vitesse V est nulle sont appelés *points morts*. Ainsi, le bouton K de la manivelle étant en a, la vitesse est nulle ; cette vitesse augmente graduellement à mesure que K se rapproche de K' où elle atteint sa plus grande valeur ; ensuite elle décroît pour redevenir nulle quand K est venu en a'. Pendant l'autre demi-révolution, la vitesse repasse par les mêmes variations qui se produisent dans un ordre inverse.

Remarque. — Le chemin parcouru par un point de la tige animée

d'un mouvement rectiligne alternatif est rigoureusement égal, pour chaque demi-révolution de l'arbre D, au diamètre de la circonférence décrite par le bouton de la manivelle ou, en d'autres termes, la course de la tige est égale au double de la longueur de la manivelle.

357. Représentation graphique de la loi des espaces et de la loi des vitesses.— Soit D le centre de rotation de la manivelle situé sur le prolongement de l'axe de la tige du piston. A partir du point a, divisons la circonférence décrite par le bouton de la manivelle en un certain nombre d'arcs égaux, 12 par exemple, et des points 1,2,3...., comme centres, avec la longueur invariable de la bielle pour rayon, décrivons des arcs de cercle qui coupent la ligne bb' en différents points 1,2.3...., tels que leurs distances respectives au point b représentent les chemins parcourus par l'extrémité de la bielle pendant que la manivelle se déplace des arcs $a1$, $a2$, $a3$.... A partir du point b', l'extrémité B de la bielle reviendra en arrière et repassera par les mêmes points, mais en sens inverse.

Ceci posé, portons, sur une droite indéfinie xy, la longueur de la circonférence DK développée et divisons cette ligne en douze parties égales. Aux points de division 1, 2, 3...., élevons des ordonnées sur lesquelles nous prendrons des longueurs respectivement égales aux chemins parcourus par l'extrémité de la bielle. En joignant tous les points obtenus par un trait continu, on aura une courbe représentant la relation du mouvement de la manivelle et de la tige. Cette courbe est symétrique par rapport à la ligne 6R, ce qui montre que, pendant chaque demi-révolution, le mouvement simultané de la tige et du bouton et de la manivelle passe par les mêmes phases.

Connaissant la position du bouton de la manivelle à un instant quelconque, il est facile, au moyen de cette courbe, de déterminer l'espace parcouru correspondant par la tige. Si, par exemple, on donne, exprimé en degrés, l'angle décrit par le bouton de la manivelle à partir de sa position initiale, n représentant ce nombre de degrés et x la longueur de l'arc, on aura

$$\frac{360}{n}=\frac{2\pi r}{x}\text{; d'où } x=\frac{2\pi rn}{360}=\frac{\pi rn}{180}.$$

Cette valeur de x étant connue, on la portera à partir du point o, sur l'axe xy, et au point ainsi déterminé on élèvera une ordonnée dont la grandeur sera l'espace cherché.

Pour obtenir la courbe des vitesses, on peut déterminer, aux différents points de la courbe des espaces, l'inclinaison des tangentes menées en ces points, ou employer la formule

$$V = V' \times \frac{h}{r}.$$

On obtient ainsi la courbe OS6S'12 représentative des variations de la vitesse de la tige. L'inspection de cette courbe nous fait voir, comme nous l'avons démontré analytiquement, que la vitesse atteint son maximum lorsque la bielle et la manivelle sont à angle droit; à cet instant, la courbe présente un point d'inflexion I et la tangente atteint son maximum d'inclinaison sur la ligne xy. Pendant une révolution entière de la manivelle, la vitesse atteint deux fois un même maximum aux points S et S' situés sur les ordonnées des points d'inflexion, puis elle diminue graduellement jusqu'à devenir nulle à l'instant où la bielle passe aux points morts 6 et 12.

358. Manivelles doubles, triples.— Il arrive souvent que l'on cale deux manivelles sur un même arbre; on diminue ainsi les variations de vitesse de cet arbre en disposant les manivelles pour que les points morts de l'une d'elles correspondent au maximum de vitesse de l'autre. Les machines à vapeur, en général, ne possèdent qu'une seule manivelle; mais un organe, appelé *volant*, sert à resserrer les variations de la vitesse et à faire passer la bielle aux points morts. L'emploi de cet organe ayant de graves inconvénients à bord des bâtiments, toutes les machines marines sont à deux cylindres possédant chacun une bielle et une manivelle calée sur le même arbre moteur, mais à angle droit; l'une des manivelles passant aux points morts, l'autre atteindra son maximum de vitesse et réciproquement; la vitesse de l'arbre moteur pourra être ainsi considérée comme constante.

On peut également disposer trois manivelles sur le même arbre; on obtient une manivelle triple et le mouvement de rotation de l'arbre peut être transmis simultanément à trois tiges rectilignes. Les axes des boutons des manivelles, se projetant sur une même circonférence, sont également espacés et forment entre eux des

angles de 120°. On obtient ainsi une grande régularité d'action et des écarts moindres dans la vitesse; mais les manivelles triples ont l'inconvénient d'être d'une exécution et d'une installation difficiles.

359. Roues couplées.— Pour relier entre elles deux roues qui ont exactement le même diamètre, et dont les axes de rotation sont parallèles, on cale, à l'une des extrémités des arbres, deux manivelles égales A et B (*fig.* 213), placées d'une manière analogue et dont les boutons A et B sont réunis par une bielle C, appelée

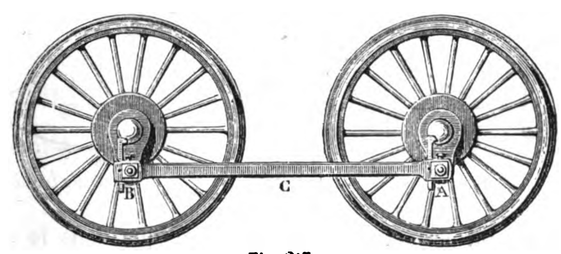


Fig. 213.

bielle d'accouplement, qui a pour longueur la distance des axes des arbres. Les roues tournant d'un même arc pendant le même temps et les diamètres étant égaux, les chemins parcourus à la circonférence extérieure sont égaux, et, par suite, les vitesses angulaires sont égales. Cette disposition est employée dans les locomotives pour avoir une plus grande adhérence, et chacun des essieux porte deux manivelles calées à angle droit.

Ordinairement, l'un des rayons de la roue fait office de manivelle et, à cet effet, ce rayon porte un renflement dans lequel est implanté très-solidement le bouton.

360. Manivelle et tige guidée à coulisse.— Pour transformer le mouvement de rotation uniforme de l'axe O en un mouvement varié de translation d'une tige CD (*fig.* 214), assujettie à se mouvoir en ligne droite par des guides G et G', on cale, sur l'axe O, une manivelle OA, dont le bouton A vient s'engager entre les branches d'une coulisse rectiligne, formée de deux barres parallèles E et E' faisant corps avec la tige CD. L'axe de celle-ci est perpendiculaire à celui de la coulisse, et le plan de ces deux droites est perpendiculaire à l'axe O. Le bouton cylindrique de la manivelle ne tourne

pas entre les branches de la coulisse ; il est entouré d'un coussinet rectangulaire qui glisse à frottement doux dans cette coulisse, et, pour éviter son déplacement latéral, on le munit de *rebords*

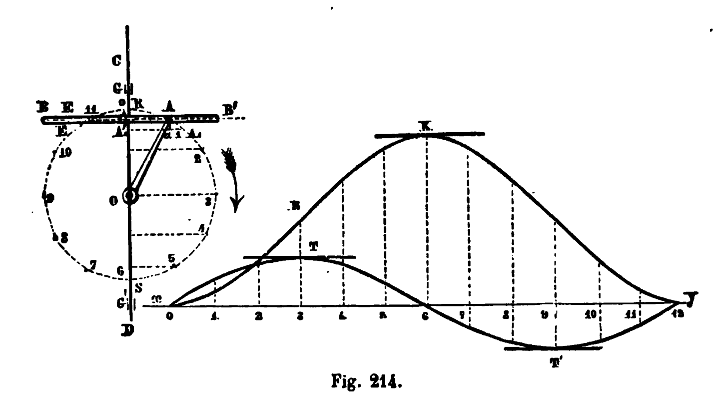


Fig. 214.

ou *joues* ne lui permettant de se mouvoir que dans le sens de l'axe BB'.

La longueur de la coulisse doit être au moins égale au double du rayon de la manivelle.

361. Rapport des vitesses.— L'axe A du bouton de la manivelle devant toujours coïncider avec l'axe BB' de la coulisse, le mouvement de celle-ci peut être assimilé, pendant la rotation de l'arbre O, au mouvement de la projection rectangulaire A' du point A sur le diamètre RS ; déterminons donc, sur ce diamètre, le mouvement de la projection A' du point A qui se meut uniformément sur la circonférence de rayon OA.

Supposons que le mouvement du point A, dont nous désignerons la vitesse par V, ait lieu dans le sens de la flèche, et soit V' la vitesse de sa projection A'. Considérons un déplacement très-petit du système, tel que le point A soit venu en A_1 au bout d'un temps très-petit ; sa projection correspondante se trouve en A'_1 et les chemins parcourus sur les trajectoires respectives des points A et A' seront AA_1 et $A'A'_1$. Or, pendant ce déplacement infiniment petit, le mouvement du point A' est sensiblement uniforme, et l'on a

$$\frac{V}{V'} = \frac{AA_1}{A'A'_1}. \qquad (1)$$

Le point A_1 étant supposé infiniment voisin du point A, l'arc AA_1 se confond avec l'élément de la tangente menée en A, et est perpendiculaire au rayon OA. Menons la parallèle A*a* au diamètre RS; la droite A*a* est égale à $A'A'_1$ et les triangles OAA' et AaA_1, qui sont semblables comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, donnent

$$\frac{AA_1}{Aa}=\frac{OA}{AA'}\quad \text{Mais } Aa=A'A'_1\text{; donc } \frac{AA_1}{A'A'_1}=\frac{OA}{AA'}$$

En remplaçant dans l'équation (1), il vient

$$\frac{V}{V'}=\frac{OA}{AA'}=\frac{h}{r},$$

r désignant le rayon OA et *h* la longueur de l'ordonnée AA'; de cette égalité on tire

$$V'=V\times\frac{h}{r}.$$

Or V et *r* sont des quantités constantes; donc V' est proportionnelle à *h* ou à l'ordonnée du point A.

Ainsi, la vitesse de la coulisse aux différentes positions du bouton A de la manivelle est proportionnelle aux ordonnées telles que AA'. Cette vitesse est nulle au point R; elle croît graduellement jusqu'au point 3 où elle atteint son maximum, pour décroître ensuite jusqu'au point 6 où elle redevient nulle. A partir de cet instant, le mouvement change de sens et la vitesse repasse, pendant la demi-révolution 6, 12, par les mêmes valeurs que dans la demi-révolution 0, 6.

262. Représentation graphique de la loi des espaces et de la loi des vitesses.— La courbe des espaces et celle des vitesses s'obtiendront comme on l'a fait pour le dispositif bielle et manivelle. L'inspection de la courbe nous fait voir que de O à R, la courbe tourne sa convexité vers le bas et le mouvement est accéléré; en R elle présente un point d'inflexion, et jusqu'au point K le mouvement est retardé, la courbe tournant sa concavité vers le bas. Au point K, où la tangente est horizontale, le mouvement change de sens et l'ordonnée de ce point est égale au diamètre RS. Pendant

la demi-révolution 6, 12 les mêmes phases se reproduisent dans le mouvement, mais en ordre inverse.

Les observations que nous venons d'indiquer sont encore données par la courbe des vitesses; en effet, on voit que la vitesse augmente jusqu'au point d'inflexion R de la courbe des espaces; elle diminue pour devenir nulle jusqu'au point 6 où le mouvement change de sens, puis elle augmente jusqu'au point T' pour redevenir nulle au point 12.

§ 7. — EXCENTRIQUES

363. La transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif s'effectue aussi au moyen d'organes appelés *excentriques*, dont les principaux sont : l'excentrique circulaire à collier, l'excentrique circulaire à cadre et l'excentrique triangulaire.

364. Excentrique circulaire à collier. — Cet organe se compose d'un disque circulaire en métal E (*fig.* 215), plein ou évidé, calé sur l'arbre moteur D par un point autre que son centre K. Ce dis-

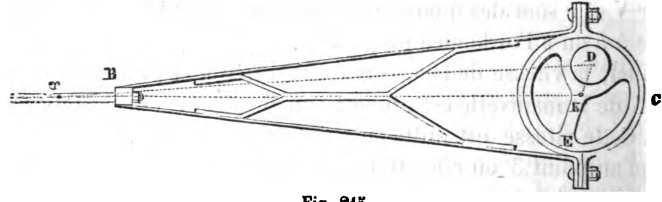


Fig. 215.

que est embrassé par un collier C, appelé *bague*, formé de deux parties boulonnées l'une à l'autre, à l'intérieur duquel le disque peut tourner à frottement doux. Le collier porte deux tiges appelées *barres d'excentrique*, servant à le relier à l'extrémité B de la tige qu'on veut faire mouvoir d'un mouvement rectiligne alternatif suivant la direction xD passant par l'axe de rotation D.

Cet organe n'est qu'une variété du dispositif *bielle et manivelle.* En effet, joignons le point K aux points D et B; la longueur des droites DK et BK ne change pas pendant la marche, et il en résulte que le mouvement de l'extrémité B de la tige est exactement le même que si ce point B se trouvait relié à l'arbre D, par

l'intermédiaire d'une bielle BK et d'une manivelle DK montée sur cet arbre.

On peut encore considérer cet excentrique comme une manivelle dont le diamètre du bouton, augmentant de plus en plus, finirait par embrasser l'arbre D lui-même. Donc tout ce qui a été dit relativement à la loi de mouvement du système bielle et manivelle, s'applique ici sans aucune restriction.

La distance DK de l'axe de rotation au centre du disque s'appelle l'*excentricité*.

La transformation de mouvement opérée au moyen de cet excentrique n'est pas réciproque comme si l'on employait une bielle et une manivelle; la tige ne peut mener l'excentrique et par suite communiquer le mouvement à l'arbre. Un autre inconvénient de cet excentrique, c'est que le frottement du disque contre la bague est assez considérable, et cet appareil ne peut servir pour transmettre de grands efforts. On l'emploie très-souvent dans les machines à cause de la facilité avec laquelle on peut le caler en un point quelconque d'un arbre tournant; il évite le coude qu'il faudrait pour livrer passage à une bielle conduite par une manivelle.

365. Excentrique circulaire à cadre. — La bague de l'excentrique est quelquefois remplacée par un cadre rectangulaire MNM'N' (*fig.* 216), à l'intérieur duquel se meut le disque circulaire qui touche constamment les deux côtés MN et M'N'. Une tige CD, fixée au milieu de ces côtés et convenablement guidée, reçoit, pendant la révolution du disque, un mouvement rectiligne alternatif dont la course est égale à 2OA, c'est-à-dire au double de l'excentricité.

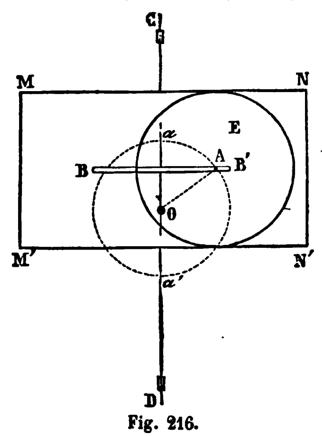


Fig. 216.

Cet excentrique n'est encore qu'une variété du dispositif que nous avons appelé *manivelle et tige guidée à coulisse*. En effet, le mouvement de la coulisse BB' sera le même, quel que soit le diamètre du bouton A de la manivelle; si nous supposons que ce diamètre augmente jusqu'à englober l'axe O lui-même, la manivelle devien-

dra le disque E et la coulisse se sera élargie jusqu'à devenir le cadre MNM'N'; de plus, la loi de mouvement ne sera pas changée. Donc la tige CD se meut exactement comme si elle était reliée à une coulisse BB', conduite par une manivelle OA dont la longueur serait égale à l'excentricité, et, par suite, comme la projection rectangulaire du centre A du disque sur le diamètre *aa'* de la circonférence décrite de l'axe O comme centre avec l'excentricité pour rayon.

268. Excentrique triangulaire. — Cet excentrique sert à transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif avec intermittences. Il se compose d'un prisme droit, dont la section droite est un triangle équilatéral $O_1A_1B_1$ (*fig.* 217), dont les côtés ont été remplacés par des arcs de cercle dé-

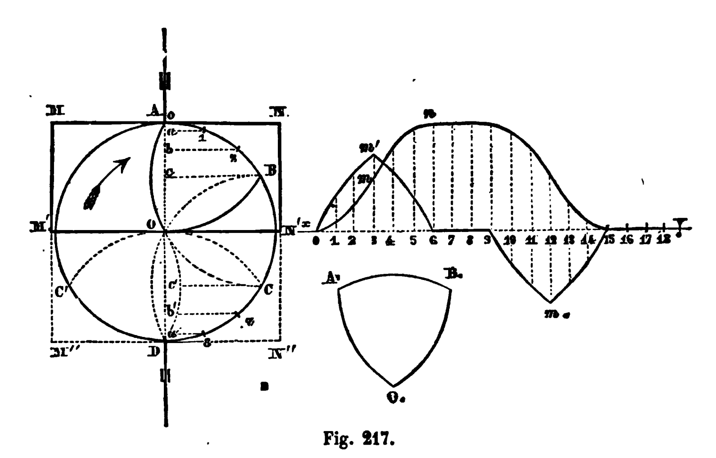


Fig. 217.

crits des sommets opposés comme centres avec les côtés pour rayons. Ce prisme, de $0^m,02$ à $0^m,04$ de hauteur, et toujours fait en acier afin qu'il s'use peu, est fixé en saillie sur un plateau circulaire, de manière que l'un des sommets corresponde à l'axe de rotation. Le rayon du plateau est égal à celui des arcs qui forment le triangle curviligne; celui-ci tourne à l'intérieur d'un cadre MNM'N' ayant pour hauteur le rayon du plateau, et communique à ce cadre un mouvement rectiligne alternatif avec repos à chaque changement de sens.

Soit OAB, la position initiale de l'excentrique, et supposons que

le plateau tourne dans le sens de la flèche. Pendant le passage de l'excentrique de sa position initiale à la position OBC, l'arc OB pousse le côté inférieur du cadre, tandis que l'autre côté s'appuie constamment sur le sommet A ; au bout de $\frac{1}{6}$ de tour, le sommet B sera venu en C et, à partir de cet instant, il pousse le côté inférieur du cadre tandis que l'arc OA, qui est venu en OB, glisse sur le côté supérieur jusqu'à ce que l'excentrique prenne la position OCD à la fin du deuxième $\frac{1}{6}$ de tour. A partir de cette position, jusqu'à la position ODC', c'est l'arc CD qui vient en contact avec le cadre, et comme tous ses points sont également éloignés du centre de rotation, le cadre reste stationnaire dans sa position M'N'M''N'' pendant le troisième $\frac{1}{6}$ de tour. La nouvelle position ODC' de l'excentrique étant symétrique de sa position initiale, les mêmes circonstances se reproduiront, mais en sens inverse; le cadre remontera pour reprendre sa position primitive au bout de la révolution complète.

269. Loi du mouvement de la tige. — Le mouvement de l'arbre tournant étant supposé uniforme, il est facile de construire la courbe représentative du mouvement du cadre, et par suite de la tige guidée qui en est solidaire. En effet, pendant le premier $\frac{1}{6}$ de la révolution, le cadre s'appuie constamment sur le sommet A, et son mouvement n'est autre que celui de la projection du point A sur le rayon OA ; pendant le deuxième $\frac{1}{6}$ de tour, le sommet C pousse le cadre et le mouvement de celui-ci est le même que le mouvement de la projection du point C sur le rayon OD. Pendant la troisième période, le mouvement du cadre est nul et les mêmes phases se reproduisent pour la course ascendante. Si donc, on porte sur une ligne d'abscisses xy une longueur 0,18, égale à la circonférence OA développée et divisée en 18 parties égales, qu'aux points de division on élève des ordonnées sur lesquelles on prenne des longueurs respectivement égales à Aa, Ab, Ac et (Ac+$c'b'$), (Ac + $a'c'$), (Ac+c'D), on obtiendra les deux premières périodes de la loi cherchée. Dans la troisième période, la loi sera une droite parallèle à la ligne des abscisses. Pour les quatrième et cinquième périodes, la courbe sera symétrique à $o\,m\,n$, et enfin, dans la sixième période, la loi se confondra avec la ligne des abscisses.

La loi des vitesses $m'm_1$ s'obtiendra par le procédé connu.

§ 8. — CAMES

270. On appelle *cames* des organes analogues aux excentriques et employés dans les machines pour transformer un mouvement de rotation uniforme en un mouvement rectiligne alternatif, suivant une loi qu'on s'impose à volonté.

271. Tracé général des cames. — Proposons-nous de tracer le profil d'une came, dans le cas où la direction de la tige à faire mouvoir coupe l'axe de rotation à angle droit, et où la loi de mouvement de la tige est donnée d'une manière quelconque pour un tour entier de l'axe animé d'un mouvement uniforme.

Soit O (*fig.* 218), la projection de l'axe de l'arbre tournant, AB la tige guidée, et A*a* la plus petite épaisseur à donner à la came, déterminée d'après la nature de la matière à employer. Avec OA

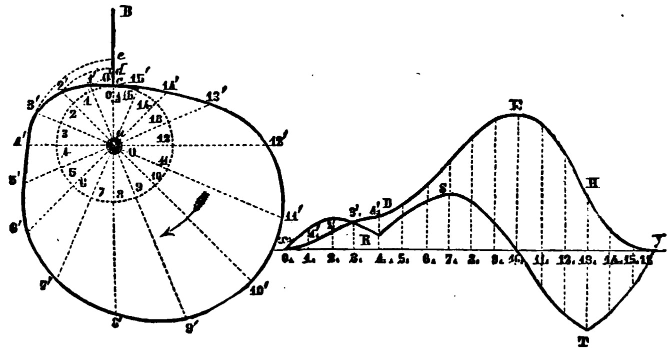


Fig. 218.

pour rayon, décrivons une circonférence et divisons cette ligne en un certain nombre de parties égales, 16 par exemple. Développons cette circonférence sur une ligne d'abscisses xy; la longueur 0,16 peut être considérée comme représentant le temps T pendant lequel l'arbre effectue une révolution entière. Si, sur 0,16, comme ligne d'abscisses, nous construisons la courbe représentant la loi du mouvement imposé, les ordonnées élevées aux points de division donneront les espaces respectivement parcourus par la tige au bout de $\frac{1}{16}$ T, $\frac{2}{16}$ T, $\frac{3}{16}$ T...., $\frac{16}{16}$ T. Cela posé, sur les

rayons prolongés du cercle OA, et à partir de sa circonférence, portons des longueurs 1.1′, 2.2′, 3.3′...., respectivement égales aux ordonnées $1_1 1'_1$, $2_1 2'_1$, $3_1 3'_1$....; en joignant tous les points 1′, 2′, 3′, ainsi obtenus, on aura le profil de la came réalisant le mouvement demandé. En effet, supposons que la tige AB, terminée en pointe, s'appuie constamment sur ce profil, et faisons tourner l'axe de $\frac{1}{16}$ dans le sens de la flèche; le rayon 1.1′ viendra sous la direction de la tige et celle-ci se sera éloignée de l'axe d'une quantité $1.1' = Ac$, égale à l'ordonnée $1_1 1'_1$; au bout de $\frac{2}{16}$ de tour, le rayon 2.2′ sera venu sous la tige, et le chemin parcouru par celle-ci sera $2.2' = Ad$, égale à l'ordonnée $2_1 2'_1$ et ainsi de suite. Donc, la loi du mouvement imprimé à la tige est bien représentée par la courbe ODEH16. Lorsque l'arbre O aura fait $\frac{10}{16}$ de tour, le rayon 10.10′ prendra la direction OB et la tige sera au plus haut point de sa course. A partir de cette position, les rayons diminuant, le came abandonnera la tige si le poids de celle-ci, ou un ressort, ne la force pas à descendre et à en suivre le profil. On voit donc qu'une pareille came ne peut, par sa seule action, assurer la continuité du mouvement.

272. Réciproquement, étant donnée une came quelconque, on trouvera facilement la loi du mouvement de la tige en développant la circonférence OA, puis prenant pour ordonnées des longueurs respectivement égales aux prolongements 1.1′, 2.2′, 3.3′....; ou, ce qui revient au même, aux longueurs *Ac*, *Ad*, *Ae*...., et joignant tous les points obtenus par une courbe continue.

La loi des vitesses s'obtiendra par le procédé connu.

273. Si la came était telle, que toutes les lignes, telles que 2′.10′ passant par l'axe et s'arrêtant au profil, fussent égales, on pourrait disposer, de l'autre côté de la came, une autre pointe identique à A, sur laquelle elle viendrait agir pour faire descendre la tige.

La figure 219 représente une came réalisant cette condition. On voit que le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche, la partie située à gauche de la direction BC, agit seule sur la tige pour la faire monter ou descendre, et par suite le mouvement est le même pour la course ascendante et pour la course descendante. Dans ce cas, la courbe LUSA représentative du mouvement de la tige pour un tour entier de l'arbre, est composée de deux parties LUI et ISA, exactement pareilles, mais inversement placées. Les

ordonnées de la deuxième portion ISA, par rapport à la ligne IA′, sont égales à celles de la première portion, par rapport à LM ; par conséquent, toutes les lignes droites passant par l'axe de la came,

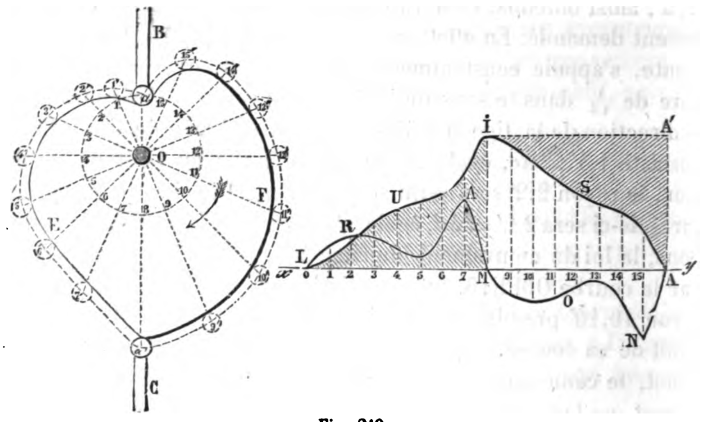


Fig. 219.

sont d'égale longueur, et la condition est remplie pour qu'il y ait continuité de mouvement. Ainsi donc, pour qu'une came puisse conduire une tige dans les deux sens, il faut et il suffit que la loi du mouvement de cette tige soit la même pour les courses ascendante et descendante.

La loi LAMN des vitesses sera, par suite, égale pour chacune de ces courses, ce qui, du reste, se vérifie sur la figure 219.

274. Afin de diminuer le frottement et d'éviter l'usure des pointes par lesquelles la tige doit s'appuyer contre la came, on les remplace par des galets *a*,*a* de petit diamètre. L'emploi de ces galets modifie la came dont le profil doit rester tangent à leurs surfaces extérieures dans toutes les positions. Pour obtenir la courbe convenable, par les points 1′,2′,3′.... comme centres, décrivons des circonférences avec le rayon des galets ; la courbe enveloppée de toutes ces circonférences donne la forme exacte de la came.

275. Came en cœur. — Cette came communique à une tige dont la direction passe par son axe de rotation, un mouvement rectiligne alternatif uniforme. Soit O l'axe de rotation (*fig.* 220) et *Cc* la plus petite épaisseur à donner à la came. Divisons la circonférence OC en un certain nombre de parties égales, 16 par exemple ; sur

la direction CB de la tige, portons une longueur BC égale à la course de la tige et divisons CB en 8 parties égales. Si du point O comme centre on décrit des arcs O1, O2, O3...., leurs intersections *aa*, *bb*, *dd*,.... avec les rayons menés par les points de divi-

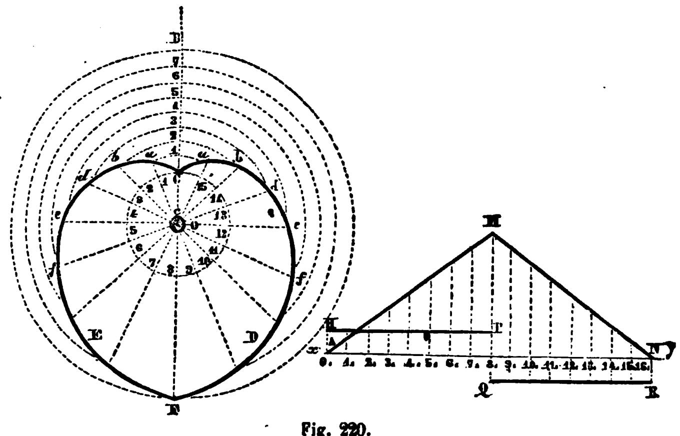


Fig. 220.

sion correspondants de la circonférence OC, donneront les différents points du profil de la came, et en les joignant par un trait continu, on obtiendra la courbe CDFE, qui a reçu le nom de *courbe en cœur*, à cause de sa forme. Cette courbe satisfait à la condition d'égalité de toutes les droites passant par l'axe O. En effet, prenons une droite quelconque *df*; cette ligne, si nous en retranchons le diamètre de la circonférence OC, commune à toutes les droites passant par le centre, se compose de deux parties $f5 + d3$; or, $f5$ est égale aux $\frac{5}{8}$ de CB et $d3$ égale aux $\frac{3}{8}$ de cette même ligne. Donc, $f5 + d3 = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1 =$ CB égale à la course de la tige, et il en est de même de toutes les autres droites.

376. Pour trouver la loi du mouvement de la tige, il suffit de porter, sur une ligne d'abscisses, le développement de la circonférence OC, de diviser la longueur ainsi obtenue en 16 parties égales et d'élever aux points de division des ordonnées respectivement égales aux longueurs C1, C2, C3.... On obtient ainsi la loi AMN, composée de deux lignes droites également inclinées sur la ligne des abscisses.

La loi des vitesses HPQR est aussi formée par deux droites pa-

rallèles à la ligne des abscisses et symétriquement placées par rapport à cette ligne; cette loi nous fait voir que la vitesse change brusquement de sens à la fin de chaque course de la tige, ce qui constitue le plus grave inconvénient de cette came.

277. Came Morin. — Pour éviter l'inconvénient de la came en cœur lorsque l'uniformité du mouvement de la tige n'est pas absolument nécessaire, le général Morin a imaginé une came qui porte son nom et qui communique à la tige qu'elle conduit un mouvement non pas uniforme, mais uniformément accéléré pendant la moitié de la course et uniformément retardé pendant l'autre moitié, de sorte que la vitesse croît et décroît uniformément et est nulle à chaque changement de sens; le mouvement acquiert ainsi toute la douceur désirable.

La courbe représentative du mouvement de laquelle nous déduirons la came, est facile à tracer. Soit O (fig. 221) l'axe de rotation et A*a* la plus petite épaisseur à donner à la came. Divisons la circonférence OA en 16 parties égales; portons sa lon-

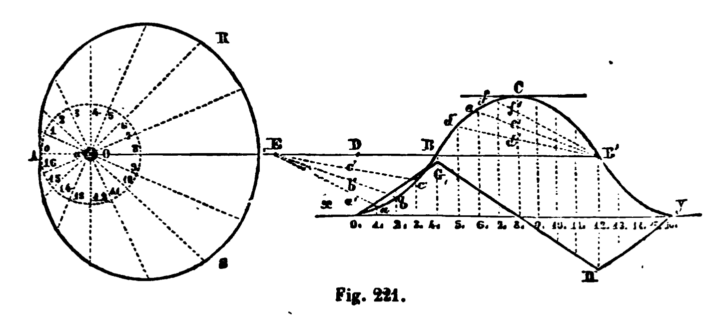


Fig. 221.

gueur développée sur une ligne d'abscisses, et aux divers points de division élevons des ordonnées. Portons sur l'ordonnée 8_1 une longueur 8_1C égale à la course, et sur l'ordonnée 4_1 une longueur 4_1B égale à la moitié de la course; les points B et C sont deux points de la courbe. Le mouvement devant être uniformément accéléré depuis o_1 jusqu'à 4_1, la courbe O_1bB sera une branche de parabole ayant son sommet en O_1, O_1D pour axe et la ligne d'abscisses pour tangente au sommet; de même, le mouvement devant être uniformément retardé de 4_1 à 8_1, la courbe B*c*C sera une seconde branche de parabole ayant son sommet en C, $c8_1$ pour axe et se

raccordant en B avec la première. A partir de l'ordonnée 8_1, c'est-à-dire de la demi-révolution de l'axe O, les mêmes circonstances devront se reproduire dans le mouvement, mais en sens inverse; la courbe CB'16 sera symétrique de la courbe CBO_1. Les arcs de parabole O_1B et BC peuvent se tracer par une construction pratique. Pour déterminer le premier arc, par le point B on mène BE parallèle à la ligne des abscisses et on prend DE = DB, puis on divise DO_1 en le même nombre de parties égales que $O_1 4_1$ = DE. Les droites qui joignent le point E aux points de division a', b', c', déterminent, par leur rencontre avec les ordonnées, les points a, b, c, de la courbe; la même construction, répétée pour la partie BC, fournira les points d, e, f. En joignant tous ces points par un trait continu, on obtient la loi OBC de la course ascendante de la tige. La même courbe, tracée symétriquement de l'autre côté, sera la loi de la course descendante.

La vitesse variant uniformément, la loi O_1GH16 des vitesses, se compose de lignes droites et rencontre l'axe des abscisses au point 8_1, car la tangente à la courbe des espaces étant horizontale, la vitesse est nulle en ce point et, de plus, elle change de sens.

278. La loi du mouvement étant tracée, on construira la courbe ARS, comme nous l'avons fait pour les cames précédentes.

Tout ce qui vient d'être dit pour les cames suffit évidemment pour tracer le profil d'une came, quelle que soit la loi de mouvement qu'on s'impose. Ces organes sont très-employés dans les machines et leur forme varie à l'infini.

279. Le mouvement rectiligne alternatif communiqué par une came peut être intermittent; le contour de la came présente, dans ce cas, des parties concentriques à l'axe, correspondant aux périodes de repos; on les appelle *cames à ondes*.

280. La tige peut parcourir deux ou plusieurs fois sa course pour un seul tour de l'arbre; les cames prennent alors les noms de *cames doubles*, *cames triples*.

281. Cas où la direction de la tige ne passe pas par l'axe de rotation. — Il arrive quelquefois qu'une tige doit être soulevée verticalement à une certaine hauteur, pour retomber ensuite lorsqu'elle est abandonnée à son propre poids; tel est le cas des pilons à fabriquer la poudre. Le sabot en fonte est surmonté d'une flèche en bois convenablement guidée et armée d'une partie sail-

lante appelée *mentonnet*, sur laquelle vient agir une came montée sur un arbre horizontal. Le mentonnet étant arrivé à une certaine hauteur, la came l'abandonne et la tige retombe par son propre poids pour rester ensuite au repos jusqu'à ce que l'arbre, ayant fait un tour, vienne le soulever de nouveau. Un pareil système peut être assimilé à un engrenage à crémaillère dans lequel la roue et la crémaillère n'auraient qu'une dent.

Soit OA (*fig.* 222) l'arbre tournant, BC la tige du pilon, et Ba le mentonnet. Par l'extrémité *a* du mentonnet, menons XY parallèle à la direction de la tige ; cette droite peut être considérée comme la ligne primitive d'une crémaillère dont Ba serait le flanc, et par suite le profil de la came qui doit soulever le pilon sera la développante *ab* obtenue en développant la circonférence O*a* tangente à XY.

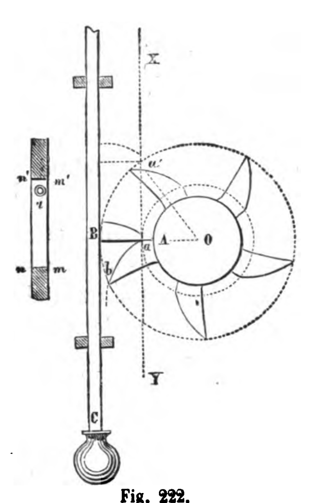


Fig. 222.

Pour limiter la came, remarquons que le contact a toujours lieu sur la ligne XY, c'est-à-dire sur l'extrémité *a* du mentonnet. Soit *aa'* la course du pilon ; lorsque le mentonnet est venu en *a'*, la came doit cesser de le conduire, et par conséquent la circonférence décrite du point O comme centre, avec O*a'* pour rayon, limitera la longueur de la came. Le profil, du côté de la came qui n'agit pas, peut être quelconque ; il est ordinairement formé par une portion de rayon raccordée à l'arbre par une courbe qui, en élargissant la base de la came, lui donne plus de solidité.

282. Lorsque la came quitte le mentonnet, l'arbre n'a plus aucune résistance à vaincre et son mouvement s'accélère pour se retarder ensuite dès que la tige recommence à être soulevée. Pour éviter ces irrégularités, on a soin d'appliquer, au même arbre, 5 ou 6 pilons placés les uns à côté des autres ; on obtient ce qu'on nomme *une batterie de pilons*. Les cames sont disposées, suivant la longueur de l'arbre, de manière que leurs projections, sur un plan perpendiculaire à l'axe, soient équidistantes comme le montre la figure.

383. Dans la disposition que nous venons de décrire, une came agissant sur un mentonnet en saillie sur la tige présente l'inconvénient de presser fortement cette tige contre ses guides, ce qui occasionne des frottements considérables. Pour éviter cet inconvénient, on pratique, dans la tige, une entaille *mnm'n'*, dans laquelle passe la came qui vient agir sur un galet *r* dont l'axe est parallèle à celui de l'arbre tournant.

384. Cas où la direction de la tige est parallèle à l'axe de rotation. — On peut encore communiquer un mouvement rectiligne quelconque à une tige guidée dont la direction est parallèle à l'axe animé d'un mouvement uniforme. En effet, soient OO' (*fig.* 223) l'axe de rotation, et AB la tige guidée; montons, sur cet axe, un cylindre à base circulaire presque tangent à la tige; développons sa surface cylindrique sur une feuille de papier et traçons, sur cette feuille, la loi du mouvement que l'on veut imposer à la tige, en prenant pour abscisses la longueur de la circonférence de

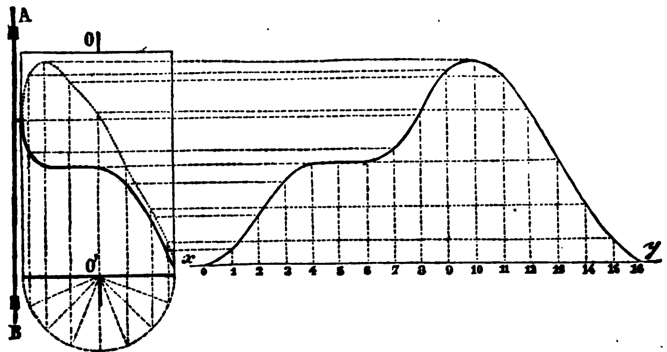


Fig. 223.

la section droite. Si nous enroulons maintenant la feuille de papier sur le cylindre, nous déterminerons, sur sa surface, l'axe d'une rainure dans laquelle viendra s'engager un goujon *a* fixé à la tige. Pendant le mouvement de rotation du cylindre, le goujon sera forcé de se déplacer dans la rainure, et la tige se mouvra dans un sens ou dans l'autre suivant la loi donnée.

La figure montre la manière de tracer l'axe de la rainure sur le dessin.

Si la direction de la tige, au lieu d'être parallèle à l'axe de

rotation, rencontrait cet axe en un point quelconque, le cylindre serait remplacé par un cône dont la génératrice serait parallèle à la tige et la même construction serait applicable.

§ 9. — PARALLÉLOGRAMME ARTICULÉ

385. Parallélogramme de Watt. — Dans les machines à vapeur à axe vertical, dites *machines à balancier*, le mouvement rectiligne alternatif du piston n'est pas communiqué directement à l'arbre moteur au moyen d'une bielle et d'une manivelle. La tige du piston, après sa sortie du cylindre, vient s'articuler à un organe spécial lié lui-même à l'une des extrémités d'un levier du premier genre, appelé *balancier*, mobile autour d'un axe horizontal passant en son milieu ; à son autre extrémité est articulée une bielle qui, par l'intermédiaire d'une manivelle, transmet le mouvement à l'arbre moteur. Le mouvement rectiligne alternatif de la tige du piston est donc transformé d'abord en un mouvement circulaire alternatif du balancier, et ce mouvement circulaire alternatif est, à son tour, transformé en un mouvement circulaire continu par bielle et manivelle.

Si la tige du piston était articulée directement au balancier, pendant chaque oscillation de celui-ci, elle serait sollicitée à décrire un arc de cercle, et, par suite, elle serait soumise à des efforts obliques qui tendraient à la briser et à produire des fuites de vapeur. Pour remédier à cet inconvénient, le célèbre James Watt imagina d'interposer, entre le balancier et la tige du piston, un parallélogramme articulé portant le nom de son inventeur et qui transforme, sans effort pour la tige, le mouvement de celle-ci en un mouvement circulaire alternatif du balancier.

386. Principe du parallélogramme de Watt. — Soit OA (*fig.* 224) un demi-balancier mobile autour d'un axe horizontal projeté en O, et AB une bielle ou *bride*, reliant le point A à l'extrémité B d'une barre O′B appelée *contre-balancier*, pouvant osciller librement autour d'un axe horizontal projeté en O′. Dans le mouvement que prendront ces trois tiges de longueur constante, les points A et B décriront des arcs de cercle dont les centres sont respectivement situés en O et O′, et le point C, milieu de la bride

dont les extrémités A et B sont assujetties à se mouvoir sur les arcs de cercle OA, O'B, décrira une courbe que nous allons déterminer. Pour cela, considérons deux positions différentes *a* et *a'* de

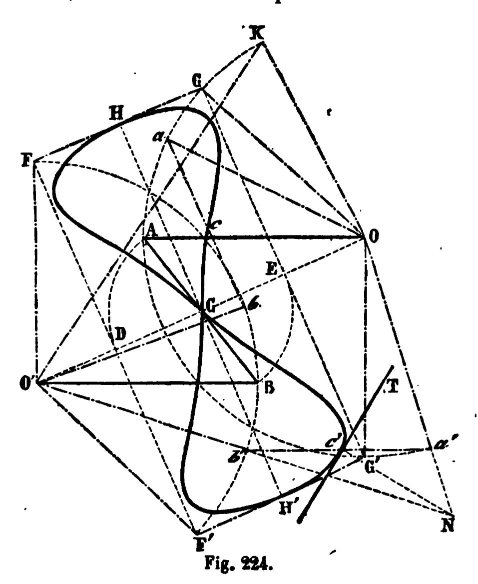


Fig. 224.

l'extrémité du balancier, situées sur la circonférence de centre O; les positions correspondantes du point B, appartenant au contre-balancier O'B, s'obtiendront en décrivant des points *a* et *a'* comme centres, avec la longueur invariable de la bride pour rayon, des arcs de cercle qui couperont la circonférence de centre O' en des points *b* et *b'* tels, qu'en les joignant aux points *a* et *a'*, les droites *ab*, *a'b'*, seront les positions correspondantes de la bride. En prenant le milieu de chacune de ces droites, on obtiendra deux points *c* et *c'* de la courbe cherchée, et en opérant de la même manière pour un nombre suffisant de positions différentes du système, on obtiendra des points qui, en les joignant par un trait continu, fourniront le lien géométrique du point C.

287. Les sommets de la courbe se détermineront de la manière suivante : du point C, milieu de la bride correspondant à la position horizontale du balancier, décrivons, avec un rayon égal à la demi-longueur de cette bride, une circonférence qui coupe la ligne OO'

en deux points D et E; en chacun de ces points élevons deux perpendiculaires à OO′, limitées en F,F′,G,G′, intersections de ces droites avec les trajectoires décrites par les points A et B. En joignant les points F et G, F′ et G′, puis prenant les milieux H et H′ de ces droites, on obtiendra les sommets H et H′ de la courbe, qui ont pour tangentes les droites FG et F′G′, parallèles à OO′. Les positions extrêmes du balancier et du contre-balancier seront données par la position de l'un ou de l'autre levier placé dans le prolongement de la bride. Si du point O′ avec un rayon O′B + BA nous décrivons un arc de cercle coupant la circonférence OA en K, la bride et le contre-balancier se trouveront en ligne droite. La position OK du balancier est sa position extrême supérieure, et il y en a une autre inférieure; il en est de même pour le contre-balancier.

288. Pour mener la tangente en un point quelconque c' de la courbe, considérons la position $Oa'b'O'$ du système, qui détermine ce point, et prolongeons les directions Oa', $O'b'$ jusqu'à leur point de rencontre N. Ce point sera un centre instantané de rotation, et la droite Nc' sera la normale à la courbe en c'; par suite, la tangente s'obtiendra en élevant la perpendiculaire Tc' à cette normale.

La courbe décrite par le point C, milieu de la bride, est connue sous le nom de *courbe à longue inflexion;* elle présente, dans son ensemble, la forme d'un 8 allongé.

289. Le balancier OA et le contre-balancier O′B étant pris dans leur position moyenne, sont parallèles et horizontaux, et si l'on mène la tangente au point C, cette tangente est verticale. On voit que la courbe A, dans une portion de son étendue, une partie sensiblement rectiligne, et, en choisissant des données convenables, on parviendra à faire décrire au point C, dans des limites que le tracé de l'épure fera connaître, une ligne dont les déviations à droite et à gauche de la verticale seront très-petites. C'est sur ce principe qu'est fondé l'établissement du parallélogramme articulé de Watt.

290. Le tracé de la courbe à longue inflexion peut se faire expérimentalement d'une manière très-simple indiquée par la figure 225. On fixe, sur un tableau noir, les extrémités O et E de deux leviers égaux OC et DE, disposés horizontalement dans leur position

moyenne, et réunis par une bride CD ; un trou F, pratiqué au milieu de cette bride, reçoit un crayon ou un morceau de craie. Si l'on fait osciller l'un des leviers OC autour de son axe O, le levier ED tournera autour du point E, et le crayon ou le morceau de craie tracera, sur le tableau noir, la courbe cherchée.

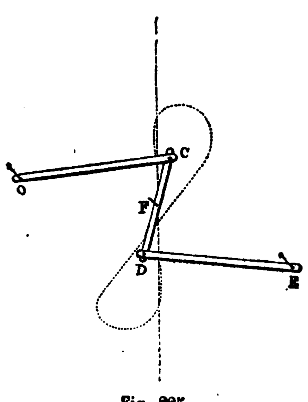


Fig. 225.

221. Disposition du parallélogramme de Watt. — En s'appuyant sur le principe précédent et dans le but de diminuer la place occupée par le contre-balancier, Watt réalisa son ingénieuse idée en imaginant la disposition suivante (*fig.* 226) : prolongeons le balancier OA d'une longueur quelconque A*a* ; par le point *a* menons la droite *ab* parallèle à la bride AB, et achevons le paral-

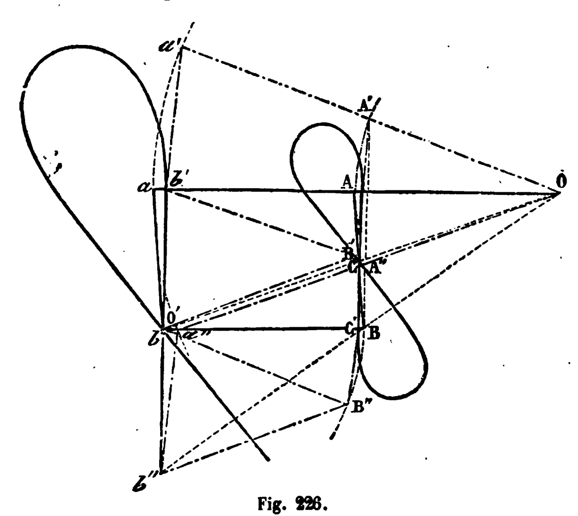


Fig. 226.

lélogramme A*ab*B ; celui-ci étant supposé articulé à ses quatre sommets et le balancier OA oscillant autour du point O, le système mobile se déformera à chaque instant et les points *b*,C,O reste-

ront toujours en ligne droite à cause du parallélisme forcé des brides AB et ab. Le sommet b, du parallélogramme, décrira une courbe semblable à celle que décrit le point C ; en effet, les brides étant toujours parallèles, les triangles tels que OAC, Oab restent semblables entre eux dans toutes les positions que prend le balancier. Soit Oa'' une autre position du balancier déterminant la position A$''a''b''$B$''$ du parallélogramme articulé, et joignons Ob''; le point C sera venu en C$'$, intersection de Ob'' avec A$''$B$''$. Les triangles semblables OAC et Oab donnent, pour la première position du balancier

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OC}{Ob}. \qquad (1)$$

Dans la deuxième position, on a les triangles OA$''$C$'$ et O$a''b''$, qui donnent également, en remarquant que les longueurs OA et Oa restent constantes,

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OC'}{Ob''}; \text{ et par suite on a } \frac{OC}{Ob} = \frac{OC'}{Ob''}.$$

Joignons maintenant le point C au point C$'$ et le point b au point b''; les triangles OCC$'$ et Obb'' sont semblables puisqu'ils fournissent la relation ci-dessus, et les droites CC$'$ et bb'' sont parallèles. Il résulte de là que la trajectoire décrite par le sommet antérieur b du parallélogramme est semblable à la trajectoire du point C.

Si, en prolongeant le balancier, on prend la longueur Aa = OA, les triangles semblables considérés pour la première position du balancier, donnent

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{AC}{ab} = \frac{1}{2},$$

et le point C est le milieu de la bride AB; or nous avons prouvé que ce point milieu décrit sensiblement une verticale; donc la ligne parcourue par le point b est aussi une verticale.

Ces dimensions, indiquées par Watt, sont celles qui ont été prises pour la figure, et les courbes ont été tracées d'après le procédé indiqué précédemment.

292. Il est évident que si l'on articule la tige du piston au point b, en forçant le point B, sommet postérieur du parallélogramme, à décrire un arc de cercle, cette tige sera guidée verticalement;

déterminons donc le centre de cet arc de cercle, point d'articulation du contre-balancier. Soit $b'b''$ la ligne verticale à faire parcourir, d'un mouvement rectiligne alternatif, au point b, sommet antérieur du parallélogramme. Traçons les parallélogrammes articulés correspondant aux trois positions moyenne et extrêmes du balancier, sachant que le sommet antérieur doit constamment s'appuyer sur la verticale $b'b''$; nous obtiendrons ainsi les positions B, B′, B″ du sommet postérieur. En faisant passer une circonférence par ces trois points, on aura le point O′ d'articulation du contre-balancier et la longueur O′B de celui-ci. Dans la position moyenne du balancier, le centre O′ se confond, en projection verticale, avec le sommet b du parallélogramme.

323. Proportions données par Watt. — Afin de réduire au minimum les déviations de la tige du piston sur la verticale, voici les données que Watt employait pour la construction de son parallélogramme et qui sont sanctionnées par l'expérience; elles nous ont servi dans le tracé de la figure précédente :

1° L'horizontale Oa doit partager, en deux parties égales, l'arc $a'a''$ décrit par l'extrémité du balancier, et l'angle $a'Oa = aOa''$ qui ne doit pas être supérieur à 30°, est pris ordinairement égal à 19° environ.

2° La direction de la tige du piston doit être perpendiculaire à la position moyenne Oa du balancier, et elle doit diviser en deux parties égales la flèche de l'arc $a'a''$; les obliquités des brides se trouvent ainsi réparties symétriquement à droite et à gauche de la tige du piston.

3° La corde de l'arc $a'a''$ décrit par l'extrémité du balancier, est rigoureusement égale à la course du piston, et la longueur du demi-balancier doit être comprise entre 1 fois $\frac{1}{2}$ et 2 fois cette course.

4° La longueur de la bride ab doit être telle, que, dans la position extrême supérieure Oa' du balancier, le point b', extrémité de cette bride correspondant à cette position, se trouve sur l'horizontale du point O; cette longueur peut varier de $\frac{1}{2}$ à $\frac{4}{7}$ de la course du piston.

5° Le contre-balancier est horizontal dans sa position moyenne O′B, et son extrémité B se trouve sur le prolongement de la corde A′A″.

324. Établissement du parallélogramme de Watt. — La

réalisation matérielle du parallélogramme de Watt est représentée figure 227. Le balancier OA, mobile autour de l'axe horizontal O, est à section rectangulaire renforcée par des nervures, et il a la f orm

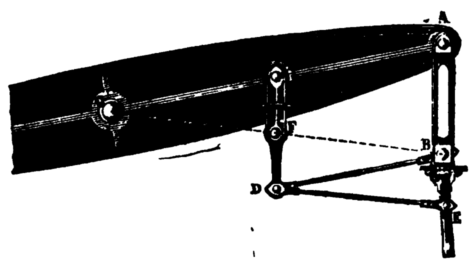


Fig. 227.

parabolique ou d'égale résistance. Le système mobile, qui doit relier l'extrémité A du levier OA à la tige du piston, est double, les deux parallélogrammes étant placés de chaque côté du balancier. Aux tourillons A sont suspendues deux bielles projetées en AB, reliées entre elles par un axe horizontal B au milieu duquel est articulée la tige du piston; le tourillon C, placé au milieu de OA, porte également deux bielles CD = AB, reliées aux premières par deux barres BD. Les points milieux projetés en F, des bielles CD, décrivent une ligne parallèle à celle des points projetés en B; on utilise cette propriété en reliant les points F par un boulon horizontal au milieu duquel on articule la tige de la pompe à air. Dans quelques machines à deux cylindres, ce point F sert d'articulation à la tige du piston du petit cylindre, dont la course est la moitié de celle du grand piston.

Pour forcer le point D à décrire l'arc de cercle dont nous avons appris à déterminer le centre, on dispose, extérieurement au parallélogramme, deux guides projetés en DE, pouvant osciller autour de deux axes E placés sur un support faisant corps avec le bâtis de la machine. Ce point E, d'après les données de Watt, est situé sur la verticale du point B, et les axes d'oscillation des deux guides formant le contre-balancier, sont indépendants l'un de l'autre, la tige du piston occupant le milieu de l'intervalle libre qui les sépare.

395. Le parallélogramme de Watt n'est pas employé dans les machines à vapeur exclusivement; il sert aussi pour les machines à

colonne d'eau et pour les machines soufflantes. Dans ces dernières, deux parallélogrammes sont disposés à chaque extrémité du balancier, l'un pour transmettre l'effort moteur et l'autre pour faire mouvoir le piston du cylindre soufflant.

296. Parallélogramme pour machines de bateaux. — Dans les machines à balancier pour bateaux, le balancier et le parallélogramme offrent une disposition spéciale, nécessitée par le peu d'espace dont on dispose et pour avoir une plus grande stabilité du bâtiment. Deux balanciers égaux, placés symétriquement et à la partie inférieure du cylindre moteur, sont mobiles autour d'un axe horizontal O (*fig.* 228); ils portent, à leurs extrémités A, deux bielles pendantes AB, reliées entre elles par une traverse horizontale projetée en B, au milieu de laquelle est articulée la tige du piston, qui parcourt la verticale B″BB′ passant par le milieu de la flèche de l'arc A′A″. Les deux parallélogrammes, correspondant à chacun des balanciers, se projettent suivant les droites AB = CD et AD = BC.

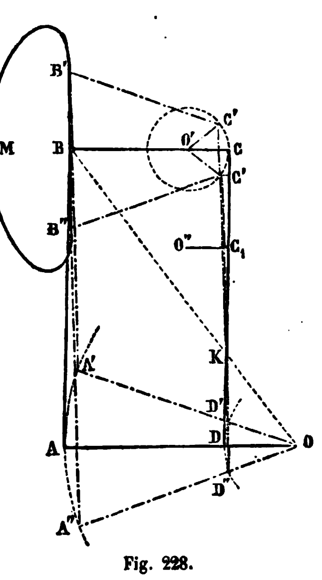


Fig. 228.

Connaissant la course du piston et traçant les positions du parallélogramme correspondant aux trois positions moyenne et extrêmes OA, OA′, OA″ du balancier, il est facile de trouver le centre O′ du contre-balancier O′C qui doit faire décrire la verticale au point B. En faisant occuper au point C toutes les positions qu'il est susceptible de prendre sur sa trajectoire, qui est la circonférence O′C, et déterminant la position correspondante du point B, on obtiendra la courbe BB′MB″, lieu des positions successives du point B.

La longueur OD est prise en général plus petite que la moitié de OA; en outre, l'inconvénient qui résulte de placer un support assez élevé pour maintenir l'axe O′ du contre-balancier fait que l'on articule en un point C_1 plus bas que le point C, et toujours

situé sur la bielle CD, le contre-balancier $O''C_1$, remplaçant $O'C$, dont l'axe O'' peut être maintenu par un support fixé au couvercle supérieur du cylindre. Cette disposition ne modifie en rien le guidage de la tige, qui est encore assujettie à décrire la verticale du point B.

§ 10. — ENCLIQUETAGES ET EMBRAYAGES.

297. Encliquetages. — Les *encliquetages* sont des organes destinés à transformer le mouvement circulaire alternatif en un mouvement circulaire intermittent. On peut les diviser en deux classes : 1° *encliquetages à dents;* 2° *encliquetages à arc-boutement.*

298. Encliquetages à dents.—Encliquetage à simple effet.— L'encliquetage à simple effet se compose d'une roue A (*fig.* 229, *a*) appelée *roue à rochet*, calée sur l'axe O que l'on veut faire mouvoir ; les profils des dents de cette roue sont des portions de rayon et des droites également inclinées sur ces rayons. Une pièce B, appelée *pied-de-biche* ou *cliquet moteur*, est articulée en un point O′ d'un levier L pouvant tourner indépendamment de l'axe O sur lequel il est monté à frottement doux. L'extrémité du pied-de-biche vient s'engager dans les creux de la roue contre laquelle un ressort l'appuie constamment. On conçoit qu'en agissant sur le levier dans le sens de la flèche, la roue sera entraînée dans le même sens, et par suite elle tournera d'un certain angle variant avec l'amplitude du mouvement du levier; en agissant en sens contraire, l'extrémité du pied-de-biche glissera sur la surface inclinée des dents et la roue restera au repos.

Pour empêcher le mouvement en sens inverse de l'axe O, pendant que le cliquet moteur n'agit pas sur la roue, on dispose, en un point C, une pièce B′, appelée *cliquet d'arrêt*, mobile autour d'un axe fixe C et un ressort R′ appuie constamment ce cliquet contre les dents.

299. Encliquetage à double effet. — L'encliquetage à double effet, appelé aussi *levier de Lagarousse*, a, sur le précédent, l'avantage de faire tourner l'axe O pendant toutes les oscillations du levier, de sorte que le mouvement est presque continu.

Le levier L (*fig.* 229, *b*), mobile autour d'un axe fixe O′, porte

deux pieds-de-biche B et B′ articulés de chaque côté de l'axe d'oscillation. En agissant sur le levier dans le sens de la flèche, le cliquet moteur B agira sur les dents pour faire tourner la roue, et B′ glissera sur la surface de ces dents. En ramenant le levier vers le haut, le cliquet B′ agira à son tour pour faire tourner la roue dans le même sens que précédemment et B glissera sur la surface des dents. Le mouvement de l'axe O est donc continu, sauf l'intermittence qui se produit à l'instant où le mouvement du levier change de sens. Un cliquet d'arrêt est disposé en C pour empêcher le retour de l'arbre en sens contraire.

Les encliquetages à simple et à double effet, sont employés pour appliquer la force de l'homme à certaines machines desti-

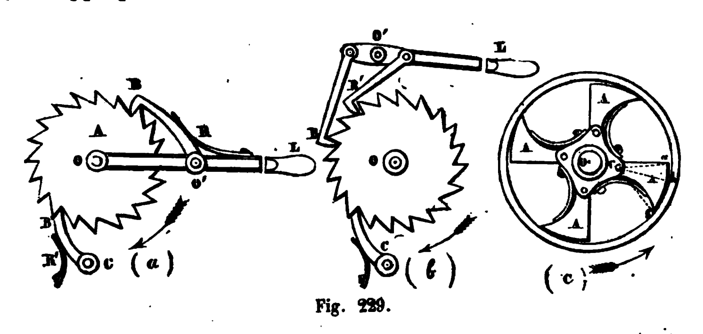


Fig. 229.

nées à l'élévation des matériaux, comme dans les treuils. Sur l'axe du tambour est montée une roue à rochet, et pour chaque oscillation du levier mû par un ouvrier, la corde s'enroule sur le tambour qui tourne d'une faible quantité, et par suite le fardeau s'élève. Si, pour une cause quelconque, on interrompt le mouvement, le cliquet d'arrêt empêche la descente du fardeau qui reste suspendu.

La roue à rochet est d'un grand usage dans les raboteuses, les tours, les scieries, etc., pour produire automatiquement, par l'intermédiaire de leviers, le déplacement de l'outil ou de la pièce à travailler.

400. Encliquetages à arc-boutement. — Les encliquetages à arc-boutement ont été imaginés dans le but de remédier au choc du pied-de-biche contre les dents et à la perte de temps qui accompagne l'action de ce cliquet dans les encliquetages à dents.

401. Encliquetage Dobo. — L'encliquetage Dobo se compose

d'une couronne circulaire B (*fig.* 229, *c*) folle sur l'axe O auquel elle doit communiquer le mouvement. Cet arbre porte quatre ailes ou leviers A articulés en C près de l'axe O ; chacun d'eux est terminé par une courbe telle que

$$\text{rayon } aC < Cd < Cb,$$

et le point *b*, extrémité de cette courbe, est astreint à s'appuyer constamment contre la surface intérieure de la couronne au moyen de petits ressorts. Le mouvement de la roue ayant lieu dans le sens de la flèche, les ressorts appuient l'extrémité *b* des ailes A contre la surface intérieure de B et obligent ces ailes à tourner autour de leurs axes ; mais la distance C*b* étant plus grande que le rayon C*d*, il se produit un arc-boutement des leviers A contre la couronne qui entraîne ceux-ci, et le mouvement de rotation est communiqué à l'arbre O. Si le mouvement de la roue a lieu en sens contraire, les surfaces extérieures *ab* glisseront contre la surface intérieure de la couronne et forceront les ressorts à fléchir. Il résulte de là que l'arbre O restera au repos, les ailes cédant sous l'action de leur frottement contre la roue. Le mouvement est donc transmis avec intermittences, sans choc, et l'amplitude du mouvement n'est pas limitée.

402. Embrayages. — Les *embrayages* sont des organes employés pour transmettre le mouvement d'un arbre à un autre arbre placé dans le prolongement du premier ; on les divise en deux classes : 1° *embrayages fixes;* 2° *embrayages mobiles.*

403. Embrayages fixes. — Pour relier invariablement deux arbres placés dans le prolongement l'un de l'autre, on réunit leurs extrémités qui doivent être exactement tournées au même diamètre, par un manchon cylindrique, appelé *manchon d'embrayage*, alésé à un diamètre intérieur égal au diamètre extérieur des arbres. Ce manchon est maintenu dans une position fixe au moyen d'une pièce prismatique en acier, appelée *clavette*, qui vient s'engager dans une rainure pratiquée mi-partie dans les arbres et mi-partie dans le manchon. Par cette disposition, le mouvement de rotation étant communiqué à l'un des arbres, l'autre sera entraîné et forcé de tourner. Afin d'empêcher le déplacement latéral du manchon, on le fixe sur la clavette par un boulon que l'on peut serrer extérieurement.

Les extrémités des arbres doivent être terminées par des surfaces

planes perpendiculaires aux axes, et à l'intérieur du manchon elles doivent être situées à une distance de quelques millimètres.

404. Embrayages mobiles. — Si l'on veut arrêter ou rétablir brusquement, à un instant donné, la communication entre les arbres en supprimant ou en rétablissant à volonté leur liaison, on emploie les *embrayages mobiles* (*fig.* 230), composés de deux manchons d'embrayage M et M′, l'un fixe M calé invariablement sur l'arbre moteur O, et l'autre M′ mobile, pouvant glisser longitudinalement sur l'arbre O′, le mouvement de rotation étant empêché par une clavette. Les faces de ces manchons, qui se trouvent en regard, présentent, sur chacune d'elles, des saillies ou dents et des creux de même forme pouvant s'engager exactement les unes dans les autres, de sorte que si l'arbre moteur est en mouvement, en approchant le manchon mobile, ses saillies pénétreront dans les creux correspondants du manchon fixe ; par suite, les deux arbres seront rendus solidaires et tourneront dans le même sens. En poussant le manchon en sens contraire, les dents quitteront les creux et la communication sera interrompue.

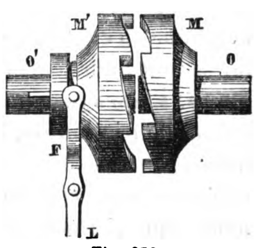


Fig. 230.

Pour opérer le glissement du manchon mobile, on agit à l'extrémité L du levier d'une fourchette F, appelée *fourchette d'embrayage*, mobile autour d'un axe fixe, et dont les deux branches embrassent une gorge pratiquée sur le collier qui termine ce manchon.

En faisant mouvoir le levier dans le sens convenable, les manchons se rapprocheront et les arbres entreront en mouvement ; cette opération s'appelle *embrayage ;* en le faisant mouvoir en sens contraire, les manchons se dégageront et l'arbre conduit restera au repos ; cette opération, inverse de la précédente, prend le nom de *désembrayage* ou *débrayage*.

405. Forme à donner aux dents ou saillies des manchons. — La forme à donner aux saillies des manchons d'embrayage est indéterminée ; néanmoins, si le mouvement doit toujours avoir lieu dans le même sens, on adoptera la forme suivante : Les surfaces des dents qui doivent être en contact seront formées

de surfaces hélicoïdes et de plans passant par l'axe de rotation, comme l'indique la figure précédente ; cette forme présente l'avantage que, depuis l'instant où les manchons commencent à se toucher, jusqu'à ce que les surfaces planes coïncident exactement, il y a un frottement des parties en contact qui détermine la mise en marche de l'arbre conduit sans transition brusque et sans choc.

La rotation des arbres devant se produire indifféremment dans les deux sens, les dents du manchon seront droites ; cette forme détermine un choc au moment de l'embrayage et du désembrayage, qui se font difficilement pendant la marche.

406. Embrayages à cônes de friction.—Pour les embrayages à cônes de friction employés dans les machines où l'effort à transmettre n'est pas très-grand, on donne au manchon fixe la forme d'un tronc de cône creux dans lequel vient s'engager le manchon mobile qui présente une surface conique dont les génératrices ont la même inclinaison que celles du manchon fixe. En agissant convenablement sur le levier de la fourchette d'embrayage, on amènera en contact les surfaces extérieure et intérieure des deux manchons qui, en raison du frottement plus ou moins grand déterminé, rendront les deux arbres solidaires. L'embrayage se fait ainsi graduellement et sans choc ; en outre, si la résistance vient à augmenter au delà de la limite convenable, le frottement des deux cônes sera insuffisant pour vaincre cette résistance, ils glisseront l'un sur l'autre et le mouvement n'aura plus lieu ; on évite ainsi la rupture des outils.

407. Les tendeurs, et principalement les poulies folles, sont très-souvent employés comme organes servant à communiquer et à interrompre le mouvement entre deux arbres parallèles. En nous reportant à la figure 181, (3), on voit que la transmission s'opère entre les axes O et O'; pour supprimer cette transmission ou désembrayer, il suffira d'agir sur le levier L pour faire prendre au tendeur la position L'P'G'; l'adhérence ne sera plus suffisante pour la marche et l'arbre conduit restera au repos. En considérant la figure 183, on désembrayera en faisant passer la courroie sur la poulie folle, et on embrayera en ramenant cette courroie sur la poulie E.

TROISIÈME PARTIE

DYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

§. 1. — PRINCIPES GÉNÉRAUX ET LEURS CONSÉQUENCES.

408. La *Dynamique* est la partie de la mécanique qui traite des relations qui existent entre les forces et les mouvements qu'elles produisent.

Les lois de la dynamique sont basées sur quatre principes généraux déduits de l'observation des faits et qui se vérifient par l'exactitude des conséquences qu'on en tire, confirmées elles-mêmes par l'expérience.

409. Premier principe. — *Principe de l'inertie.* — Ce principe, déjà posé (6), peut être énoncé maintenant d'une manière plus précise en disant que :

1° *Lorsqu'un point matériel est en repos, il reste dans cette position jusqu'à ce qu'il soit soumis à l'action d'une force.*

2° *Lorsqu'un point matériel en mouvement n'est sollicité par aucune force, son mouvement est rectiligne et uniforme.*

410. Deuxième principe. — *Principe de la réaction égale et contraire à l'action.* — Lorsqu'un point matériel reçoit une action quelconque d'un autre point matériel, le premier réagit sur le

second avec une force égale et contraire. Ces deux forces sont dirigées suivant la même droite; si elles tendent à rapprocher les points matériels sur lesquels elles agissent, on les appelle forces *attractives*, et, dans le cas contraire, elles sont dites forces *répulsives*.

411. Troisième principe. — *Principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis. — Loi du mouvement relatif.*

L'effet produit par une force sur un point matériel en mouvement, est indépendant du mouvement antérieurement acquis par ce point. Pour établir d'une manière claire et précise ce que l'on doit entendre par ce principe, imaginons qu'un point matériel A, en mouvement, entraîne avec lui, en translation, un système d'axes de comparaison, et que ce point A ne soit soumis à l'action d'aucune force; son mouvement sera rectiligne et uniforme en vertu du principe de l'inertie. Actuellement, si nous appliquons au point A une force quelconque F, le principe qui vient d'être énoncé consiste en ce que, sous l'action de cette force et relativement aux axes mobiles, le point A prendra le même mouvement que s'il avait été précédemment au repos, et, par suite, pour obtenir son mouvement absolu, il suffira de composer le mouvement antérieurement acquis, ou celui qu'il possédait en commun avec les axes, avec le mouvement qu'il prend, par rapport à ces axes, sous l'influence de la force F.

Cela posé, ce principe peut encore s'énoncer de la manière suivante : *Lorsqu'un système de points matériels est animé d'un mouvement de translation, si l'un de ces points, en particulier, vient à être soumis à l'action d'une ou plusieurs forces, le mouvement relatif de ce point est précisément le mouvement absolu que toutes ces forces lui communiqueraient si le système était au repos.*

412. Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante en intensité et en direction. — 1° *Le point matériel part du repos.* — Le point matériel partant du repos, c'est-à-dire ne possédant pas de vitesse initiale, prendra un mouvement de même direction que celle de la force et de même sens qu'elle. Décomposons la durée totale de l'action de la force en intervalles égaux, en secondes par exemple, et supposons que la force n'agisse qu'au commencement de chacun de ces intervalles.

En vertu du principe de l'inertie, les différents mouvements imprimés au point matériel, par l'action intermittente de la force, seront rectilignes et uniformes. Cela posé, soit v la vitesse du mobile après la 1re action de la force; au commencement de la 2e seconde, la force, agissant de nouveau, lui communiquera une nouvelle vitesse qui sera précisément égale à la première et de même sens qu'elle; ces deux vitesses se composeront en une résultante $2v$ égale à leur somme, de même sens et de même direction que les composantes. La vitesse sera $3v$, $4v$,.... après les 3e, 4e.... actions de la force, c'est-à-dire que le mouvement du mobile, ou plutôt que la trajectoire du mobile sera une ligne droite, et que la vitesse de son mouvement, à un instant quelconque, sera proportionnelle au nombre d'actions de la force; il en sera de même lorsque, à la limite, la force agira d'une manière continue. Il résulte de là que, *lorsqu'une force constante agit sur un point matériel partant du repos, elle lui communique un mouvement uniformément accéléré.*

413. 2° *Le point matériel possède une vitesse initiale de même direction que la force.* — Pour obtenir le mouvement absolu du mobile dans ce cas, il faut composer le mouvement rectiligne et uniforme qu'il prendrait sous l'action de sa vitesse initiale, avec le mouvement uniformément accéléré dû à l'action de la force constante; ces deux mouvements composants ayant même direction, le mouvement résultant sera rectiligne et uniformément varié.

Si la force agit dans le même sens que la vitesse initiale, le mouvement sera uniformément accéléré, et il sera uniformément retardé dans le cas contraire.

414. Remarque. — Toutes les fois qu'un point matériel se meut d'un mouvement uniformément varié, on peut affirmer qu'il est soumis à l'action d'une force constante en grandeur et en direction. En effet, il est d'abord soumis à l'action d'une force, car, autrement, le mouvement serait uniforme, et cette force est de grandeur constante, puisque le mouvement étant uniformément varié, les vitesses sont proportionnelles aux temps. De plus, cette force est également de direction constante, car, si pendant un temps très-petit, elle n'était pas dirigée suivant la droite parcourue par le mobile, elle communiquerait à celui-ci une vitesse de même direction qu'elle qui, se composant avec la vitesse du point matériel, déterminerait

ainsi une résultante dont la direction serait différente de celle de la trajectoire décrite par le point matériel.

415. La pesanteur est une force constante. — Nous avons vu, en Cinématique, que la pesanteur communique un mouvement uniformément varié aux corps librement abandonnés à son action; donc, *la pesanteur est une force constante.*

416. 3° *La force agit dans une direction différente de celle de la vitesse initiale.* — Lorsqu'on applique à un point matériel animé d'une vitesse v_0, une force constante dirigée d'une manière quelconque relativement à la direction de cette vitesse, le point matériel décrit une courbe que nous allons déterminer dans l'exemple suivant :

417. Mouvement des corps pesants lancés obliquement dans le vide. — Considérons un point matériel lancé dans le vide avec une vitesse initiale v_0 dirigée suivant OL (*fig.* 231); ce mobile étant en outre soumis à l'action de la pesanteur, la trajectoire dé-

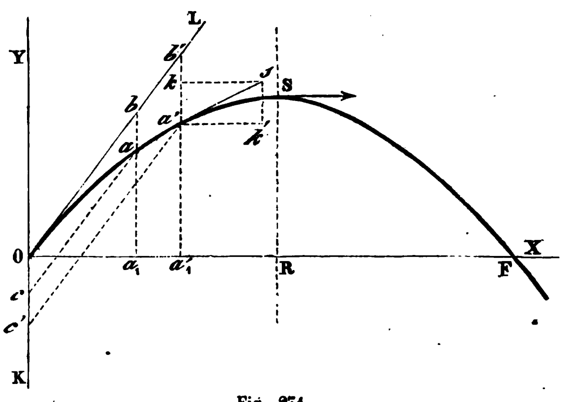


Fig. 231.

crite sera tout entière contenue dans le plan vertical passant par la direction OL de la vitesse initiale. Traçons, dans ce plan, deux axes rectangulaires OX et OY passant par le point O, origine du mouvement. En vertu du 3ᵉ principe, le mouvement du mobile, dans l'espace, résulte de la composition de son mouvement uniforme suivant la direction OL, avec le mouvement uniformément accéléré que lui imprime la pesanteur dans une direction con-

stamment parallèle à la verticale OK. Ainsi, au bout d'un temps quelconque t, le mobile ayant parcouru un espace $0b = v_0 t$, suivant OL, et un espace $0c = 1/2 gt^2$, parallèlement à OK, la position réelle du mobile, au bout du temps t, sera en a, extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur les droites $0b$ et $0c$. Au bout d'un autre temps t', le mobile se trouvera en a', extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur les droites $0b' = v_0 t'$ et $0c' = 1/2\, gt'^2$. On déterminera ainsi autant de positions que l'on voudra du mobile dans l'espace, et en les joignant par un trait continu, on aura la trajectoire absolue du mobile. Remarquons que dans les triangles semblables $0ba_1$ et $0b'a_1'$, les longueurs $0a_1$, $0a'_1$ sont proportionnelles aux longueurs $0b$ et $0b'$ qui, elles-mêmes, sont proportionnelles aux temps t et t'; de plus, les longueurs $0c = ab$ et $0c' = a'b'$ sont proportionnelles aux carrés de ces mêmes temps. Or, $0a_1$ et $0a'_1$ représentent les chemins parcourus dans le sens horizontal, et $0c$, $0c'$ les chemins parcourus dans le sens vertical; donc la trajectoire du mobile est une courbe dont les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses, caractère distinctif de la parabole.

418. Détermination de la position du mobile à un instant quelconque. — La vitesse v_0 étant connue en grandeur et en direction, on peut facilement déterminer les longueurs $0a_1 = x$ et $aa_1 = y$ d'un point quelconque a de la courbe, position du mobile au bout d'un temps t. En effet, soit α l'angle que forme la direction OL avec l'horizontale; décomposons la vitesse initiale v_0 en deux composantes, l'une $v_0 \cos\alpha$ dirigée suivant OX, et l'autre $v_0 \sin\alpha$ dirigée suivant OY. La première sera le chemin parcouru uniformément suivant l'horizontale, et l'on aura

$$x = v_0 t \cos\alpha. \qquad (1)$$

Mais, pendant ce temps, le mobile décrit un chemin vertical de bas en haut déterminé par la composante verticale $v_0 \sin\alpha$, et un autre chemin de haut en bas, dû à la pesanteur; le mobile se trouve donc à une distance aa_1, de l'axe OX, égale à

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2. \qquad (2)$$

Remarque. — La vitesse horizontale $v_0 \cos\alpha$ est, à chaque instant, la vitesse de la projection du mobile sur l'axe OX, et comme

ce mobile se meut uniformément suivant OL, la vitesse $v_0 \cos\alpha$ est constante. Quant à la vitesse verticale $v_0 \sin\alpha - gt$, elle détermine un mouvement uniformément varié du mobile. Ce mouvement est uniformément retardé tant que l'on a $gt < v_0 \sin\alpha$, et le corps s'élève; mais, à partir de l'instant où $gt = v_0 \sin\alpha$, la vitesse change de sens et le mouvement devient uniformément accéléré.

419. Vitesse en un point quelconque. — La vitesse en un point quelconque a', s'obtiendra en construisant un parallélogramme sur les droites $a'k' = v_0 \cos\alpha$ et $a'k = v_0 \sin\alpha - gt$; la diagonale $a's$ représentera, en grandeur et en direction, la vitesse du mobile au point a', et cette droite $a's$ sera tangente à la trajectoire en ce point. Au sommet S de la courbe, la vitesse verticale est nulle et la tangente est horizontale; à partir de ce point, le mobile peut être considéré comme étant lancé horizontalement avec la vitesse constante $v_0 \cos\alpha$, et, par suite, pour obtenir la vitesse en un point quelconque de la courbe, situé sur la branche SF, il suffira de composer cette vitesse horizontale constante avec la vitesse verticale gt due à la pesanteur.

Remarque. — En remarquant que la vitesse verticale diminue de la quantité g par seconde, pendant que le mobile parcourt la branche OS, et que, au contraire, elle augmente à partir du point S, de la même quantité, dans le même temps, pendant que le mobile parcourt la branche SF, on voit que les deux branches de la courbe sont symétriques par rapport à l'axe RS. La trajectoire parabolique a donc pour sommet le point S, pour axe la verticale RS, et pour tangente au point O la direction de la vitesse initiale v_0.

420. Hauteur du jet. — La valeur maximum RS s'appelle la *hauteur du jet*. Le mobile se trouvera au sommet de la courbe lorsque la vitesse verticale $v_0 \sin\alpha$ sera complètement détruite par l'action de la pesanteur et l'on aura :

$$v_0 \sin\alpha = gt; \quad \text{d'où } t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{3}$$

En remplaçant dans les valeurs de x et y, elles deviennent

$$x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{gv_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Si le mobile était lancé verticalement avec la vitesse initiale $v_0 \sin \alpha$, il s'élèverait, pour arriver à une vitesse nulle, à une hauteur $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; cette valeur de h est précisément égale à celle que nous avons trouvée pour la valeur maximum de y.

Donc *la hauteur du jet est la même que la hauteur à laquelle s'élèverait le mobile s'il était lancé verticalement avec une vitesse initiale égale à la composante verticale* $v_0 \sin \alpha$.

421. Amplitude du jet. — On appelle *amplitude du jet*, la longueur OF, comptée sur l'axe OX, depuis l'origine O jusqu'au point où le mobile coupe l'horizontale OX. A cet instant, y est nulle et l'équation (2) devient

$$v_0 t \sin \alpha = \frac{1}{2} g t^2; \text{ d'où } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \qquad (4)$$

En comparant cette valeur de t à celle de l'équation (3), on voit que le mobile emploie, pour parcourir le chemin OF, un temps double de celui qu'il emploie pour arriver au sommet S.

Remplaçant t par sa valeur précédente dans l'équation (1), il vient

$$x = v_0 \cos \alpha \times \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Or on sait que $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$; donc

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Cette valeur de x sera maximum lorsque $\sin 2\alpha$ sera égal à l'unité, et, dans ce cas, $2\alpha = 90°$ et $\alpha = 45°$.

Ainsi, la plus grande amplitude du jet, pour une même vitesse initiale, sera obtenue en lançant le mobile sous un angle de 45°. Si le corps était lancé verticalement avec la même vitesse initiale v_0, nous savons que la hauteur h à laquelle il s'élèverait, serait exprimée par $\frac{v_0^2}{2g}$. Cette valeur étant moitié moindre que celle que nous venons de trouver pour l'amplitude du jet, dans l'hypothèse de l'angle $\alpha = 45°$, on en conclut que *l'amplitude maximum du jet est double du chemin que parcourrait le mobile s'il était lancé verticalement avec la même vitesse initiale.*

422. Cas particulier où le corps est lancé horizontalement. — Lorsqu'un corps est lancé avec une vitesse initiale dirigée horizontalement, on peut démontrer expérimentalement que la trajectoire qu'il décrit est une parabole. Imaginons qu'on ait placé, contre un tableau noir, une pièce de bois B (*fig.* 232) dans laquelle on a pratiqué une rainure circulaire dont le dernier élément est dirigé horizontalement, et supposons qu'on ait tracé, sur ce tableau, différentes paraboles ayant le point A pour sommet commun. Si l'on place une bille en un point quelconque de la rainure, cette bille, en arrivant au point A, sera lancée avec une vitesse horizontale qui, se composant avec la vitesse verticale due à la pesanteur, fera décrire une parabole au mobile, et en plaçant celui-ci à une hauteur convenable, on le verra décrire l'une des courbes précédemment tracées. Pour rendre l'expérience plus convaincante, on dispose, en différents points de la parabole, des anneaux à vis que la bille peut traverser librement ; celle-ci décrit sa trajectoire en passant dans tous les anneaux.

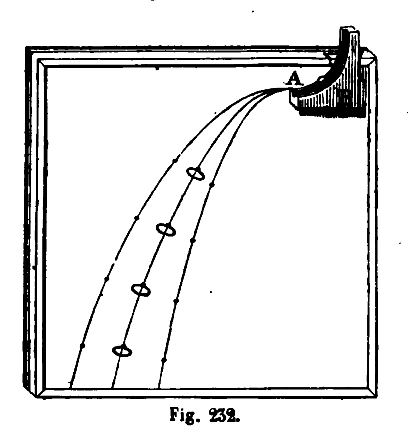


Fig. 232.

423. Application au mouvement des projectiles. — Les considérations qui viennent d'être exposées sur le mouvement des corps dans le vide, sont applicables au mouvement des projectiles dans l'air, sauf les modifications apportées dans la trajectoire par la résistance des milieux.

Un projectile lancé par une arme à feu décrit une parabole, et la vitesse initiale qui lui est communiquée est dirigée suivant l'axe du canon. Il résulte de là que, pour atteindre un point déterminé dans l'espace, le projectile ne doit pas être lancé suivant la droite idéale qui joindrait le point de départ au point d'arrivée ; la direction de sa vitesse initiale doit faire, avec cette ligne, un certain angle de telle sorte que, décrivant une parabole, le projectile atteigne le point considéré. On conçoit donc qu'il est im

portant de connaître l'inclinaison à donner aux armes à feu à longue portée, pour tirer avec précision ; à cet effet, on dispose à la base du canon une hausse mobile graduée, et suivant la distance du but, on abaisse plus ou moins la culasse. En menant un rayon visuel passant par le point de mire B (*fig.* 233), par le

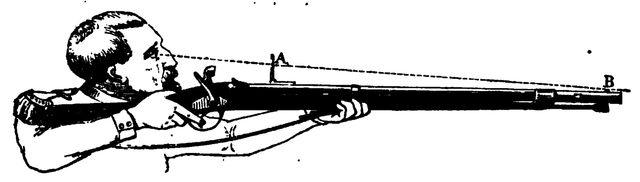


Fig. 233.

point A de la hausse mobile, correspondant à ce but, et par celui-ci, le projectile décrira une parabole pour aller tomber au point déterminé. La difficulté ne réside donc plus que dans l'appréciation de la distance du point où l'on se trouve à celui que l'on veut atteindre.

La résistance de l'air, ainsi que le vent, jouent un rôle assez important dans le mouvement des projectiles lancés par les bouches à feu à longue portée ; l'amplitude du jet se trouve diminuée.

Il résulte de l'expérience que la portée maximum a lieu lorsque le projectile est lancé sous un angle compris entre 43° et 44°.

424. Quatrième principe. — *Indépendance des effets des forces simultanées.* — Ce principe se rapporte à l'effet produit par une force sur un point matériel en mouvement, c'est-à-dire déjà soumis à l'action d'une ou plusieurs autres forces. On l'énonce ainsi :

L'effet produit par une force sur un point matériel en mouvement et soumis à l'action de forces quelconques est le même que si cette force agissait seule et que si le point était au repos.

Pour bien établir ce qu'il faut entendre par ce principe qui ne s'impose pas à la raison d'une manière évidente, nous allons l'expliquer par un exemple.

Soit AB (*fig.* 234) la trajectoire décrite par un point matériel M soumis à l'action d'un système quelconque de forces F,F′,F″...., et M une position quelconque du mobile sur sa trajectoire. Prenons ce point M pour origine de trois axes X,Y,Z, entraînés par le

même système de forces, c'est-à-dire possédant un mouvement commun avec le mobile, et dont l'origine parcourt également la trajectoire AB. Si rien ne vient changer cet état de choses, le mobile ne se séparera pas de l'origine des axes; le point matériel sera donc au repos relativement à ces axes. Mais, si une nouvelle force F_1 vient agir sur le point matériel, sans influencer les axes, le mobile quittera l'origine M et prendra un certain mouvement par rapport à ces axes. C'est précisément de ce mouvement relatif qu'il s'agit dans le principe. Il faut donc entendre que ce mouvement relatif est absolument indépendant du mouvement commun du mobile et des axes, et il est le même que si la force F_1 agissait seule sur le point matériel en repos.

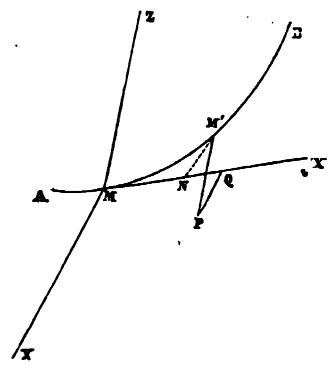


Fig. 234.

Le mouvement des axes a été appelé (261) *mouvement d'entraînement*, et celui produit par la force F_1, *mouvement relatif*. Pour obtenir le mouvement absolu, il suffira de composer ces deux mouvements.

Cela posé, le 4e principe peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un système de points matériels possède un mouvement de translation varié, si un autre point, ayant à un certain instant le même mouvement que le système, reçoit à partir de cet instant l'action d'une ou plusieurs forces, il prend, relativement au système mobile, le même mouvement que ces forces lui communiqueraient si les forces qui se rapportent au mouvement commun n'existaient pas.

425. Proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles produisent. — Le principe que nous venons de poser conduit à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Deux ou plusieurs forces constantes en grandeur et en direction, appliquées successivement à un même point matériel partant du repos ou animé d'une vitesse initiale de même direction*

que celle des forces, sont entre elles comme les accélérations qu'elles produisent.

Considérons d'abord deux forces constantes f et f' qui, agissant successivement sur un même point matériel, lui communiquent des accélérations a et a'. Si nous appliquons simultanément, et dans le même sens, ces deux forces f et f' sur le point matériel, leur résultante sera égale à $f+f'$, et en vertu du principe précédent, elles lui imprimeront une accélération égale à $a+a'$. Si nous prenons $f=f'$, nous aurons $a=a'$; $f+f'=2f$ et $a+a'=2a$; ce qui nous montre que si une force f imprime une accélération a à un point matériel, une force $2f$ lui imprimera une accélération $2a$; une force $3f$, une accélération $3a$,..., et une force nf, une accélération na.

Cela posé, soit j et j' les accélérations produites par deux forces constantes F et F' agissant séparément sur un même point matériel, f une force qui peut être leur commune mesure ou l'unité de force, a l'accélération produite par cette force, et supposons que l'on ait $F=nf$ et $F'=n'f$. D'après ce qui précède, n forces égales à f communiqueront au point matériel considéré une accélération na, et n' forces égales à f, une accélération égale à $n'a$, de sorte que

$$na=j \quad \text{et} \quad n'a=j'; \text{ d'où } \frac{j}{j'}=\frac{n}{n'};$$

$$\text{et comme } \frac{F}{F'}=\frac{n}{n'}, \text{ on en conclut } \frac{F}{F'}=\frac{j}{j'}. \qquad (1)$$

Les forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent.

426. Proportionnalité des forces aux vitesses. — Lorsque le point matériel part du repos, *les forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles lui impriment.* En effet, le mouvement produit par une force constante étant uniformément accéléré, on a, au bout d'un temps quelconque t,

$$v=jt \quad \text{et} \quad v'=j't;$$

$$\text{d'où l'on tire } \frac{v}{v'}=\frac{j}{j'} \quad \text{et par suite } \frac{F}{F'}=\frac{v}{v'}.$$

Cette proposition peut se démontrer expérimentalement au moyen de la machine d'Atwood. On prend, par exemple, $p=10$

grammes, la somme $P + P' + p = 360$ grammes, et on mesure la vitesse acquise au bout d'un certain temps t. On prend ensuite $p = 20$ grammes et $P + P' + p = 360$ grammes; en mesurant la vitesse acquise au bout du même temps t, on constate que cette vitesse est double de la précédente. En prenant $p = 30$ grammes et en conservant à la somme $P + P' + p$, la même valeur, on verrait que la vitesse est triple de la première et ainsi de suite. Donc, des forces doubles, triples, impriment au même corps, de poids 360 grammes, des vitesses doubles, triples ; par conséquent, *ces forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles produisent.*

427. Masse des corps. — De l'équation (1), du théorème ci-dessus, on déduit

$$\frac{F}{j} = \frac{F'}{j'} = \frac{F''}{j''} = \ldots\ldots = M,$$

ce qui s'exprime en disant que *le quotient du nombre qui représente la force par celui qui représente l'accélération correspondante, est constant pour un même corps*; ce quotient constant a été appelé la *masse* du corps et on le désigne par M.

428. Les corps, lors même qu'on les considère comme étant réduits à de simples points matériels, ne sont pas identiques les uns aux autres par rapport aux effets qu'ils éprouvent de la part des forces qu'on leur applique. On observe qu'une même force, appliquée à des corps de même nature, leur communique des accélérations différentes qui varient en raison inverse des volumes. On voit encore que cette relation n'existe pas pour des corps de matière différente, c'est-à-dire que des corps ayant un volume beaucoup plus grand que d'autres, acquièrent des accélérations plus grandes sous l'action de forces égales. L'effet des forces, sur les corps, ne dépend donc pas seulement du volume de ces derniers, et on dit qu'un corps a plus ou moins de masse suivant qu'il faut lui appliquer une force plus ou moins considérable pour lui communiquer une accélération déterminée.

Deux corps, quel que soit leur volume, ont la même masse lorsqu'ils prennent des accélérations égales sous l'action de forces égales.

Deux corps ont des masses doubles, triples... l'un de l'autre,

lorsqu'ils exigent des forces doubles, triples... pour acquérir une même accélération.

Le poids d'un corps étant égal à la force qui le sollicite vers le centre de la terre, et $g = 9{,}8088$ l'accélération due à la pesanteur, on peut écrire, en vertu de la proportionnalité des forces aux accélérations,

$$\frac{F}{j} = \frac{F'}{j'} = \frac{P}{g} = M.$$

Donc *la masse d'un corps est égale à son poids divisé par la gravité.*

De cette égalité on tire :

$$j = g \times \frac{F}{P},$$

qui permet de trouver l'accélération que peut prendre un corps de poids connu sous l'action d'une force constante déterminée.

429. Unité de masse. — La masse d'un corps étant égale à son poids divisé par l'accélération due à la pesanteur, on voit que la masse d'un corps sera égale à l'unité lorsqu'on aura

$$\frac{P}{g} = 1$$

P étant exprimé en kilogrammes et g en mètres. Or, à Paris, on a $g = 9^{m}{,}8088$. Donc l'*unité de masse est la masse d'un corps dont le poids est de* $9^{kil}{,}8088$. Le poids et la gravité varieront pour les divers lieux de la terre ; mais leur rapport restant constant, la masse d'un corps est une quantité constante pour tous les points du globe.

430. Relations entre les forces, les masses et les accélérations. — 1° *Les forces sont proportionnelles aux produits des masses par les accélérations.* Soit F et F′ deux forces quelconques appliquées à deux points matériels de masse M et M′, et j, j' les accélérations communiquées à ces corps. La force F, imprimant une accélération j à un corps de masse M, donne

$$\frac{F}{j} = M.$$

De même, pour la force F′, on aura

$$\frac{F'}{j'} = M'.$$

Divisant membre à membre il vient

$$\frac{Fj'}{F'j} = \frac{M}{M'}; \text{ d'où } \frac{F}{F'} = \frac{Mj}{M'j'} \qquad (1)$$

431. 2° *Les forces sont proportionnelles aux produits des masses par les vitesses.* Supposons que les deux mobiles de masse M et M' partent du repos, et multiplions par t les deux termes du deuxième membre de l'équation (1), il vient

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mjt}{M'j't}.$$

Or les quantités jt, $j't$ représentent les vitesses v, v' possédées par les mobiles de masse M et M' au bout du temps t; en remplaçant, il vient

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mv}{M'v'}.$$

Les produits Mv, $M'v'$ des masses par les vitesses s'appellent *quantités de mouvement.* On peut donc dire que *les forces sont proportionnelles aux quantités de mouvement qu'elles produisent.*

432. 3° *Les accélérations produites par une force qui agit successivement sur deux points matériels de masse* M et M', *sont en raison inverse de ces masses.* Reprenons l'équation

$$\frac{F}{F'} = \frac{Mj}{M'j'},$$

et faisons $F' = F$; il vient successivement

$$1 = \frac{Mj}{M'j'}; \quad Mj = M'j' \quad \text{et} \quad \frac{j}{j'} = \frac{M'}{M}.$$

Si les mobiles partent du repos, on aura, au bout d'un temps quelconque

$$\frac{v}{v'} = \frac{M'}{M}.$$

Les vitesses communiquées par une même force à deux corps de masse différente, sont en raison inverse de ces masses. C'est sur ce principe qu'est fondée la machine d'Atwood.

§ 2. — THÉORÈMES RELATIFS AUX QUANTITÉS DE MOUVEMENT

423. Impulsion d'une force. — Définition. — On appelle *impulsion d'une force* le produit Ft de l'intensité de la force par le temps pendant lequel elle agit.

424. THÉORÈME. — *La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force dans le même temps.* Considérons un mobile de masse M soumis à l'action d'une force constante F ; si le mobile part du repos, sa vitesse au bout d'un temps t sera exprimée par

$$v = jt.$$

Nous avons trouvé (427) que $j = \frac{F}{M}$; en remplaçant il vient

$$v = \frac{F}{M}t \text{ ; d'où l'on tire } Mv = Ft.$$

La quantité de mouvement est numériquement égale à l'impulsion de la force.

425. Cette formule nous montre qu'il n'y a pas de forces instantanées, car si nous faisons $t = 0$, il vient $Mv = 0$. Donc il faut toujours un temps, quelque petit qu'il soit, pour qu'une force puisse produire un certain effet.

Si le point matériel possède une vitesse initiale v_0 au moment où la force F commence à agir, sa vitesse au bout du temps t sera

$$v = v_0 + jt \text{ ; ou } v = v_0 + \frac{F}{M}t \text{ ;}$$

d'où l'on tire

$$Mv - Mv_0 = Ft. \qquad (1)$$

L'accroissement de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force.

426. Si la force agissait en sens contraire de la vitesse initiale, on aurait

$$v = v_0 - \frac{F}{M}t \quad \text{et} \quad Mv_0 - Mv = Ft.$$

La diminution de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force.

437. Si, dans l'équation (1), on fait successivement $v_0 = 0$ et $v = 0$, on voit que 1° *la quantité de mouvement possédée par un mobile est égale et de même sens que l'impulsion qu'il a reçue depuis qu'il est en mouvement ;*

2° *La quantité de mouvement possédée par un mobile est égale et de sens contraire à l'impulsion qui est nécessaire pour le ramener au repos.*

438. Extension du théorème précédent au cas d'une force variable. — Le temps total t de l'action de la force peut être décomposé en éléments très-petits $t_1, t_2, t_3, \dots t_n$ pendant lesquels la force pourra être considérée comme constante ; soit $F_1, F_2, F_3, \dots F_n$ les valeurs successives de la force et $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$ les vitesses correspondant aux divers éléments du temps ; on aura

Pendant le 1er élément	t_1		$Mv_1 - Mv_0 = F_1 t_1$
—	2e	— t_2	$Mv_2 - Mv_1 = F_2 t_2$
. . . .			. . . .
	ne	— t_n	$Mv_n - Mv_{n-1} = F_n t_n$

d'où en ajoutant : $Mv - Mv_0 = F_1 t_1 + F_2 t_2 + \dots + F_n t_n$

Cette équation existant, quelque petits que soient les temps $t_1, t_2, \dots$, s'applique au cas d'une force F variable d'une manière continue, prenant les valeurs successives $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ et agissant pendant le temps $t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots t_n$. Donc, *pour une force variable*, comme pour une force constante, *la variation de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force pendant le même temps.*

439. Le théorème s'applique, sans modification, au cas où le mobile est soumis à l'action de plusieurs forces simultanées de même sens ou de sens contraire et agissant suivant la même droite. Dans ce cas, la force F considérée est la résultante de toutes ces forces, et *la variation de quantité de mouvement est égale à la somme algébrique des impulsions des composantes.*

440. Projection du mouvement d'un point matériel sur un axe. — 1° *La force constante agit dans la direction de la vitesse initiale.* Le mouvement est rectiligne et uniformément varié. Désignons par M la masse du mobile, par F la force qui le sollicite,

par v_0 la vitesse initiale, par e,e' les espaces parcourus par le mobile et par sa projection pendant le temps t. Soit OB (*fig.* 235) la direction de la trajectoire du mobile, O sa position initiale, et A sa position au bout du temps t ; soit enfin O' et A' les projections des points O et A sur l'axe xx'. Nous aurons (243)

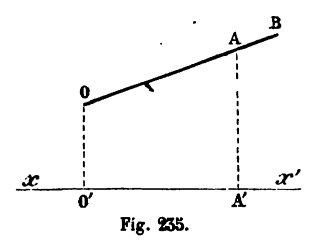


Fig. 235.

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 \quad \text{ou} \quad e = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{M} t^2.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière équation par le cosinus de l'angle α formé par la ligne OB avec l'axe, il vient

$$e \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{F \cos \alpha}{M} t^2 = e'.$$

Cette équation nous montre que *le mouvement de la projection du mobile est aussi uniformément varié ; c'est le mouvement que posséderait un point matériel de même masse* M *que le mobile considéré, qui aurait pour vitesse initiale la projection de la vitesse initiale de ce mobile, et qui serait sollicité par une force égale à la projection de la force* F *qui agit sur le mobile.*

441. 2° *La force constante n'agit pas dans la direction de la vitesse initiale du mobile.* Le mouvement est parabolique.

Soit OF (*fig.* 236) la direction de la force constante, OC la direction de la vitesse initiale, OD l'espace qui serait parcouru pendant le temps t, suivant la direction de la force, s'il n'y avait pas de vitesse initiale, OE le chemin qui serait parcouru pendant le même temps, si la force n'agissait pas. Le mobile, en parcourant la parabole OB, sera arrivé, au bout du temps t, au sommet A du parallélogramme construit sur OD et OE. Projetons les points O,D,A en O',D',A' sur l'axe xx'. Désignons par F la force constante, par M la masse du mobile, par v_0 la vitesse

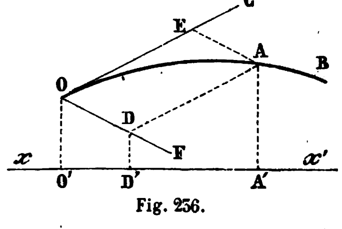


Fig. 236.

initiale, par e l'espace parcouru pendant le temps t par la projection du mobile, et par α et β les angles que les droites OE et OD font avec l'axe xx'. Nous aurons

$$e' = A'D' + O'D'.$$

Mais $A'D' = AD \cos\alpha$; $O'D' = OD \cos\beta$; $AD = OE = v_o t$; $OD = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$:

donc, en remplaçant, $e' = v_o t \cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{F\cos\beta}{M}t^2$.

On voit, par cette équation, que *la projection du mobile considéré se meut d'un mouvement rectiligne uniformément varié; c'est le mouvement que posséderait un point matériel de même masse* M *que le mobile considéré, qui aurait pour vitesse initiale la projection de la vitesse initiale de ce mobile, et qui serait sollicité par une force constante agissant dans la direction de la vitesse initiale et égale à la projection de la force qui sollicite le mobile.*

442. De ce qui vient d'être exposé, on en déduit par analogie

$$Mv \cos(vx) - Mv_o \cos(v_o x) = Ft \cos(Fx),$$

ce qui s'énonce de la manière suivante :

443. Théorème. — *Lorsqu'un point matériel se meut d'une manière quelconque dans l'espace, la variation de sa quantité de mouvement, projetée sur un axe quelconque, est égale à l'impulsion de la force projetée sur le même axe.*

444. Ce théorème s'applique, sans modification, au cas où le mobile est soumis à l'action de plusieurs forces simultanées. Dans ce cas, la force considérée est la résultante de toutes les forces et la variation de quantité de mouvement, projetée sur un axe, est égale à la somme algébrique des impulsions des composantes projetées sur le même axe.

445. Théorème. — *La variation de la quantité de mouvement, projetée sur un axe, de toute la masse d'un système solide concentré à son centre de gravité, est égale à la somme des variations des quantités de mouvement de toutes les petites masses élémentaires projetées sur le même axe.*

Soit A (*fig.* 237) le système solide et G son centre de gravité, point auquel nous supposerons concentrée toute la masse du corps. Projetons toutes les petites masses m, m', m''.... qui le composent

et soit x, x', x''.... X les distances de leurs projections et celle du centre de gravité à un plan des moments NS. Nous aurons, en vertu du théorème de Varignon,

$$(m+m'+m''+\ldots\ldots)\,X=mx+ +m'x'+m''x''+\ldots\ldots=MX$$

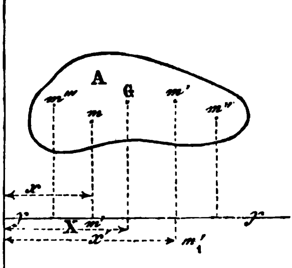


Fig. 237.

Supposons que le corps A se déplace pendant un temps très-petit t, et soit e, e', e'',.... $\boldsymbol{e}$ les déplacements correspondants des projections des points m, m', m'',.... G; le même théorème de Varignon donne

$$M(X+\boldsymbol{e})=m(x+e)+m'(x'+e')+\ldots\ldots$$

Retranchant l'égalité précédente de cette dernière, il vient

$$M\boldsymbol{e}=me+m'e'+m''e''+\ldots\ldots$$

Divisons par le temps très-petit t pendant lequel nous avons considéré le déplacement du système, il vient

$$M\frac{\boldsymbol{e}}{t}=m\frac{e}{t}+m'\frac{e'}{t}+m''\frac{e''}{t}+\ldots\ldots$$

Mais le temps t étant très-petit, on peut considérer le mouvement comme uniforme et les rapports $\frac{\boldsymbol{e}}{t}$, $\frac{e'}{t}$, $\frac{e''}{t}$.... sont les vitesses. Désignons par V_{ox} la vitesse de la projection du centre de gravité et par v_{ox}, v'_{ox}, v''_{ox}.... celle des projections des divers points du système; il vient

$$MV_{ox}=mv_{ox}+m'v'_{ox}+m''v''_{ox}+\ldots\ldots$$

Pour un autre déplacement du système, on aurait de même

$$MV_{x}=mv_{x}+m'v'_{x}+m''v''_{x}+\ldots\ldots$$

En retranchant l'égalité précédente de cette dernière, il vient

$$MV_x - MV_{0x} = (mv_x - mv_{0x}) + (m'v'_x - m'v'_{0x}) + \ldots\ldots, \quad (1)$$

ce qu'il fallait démontrer.

446. Théorème. — *La variation de la somme des quantités de mouvement de tous les points matériels qui composent un corps solide, projetée sur un axe quelconque, est égale à la somme des impulsions des forces projetées sur le même axe.*

Tous les différents points matériels qui composent le système peuvent être considérés comme entièrement libres et indépendants les uns des autres, à la condition d'avoir égard aux actions mutuelles que ces points matériels exercent les uns sur les autres. Le corps se trouve ainsi soumis à l'action de deux systèmes de forces : 1° Les forces *intérieures* ou *mutuelles* et 2° les forces *extérieures* qui lui sont appliquées.

D'après le principe de la réaction égale et contraire à l'action, toutes les forces intérieures sont égales et opposées deux à deux, de sens contraire, et par suite elles s'annulent. On voit donc que les forces mutuelles n'influent nullement sur le mouvement que prend le corps, et qui n'est dû qu'aux forces extérieures. Donc, *la variation de la quantité de mouvement d'un corps est indépendante des forces intérieures.*

Chacun des points matériels m, m', m''.... du corps solide, considéré séparément, donnera, sous l'action des forces extérieures, les équations suivantes, déduites du théorème démontré (443).

$$\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= F_x t \\ m'v'_x - m'v'_{0x} &= F'_x t \\ \ldots\ldots\ldots &= \ldots \end{aligned}$$

En ajoutant toutes ces égalités membre à membre, il vient :

$$(mv_x + m'v'_x + \ldots\ldots) - (mv_{0x} + m'v'_{0x} + \ldots\ldots) = F_x t + F'_x t + \ldots\ldots \quad (1)$$

ou bien $\Sigma mv_x - \Sigma mv_{0x} = \Sigma F_x t,$ C.Q.F.D.

447. Mouvement du centre de gravité. — THÉORÈME. — *Le centre de gravité d'un corps quelconque se meut comme un point matériel qui réunirait à lui seul toute la masse du corps considéré, et qui serait soumis à l'action de toutes les forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes.*

La démonstration de ce théorème se déduit de la simple comparaison entre l'équation (1) ci-dessus

$$(mv_x + m'v'_x + \ldots\ldots) - (mv_{0x} + m'v'_{0x} + \ldots\ldots) = F_x t + F'_x t + \ldots\ldots$$

et l'équation (1) du théorème démontré (445)

$$MV_x - MV_{0x} = (mv_x - mv_{0x}) + (m'v'_x - m'v'_{0x}) + \ldots\ldots$$

En effet, le premier membre de la première équation étant égal au deuxième membre de la seconde, il s'ensuit que :

$$MV_x - MV_{0x} = F_x t + F'_x t + \ldots\ldots,$$

équation qui montre que *la variation de la quantité de mouvement du centre de gravité d'un corps quelconque, projetée sur un axe, est égale à la somme des impulsions de toutes les forces qui agissent sur le corps, projetées sur le même axe.*

Ainsi, tout ce que nous avons dit relativement au mouvement d'un point matériel s'applique directement à un solide quelconque lorsque, par la pensée, nous considérons toute sa masse concentrée à son centre de gravité et que nous transportons en ce point, parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces extérieures qui agissent sur le corps.

448. Conséquences. — Ce théorème conduit aux conséquences suivantes :

Toutes les fois que les forces extérieures, transportées parallèlement à elles-mêmes, au centre de gravité d'un système quelconque, auront une résultante nulle, ce centre de gravité restera immobile ou sera animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Il en sera de même s'il n'y a pas de forces extérieures.

Un animal isolé dans l'espace, et soustrait à l'action de toute force extérieure, ne parviendrait pas à déplacer son centre de gravité malgré tous les efforts qu'il ferait pour cela, car le jeu de ses muscles ne peut développer que des forces intérieures qui n'ont aucune action sur le centre de gravité.

La faculté que possèdent les êtres animés de se mouvoir, est déterminée par les réactions des corps sur lesquels ils s'appuient; ces réactions sont des forces extérieures par rapport à leur corps,

et, par suite, produisent le déplacement de leur centre de gravité dans tous les sens possibles.

Lorsqu'une bombe est lancée dans l'air, elle décrit une parabole ; si elle vient à éclater avant de toucher la terre, l'explosion n'étant déterminée que par les forces intérieures, le centre de gravité continue à décrire la même courbe que si les différentes parties du projectile n'étaient pas séparées. Les fragments de la bombe venant à rencontrer un obstacle, le mouvement du centre de gravité se trouvera modifié.

CHAPITRE II

§ 1. — TRAVAIL DES FORCES

449. Définition du travail mécanique. — Lorsqu'une force, quelle qu'elle soit, est employée à vaincre une résistance, on dit qu'il y a *travail produit;* un cheval qui tire une voiture, un homme qui élève des fardeaux, exercent un certain travail. Le travail mécanique d'une force implique donc les deux idées de résistance vaincue et de chemin parcouru ; si l'un de ces facteurs est nul, il n'y a pas de travail mécanique produit. En outre, il est évident que si l'on élève une même charge à des hauteurs doubles, triples,.... le travail produit devient double, triple,.... et que si cette charge devient elle-même double, triple,.... pour un même chemin parcouru, le travail produit est encore doublé, triplé.... On peut donc dire que le travail mécanique varie proportionnellement à la résistance vaincue et au chemin parcouru. Il faut, maintenant, en déterminer la mesure, et pour cela, définir l'unité de travail mécanique adoptée.

450. Unité de travail mécanique. — L'unité de travail mécanique adoptée en France est le *kilogrammètre*, c'est-à-dire le travail développé en élevant à 1^m de hauteur un poids de 1 kilog. Cette unité se désigne par les lettres *kgm.*

451. Expression du travail d'une force constante. — *Le travail d'une force constante est égal au produit de l'intensité de la force, exprimée en kilogrammes, par le chemin parcouru suivant la direction de cette force, exprimé en mètres.* Ainsi, F étant l'effort moteur et e le chemin parcouru, le travail mécanique développé aura pour expression

$$F \times e.$$

452. Notation adoptée. — Le travail d'une force se désigne par la caractéristique $\mathcal{E}$; ainsi, pour désigner le travail d'une force quelconque F, on écrira :

$$\mathcal{E}\,F.$$

453. Travail d'une force oblique au chemin parcouru. — Lorsque le point d'application d'une force se meut suivant une direction autre que celle de la force, il faut, pour évaluer le travail de cette force, connaître le chemin parcouru par son point d'application suivant sa direction propre, et, pour cela, il suffit de projeter le chemin réellement parcouru sur la direction de la force. Ainsi soit AB = F (*fig.* 238), la force et AA′ le chemin décrit par son point d'application. Le travail de la force F sera AB × A*a*. Si nous projetons la force F sur la direction AC du chemin parcouru, le travail pourra encore s'exprimer par AA′ × AC; en effet, les triangles semblables A*a*A′ et ABC sont semblables et donnent

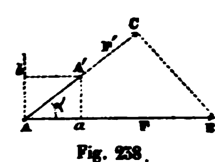


Fig. 238.

$$\frac{AB}{AA'}=\frac{AC}{Aa};\ \text{d'où}\ AB\times Aa=AA'\times AC.$$

Le travail d'une force oblique au chemin parcouru est égal au produit de l'intensité de cette force par la projection du chemin sur sa direction, ou bien encore, *au chemin parcouru multiplié par la projection de la force sur la direction du chemin.*

En désignant AB par F; AA′ par E et l'angle A′AB par α, on a :

$$AB\times Aa=F\times E\cos\alpha \quad \text{et} \quad AA'\times AC=E\times F\cos\alpha$$

Donc le travail de la force F peut encore s'exprimer par $F\times E\cos\alpha$, c'est-à-dire par le produit de la force, du chemin parcouru et du cosinus de l'angle formé. On voit que ce travail peut être nul de trois manières différentes, suivant que l'un quelconque des trois facteurs est nul.

454. Travail élémentaire d'une force variable. — Lorsque la force considérée est variable, et que son point d'application parcourt une trajectoire quelconque, on peut toujours décomposer cette trajectoire en parties assez petites pour être considérées

comme rectilignes ; on peut aussi, sans erreur sensible, considérer la force comme constante en grandeur et en direction pendant les temps très-petits employés à parcourir les divers éléments du chemin. Le travail correspondant à chacun de ces travaux élémentaires s'appelle *travail élémentaire*, et pourra être évalué comme nous venons de l'indiquer ci-dessus. La somme de tous les travaux élémentaires donne le travail total de la force variable.

455. Travail moteur. — Travail résistant. — Le travail élémentaire d'une force est un *travail moteur* lorsque l'angle que fait la force avec l'élément de chemin est aigu, c'est-à-dire lorsque la projection de l'élément, sur la direction de la force, est dans le sens de la force, ou bien lorsque la projection de la force, sur la direction de l'élément, est dans le sens de l'élément décrit. Ce même travail est un *travail résistant* lorsque l'angle que fait la force avec l'élément de chemin, est obtus, c'est-à-dire lorsque la projection de l'élément, sur la direction de la force, est en sens contraire de la force, ou bien lorsque la projection de la force, sur la direction de l'élément, est en sens contraire de l'élément décrit.

456. Travail total d'une force variable. — Soit F, F', F''.... les valeurs successives d'une force variable ; e_1, e'_1, e''_1.... les projections, sur les directions de la force, des divers éléments e, e', e''.... des chemins parcourus. En considérant la force comme constante pendant qu'elle parcourt chacun des éléments de chemin, les travaux élémentaires sont :

$$t = Fe_1 ; \; t' = F'e'_1 ; \; t'' = F''e''_1 ; \ldots\ldots$$

et le travail total est

$$\mathfrak{T} = \Sigma t = Fe_1 + F'e'_1 + F''e''_1 + \ldots\ldots$$

457. Représentation graphique. — Le travail total d'une force variable peut être évalué graphiquement en construisant une courbe A'E' (*fig.* 239) ayant pour abscisses AB, BC, CD.... les projections $e_1, e_1' e''_1$.... des éléments de chemin, et pour ordonnées les valeurs successives F, F', F''.... de la force. L'aire de la surface AA'E'E représente le travail cherché. En effet, les différents travaux élémentaires sont représentés par les aires des rectangles ABA'A'', BCB'B''.... ; si la force F ne restait constante que pendant

que son point d'application parcourt des éléments quatre fois plus petits, les travaux élémentaires seraient représentés par les aires des rectangles AmA'm'', mm'pp''.... Or, il est évident que la somme des aires de tous ces rectangles a pour limite l'aire AA'C'E'E qui représente ainsi le travail total de la force variable. Nous avons vu (78) qu'une pareille surface peut être évaluée à l'aide de la formule de Thomas Simpson.

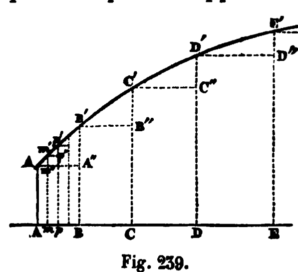


Fig. 239.

Remarque. — S'il entrait, dans le travail total d'une force, des travaux élémentaires moteurs et des travaux élémentaires résistants, on calculerait séparément la somme des travaux moteurs et la somme des travaux résistants ; la différence entre ces deux sommes représenterait le travail total de la force variable.

458. Travail de plusieurs forces simultanées. — Théorème. *Le travail élémentaire de la résultante d'un nombre quelconque de forces est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes.*

Pour démontrer ce théorème, rappelons (43) que la projection de la résultante, sur un axe quelconque, est égale à la somme algébrique des projections des composantes, et que la projection d'une force quelconque F sur un axe x, est exprimée par F cos (Fx), en désignant par Fx l'angle de la force avec l'axe x.

Soient maintenant F,F'F''.... les forces proposées et R leur résultante ; prenons, pour axe des projections, la direction de l'élément de chemin, nous aurons :

$$R\cos(Re) = F\cos(Fe) + F'\cos(F'e') + \ldots..,$$

Or le travail élémentaire d'une composante est égal à l'élément de chemin multiplié par la projection de la force sur la direction de l'élément, et il en est de même pour la résultante ; en multipliant tous les termes de l'équation précédente par l'élément de chemin e, on a

$$Re\cos(Re) = Fe\cos(Fe) + F'e\cos(F'e') + \ldots..,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

REMARQUE. — Si R représente la résultante de toutes les forces qui agissent sur le point matériel en mouvement, cette résultante se trouve évidemment dans la direction de l'élément de chemin ; elle est elle-même sa projection sur l'élément de chemin parcouru et il vient

$$Re = Fe\cos(Fe) + F'e\cos(F'e') + \ldots.$$

§ 2. — PRINCIPE DE L'EFFET DU TRAVAIL

459. Force vive. — Définition. — On donne le nom de *force vive* au produit de la masse d'un mobile par le carré de sa vitesse ; ainsi, l'expression Mv^2 désigne la force vive possédée par un mobile de masse M, animé d'une vitesse v.

460. Puissance vive. — Dans les calculs, comme nous allons le voir, au lieu d'employer le produit Mv^2, on ne fait entrer que la moitié $\frac{Mv^2}{2}$ de ce produit. M. Bélanger a proposé de donner un nom propre à cette quantité, et on l'appelle *puissance vive*.

461. Énoncé du principe de l'effet du travail. — Le principe de l'effet du travail consiste en ce que, *dans tout système de points matériels, la variation de puissance vive entre deux instants quelconques, est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures qui agissent sur le système.*

Nous allons démontrer ce principe dans les divers cas suivants :

462. 1° Cas d'une force constante agissant sur un point matériel qui part du repos.—Le mouvement sera uniformément accéléré et on aura les relations

$$v = jt \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2}jt^2 \quad \text{ou} \quad v = \frac{F}{M}t \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2.$$

Élevant la première équation au carré et multipliant la deuxième par $2\frac{F}{M}$, il vient

$$v^2 = \frac{F^2}{M^2}t^2 \quad \text{et} \quad 2\frac{F}{M}e = \frac{F^2}{M^2}t^2;$$

d'où l'on déduit $v^2 = 2\frac{F}{M}e$, et par suite $\frac{1}{2}Mv^2 = Fe = \mathfrak{T}F.$ (1)

La puissance vive possédée par le mobile au bout d'un temps quelconque t, *est égale au travail de la force* F *pendant le même temps.*

Si, dans l'équation (1), on remplace la masse M par sa valeur $\frac{P}{g}$, il vient

$$P\frac{v^2}{2g} = \mathfrak{T}F$$

Or la quantité $\frac{v^2}{2g}$ a été appelée (256) *hauteur due à la vitesse* v. Donc, dans le cas où le mobile part du repos, le travail est égal au poids de ce mobile multiplié par la hauteur due à sa vitesse. On voit, d'après cela, que pour calculer le travail d'une force constante appliquée à un point matériel qui part du repos, il suffit de connaître le poids et la vitesse du mobile.

463. 2° Cas d'une force constante agissant sur un mobile en mouvement.— Nous diviserons ce cas en deux autres.

1° *La force a la même direction que la vitesse initiale.* Le mouvement sera encore rectiligne et uniformément varié et on aura

$$v = v_0 + \frac{F}{M}t \quad \text{et} \quad e = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2.$$

Élevant la première équation au carré et multipliant la deuxième par $2\frac{F}{M}$, il vient

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{F}{M} \times v_0 t + \frac{F^2}{M^2}t^2,$$

$$\text{et} \quad 2\frac{F}{M}e = \qquad 2\frac{F}{M} \times v_0 t + \frac{F^2}{M^2}t^2.$$

Retranchant membre à membre, on aura

$$v^2 - 2\frac{F}{M}e = v_0^2; \text{ d'où } v_2 - v_0^2 = 2\frac{F}{M}e \text{ et } \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = Fe = \mathfrak{T}F.$$

La variation de puissance vive est égale au travail de la force.

2° *La force constante agit dans une direction différente de celle de la vitesse initiale.*

Le mouvement est parabolique ; mais nous savons (441) que si l'on projette un tel mouvement sur un axe, la projection du mobile, supposée avoir même masse que lui, se mouvra d'un mou-

vement rectiligne uniformément varié, comme si elle était soumise à une force égale à la projection de la force qui agit sur le mobile, et avec une vitesse égale à la projection de la vitesse du mobile.

Projetons le mouvement parabolique sur 3 axes rectangulaires x, y, z; on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{2} Mv_x^2 - \frac{1}{2} Mv_{0x}^2 = \mathfrak{S}F_x \text{ pour l'axe } x,$$

$$\frac{1}{2} Mv_y^2 - \frac{1}{2} Mv_{0y}^2 = \mathfrak{S}F_y \text{ pour l'axe } y,$$

$$\frac{1}{2} Mv_z^2 - \frac{1}{2} Mv_{0z}^2 = \mathfrak{S}F_z \text{ pour l'axe } z.$$

Ajoutant ces trois équations membre à membre, il vient

$$\frac{1}{2} M (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \frac{1}{2} M (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2) = \mathfrak{S}F_x + \mathfrak{S}F_y + \mathfrak{S}F_z .$$

Mais nous savons que si l'on décompose une force ou une vitesse en trois composantes rectangulaires, la somme des carrés des composantes est égale au carré de la résultante. On a donc

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2; \quad v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2; \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}F_x + \mathfrak{S}F_y + \mathfrak{S}F_z = \mathfrak{S}F.$$

En remplaçant, il vient

$$\frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = \mathfrak{S}F.$$

464. 3° **Cas d'une force variable.** Pour étendre le principe de l'effet du travail au cas où la force est variable, décomposons le temps t de l'action de la force, en éléments $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ assez petits pour que la force puisse être considérée comme constante pendant la durée de chacun d'eux; soit $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ les valeurs successives que prend la force, v_0 la vitesse initiale et $v_1, v_2, v_3 \ldots v$ les vitesses correspondant à la fin des divers éléments du temps. La vitesse finale de chaque élément sera la vitesse initiale pour l'élément suivant et l'on aura

Pour l'élément de temps t_1 $\quad \frac{1}{2} Mv_1^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = \mathfrak{S}F_1,$

— — t_2 $\quad \frac{1}{2} Mv_2^2 - \frac{1}{2} Mv_1^2 = \mathfrak{S}F_2,$

. . . . = . .

— — t_n $\quad \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} M_{n-1}v^2 = \mathfrak{S}F_n.$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathfrak{G}F_1 + \mathfrak{G}F_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{G}F_n.$$

Cette équation subsistant quelque petits que soient les éléments en lesquels on divise le temps t, elle est, par suite, applicable au cas d'une force variant d'une manière continue. Donc, *pour une force variable*, comme pour une force constante, *la variation de puissance vive est égale au travail de la force dans le même temps.*

465. 4° Cas de plusieurs forces simultanées.—Nous savons que toutes les forces agissant sur un point matériel peuvent se composer en une résultante R dont le travail élémentaire est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes. En posant, comme ci-dessus, les équations pour les différents éléments de temps et en les additionnant membre à membre, on aura

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathfrak{G}R = \Sigma\mathfrak{G}F.$$

La variation de puissance vive est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces.

466. Cas général du principe de l'effet du travail. — Considérons enfin le cas général d'un système quelconque de points matériels se mouvant d'une manière quelconque dans l'espace et soumis à un nombre quelconque de forces. Nous avons déjà dit que chacun des points matériels composant le système, peut être considéré comme entièrement libre si l'on a égard à toutes les forces intérieures qui agissent sur lui. Soit R,R′,R″.... les résultantes des forces intérieures et extérieures qui agissent sur chacun des points matériels de masse m, m', m''...., v et v_0, v' et v'_0, v'' et v''_0 .... les vitesses initiale et finale de chacun d'eux ; nous aurons, pour ces différents points matériels :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathfrak{G}R,$$
$$\frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2}m'v'^2_0 = \mathfrak{G}R',$$
$$\ldots\ldots\ldots = \ldots$$

Si l'on fait la somme de toutes ces équations, le premier membre représentera la somme de toutes les puissances vives finales, di-

minuée de toutes les puissances vives initiales, c'est-à-dire la variation de la force vive du système, et le deuxième membre représentera la somme des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures qui agissent sur le système.

Pour exprimer facilement cette relation qui sert de base à la théorie des machines, on a adopté la notation suivante :

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{T}F + \Sigma \mathfrak{T}f,$$

ce qui s'énonce en disant que *la somme algébrique des puissances vives finales, diminuée de la somme algébrique des puissances vives initiales, est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures, augmentée de la somme algébrique des travaux des forces intérieures.*

§ 3. — PRINCIPE DE LA TRANSMISSION DU TRAVAIL DANS LES MACHINES

467. Des machines. — Nous avons déjà défini, en Statique, ce que l'on entend par machine. Nous pouvons dire ici d'une manière plus générale qu'*une machine est un corps ou un assemblage de corps destinés à transmettre le travail des forces.* L'emploi d'une machine a donc pour but, non-seulement de vaincre des résistances ou de mettre des forces en équilibre, mais encore à faire parcourir un certain chemin au point d'application de ces forces.

Dans les machines, même dans celles qui nous paraissent le plus compliquées, tous les organes qui les composent peuvent se grouper en 5 classes différentes : 1° le *récepteur ;* cet organe principal de la machine reçoit directement l'action du moteur; 2° les *organes de transmission* dont nous avons étudié les principaux en Cinématique, et qui servent à transformer le mouvement suivant les besoins; 3° les *organes de communication* ou *d'arrêt* qui servent à établir et à interrompre le mouvement; 4° les *régulateurs* ou *modérateurs* qui servent à maintenir la vitesse normale de la machine dans des limites qu'elle ne doit pas dépasser, et 5° l'*opérateur* ou *outil* destiné à produire l'ouvrage qu'on se propose.

468. Application du principe de l'effet du travail aux

machines. — Pour appliquer le principe de l'effet du travail, rappelons que les forces agissant sur une machine sont de deux sortes : 1° les *forces motrices* ou *puissances* dont le travail est positif, et 2° les *forces retardatrices* ou *résistances* dont le travail est négatif. La somme des travaux développés pendant un temps quelconque par toutes les forces motrices appliquées à la machine, s'appelle le *travail moteur*, et la somme des travaux développés pendant le même temps par toutes les forces résistantes, prises avec leur valeur absolue, prend le nom de *travail résistant*.

Désignons par $\mathcal{T}_m$ le travail moteur et par $\mathcal{T}_r$ le travail résistant développés pendant le temps *t*. La somme des travaux dus à toutes les forces qui agissent sur la machine pendant le temps considéré, sera $\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r$ et nous aurons, en appliquant le cas général du principe de l'effet du travail,

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r. \quad (1)$$

Cette équation nous montre que *la variation de puissance vive de la machine pendant un temps quelconque* t, *est égale à la différence entre le travail moteur et le travail résistant développés pendant le même temps.*

469. Transmission du travail dans les machines. — 1° Machines à l'état de mouvement uniforme. — Lorsque le mouvement d'une machine est uniforme, les vitesses de toutes les pièces restent constantes quelle que soit la durée *t* du temps considéré, et la variation de puissance vive est nulle ; le premier membre de l'équation (1) est égal à 0 et il vient

$$\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_m.$$

Le travail résistant est constamment égal au travail moteur.

470. 2° Machines à l'état de mouvement périodique. — Le mouvement d'une machine est rarement uniforme ; généralement, ce mouvement est uniformément périodique, c'est-à-dire tel que les différentes pièces de la machine passent par les mêmes valeurs au bout de chacune des périodes d'égale durée. Si l'on prend pour le temps *t* considéré la durée d'une de ces périodes, il est évident que les vitesses étant égales au commencement et à la fin de cha-



cune d'elles, la variation de puissance vive est nulle et l'équation (1) donne

$$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_m$$

pour la durée d'une période, et, par conséquent, pour la durée de la marche de la machine, composée d'un nombre quelconque de périodes.

411. 3° Machines à l'état de mouvement quelconque.—Lorsque le mouvement de la machine est tout à fait quelconque, l'égalité entre le travail moteur et le travail résistant n'existe plus pour un temps quelconque, ni même pour des périodes déterminées. Mais si l'on considère le temps total de la marche de la machine, c'est-à-dire depuis l'instant où elle se met en mouvement jusqu'à l'instant où elle redevient au repos, la vitesse étant égale à 0 au commencement et à la fin de la marche, le premier membre de l'équation (1) est annulé, et on a encore

$$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_m$$

Ainsi donc, *quel que soit le mouvement d'une machine, le travail moteur développé, pendant tout le temps qu'elle est en marche, est égal au travail résistant pendant le même temps.*

Remarque. — Reprenons le cas le plus général d'une machine à l'état de mouvement périodique. La marche de cette machine peut se diviser en 3 périodes : 1° *mise en train de la machine*; 2° *marche normale* et 3° *arrêt de la machine*. Nous venons de démontrer que pendant la deuxième période, il y a égalité entre le travail moteur et le travail résistant. Les équations de la transmission du travail qui correspondent aux première et troisième périodes, sont

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r; \quad -\Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mathfrak{T}_r.$$

En effet, pour la première période, les vitesses initiales des différentes parties sont nulles, et le terme $\Sigma \frac{1}{2} mv^2_0$ est égal à 0.

Pendant la troisième période, les forces motrices n'agissent plus sur la machine, et son mouvement se ralentit jusqu'à ce que les vitesses finales soient nulles; par suite, les termes $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$ et $\mathfrak{T}_m$ sont égaux à 0.

On voit que, pendant la première période, la différence entre le

travail moteur et le travail résistant est égale à la puissance vive acquise par la machine, et si nous remarquons que les vitesses initiales de la troisième période sont précisément égales aux vitesses finales de la première, on peut dire que l'*excès du travail moteur dépensé pour mettre la machine en train, est juste égal au travail résistant que cette machine accomplit sans dépense de travail moteur pour revenir au repos*. C'est ce qui fait dire encore que la machine *emmagasine*, sous forme de puissance vive, l'excès du travail moteur, lorsqu'il se produit, pour le restituer ensuite lorsqu'il fait défaut.

472. Équation du travail. — Ce qui précède nous montre qu'une machine, quelle qu'elle soit, transmet intégralement la quantité de travail qui lui est appliquée; mais il ne faut pas oublier que pour arriver à ce résultat, on doit tenir compte, dans l'évaluation du travail résistant, de toutes les forces intérieures et extérieures qui tendent à s'opposer au mouvement de la machine. Or ces forces extérieures sont de deux sortes : 1° les *résistances utiles*, c'est-à-dire celles qu'on applique à la machine en vue de l'ouvrage qu'elle doit produire, et 2° les *résistances passives*, c'est-à-dire celles qui se développent entre les diverses parties de la machine, par suite de son mouvement, telles que les frottements, les chocs, les vibrations. Ces résistances, qui n'ont rien de commun avec le travail qu'on se propose de produire, outre qu'elles absorbent une partie parfois considérable du travail moteur, détériorent la machine et nuisent à sa marche, car cette partie du travail, ne pouvant pas être perdue, est uniquement employée à échauffer et user les organes et à produire des vibrations qui, se transmettant aux supports, gênent le travail de l'outil.

Soit $\mathfrak{T}_u$ le travail dû aux résistances utiles et $\mathfrak{T}_f$ le travail dû aux résistances passives : nous aurons

$$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_u + \mathfrak{T}_f.$$

En remplaçant $\mathfrak{T}_r$ par sa valeur dans l'équation (1), il vient :

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_u - \mathfrak{T}_f;$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{T}_u = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_f - \left(\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv^2 \right),$$

et comme nous avons vu qu'en considérant un intervalle de temps suffisamment grand, la variation de puissance vive est nulle dans tous les cas, cette équation devient

$$\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_f, \qquad (2)$$

ce qui montre que *le travail utile est plus petit que le travail moteur*, puisque, quelque parfaite que soit la machine, le terme $\mathcal{T}_f$ n'est jamais nul.

473. Rendement d'une machine. — On appelle *coefficient d'effet utile* ou *rendement d'une machine*, le rapport du travail utilisé par cette machine, au travail moteur qui lui a été fourni; ce rapport est toujours inférieur à l'unité. En effet, de l'équation (2) on tire, en divisant par $\mathcal{T}_m$,

$$\frac{\mathcal{T}_u}{\mathcal{T}_m} = 1 - \frac{\mathcal{T}_f}{\mathcal{T}_m}.$$

Le rendement d'une machine est d'autant plus grand que les résistances passives sont plus faibles ; il constitue la valeur industrielle d'une machine. Les meilleures machines donnent un rendement qui varie entre 0,60 et 0,80.

474. Impossibilité du mouvement perpétuel. — La recherche du mouvement perpétuel consiste à trouver une machine qui, une fois mise en mouvement, continuerait indéfiniment à se mouvoir en produisant constamment un travail utile. Pour se convaincre de l'impossibilité de la réalisation d'une pareille machine, il suffit de se rappeler l'équation

$$\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_f,$$

qui prouve que le travail utile est toujours plus petit que le travail moteur, en raison des résistances passives qui se développent par suite du mouvement même de la machine. Quelque parfait que soit le mécanisme, on ne parviendra jamais à annuler le travail résistant, et le travail moteur étant nul, le mouvement ne pourra pas rester uniforme ; la machine finira donc par s'arrêter forcément au bout d'un temps plus ou moins long, lors même qu'on ne lui fera produire aucun travail utile.

CHAPITRE III

§ 1. — RÉSISTANCES PASSIVES

475. On appelle *résistances passives* les réactions qui, s'opposant au mouvement des machines, absorbent une certaine quantité de force motrice. Ces réactions sont de quatre espèces différentes :

1° *Frottement de glissement* ou simplement *frottement ;*

2° *Frottement de roulement;*

3° *Raideur des cordes ;*

4° *Résistance des milieux.*

476. Frottement de glissement. — Lorsqu'on veut faire glisser un corps sur une surface plane et horizontale, l'expérience prouve qu'il faut exercer un certain effort pour le mettre en mouvement, et que, pour entretenir ce mouvement, il faut qu'il soit constamment soumis à l'action d'une force. La résistance qu'oppose ainsi le corps au glissement s'appelle *frottement,* et la force employée à le vaincre mesure son intensité. Le frottement provient seul de la constitution physique des corps ; ceux-ci n'étant jamais parfaitement polis et indéformables, il s'ensuit que les aspérités de l'un des corps s'engagent dans les aspérités de l'autre et que le corps glissant produit, en vertu de la pression, une déformation de la surface sur laquelle il repose, variant avec le degré de compressibilité de cette dernière.

477. Énoncé et démonstration expérimentale des lois du frottement. — Les expériences sur le frottement ont été faites, pour la première fois, en 1699, par Amontons. Elles furent reprises en 1781 par Coulomb qui en posa les lois, et les résultats auxquels il est parvenu ont été vérifiés, de 1831 à 1834, par M. Morin. On a reconnu que

1° *Le frottement est, pour certains corps, plus grand au départ que pendant le mouvement ;*

2° *Le frottement au départ et le frottement pendant le mouvement sont proportionnels à la pression normale et indépendants de l'étendue des surfaces en contact ;*

3° *Ils varient avec la nature des corps, leur degré de poli, la nature des enduits interposés, la qualité et l'état d'entretien de ces enduits ;*

4° *Le frottement, pendant le mouvement, est indépendant de la vitesse.*

478. Frottement au départ. — Pour déterminer les lois du frottement au départ, Coulomb se servit de l'appareil représenté par la figure 240. Sur deux madriers horizontaux B situés paral-

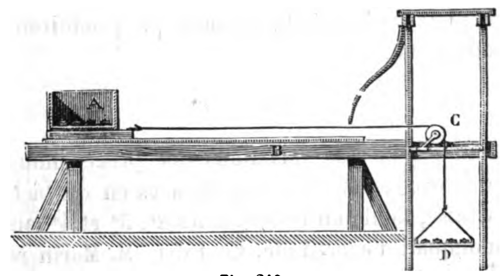


Fig. 240.

lèlement, et à peu de distance l'un de l'autre, peut glisser une caisse A que l'on charge de poids. Une corde, fixée au chariot, passe sur une poulie de renvoi C et supporte un plateau D. La caisse étant chargée, on met sur le plateau D un certain nombre de poids pour que le mouvement ait lieu. La somme des poids disposés sur le plateau, augmentée du poids de ce plateau, exprime l'effort à vaincre pour mettre la caisse en mouvement, effort qui donne exactement la valeur du frottement au départ.

Ce même appareil sert pour toutes les expériences en modifiant : 1° la charge de la caisse ; 2° la nature et la disposition des fibres des surfaces frottantes, en fixant sous la caisse et sur les madriers, des règles de diverses matières, et 3° l'étendue des surfaces en contact en augmentant ou en diminuant la largeur de ces règles.

479. Frottement pendant le mouvement. — Pour déterminer les lois du frottement pendant le mouvement, Coulomb observait le mouvement de la caisse et notait les temps employés par celle-ci pour parcourir des espaces déterminés ; en comparant les chemins parcourus aux temps correspondants, il reconnut que les espaces étaient sensiblement proportionnels aux carrés des temps, c'est-à-dire que le mouvement de la caisse était uniformément accéléré. Il remarqua ensuite que l'accélération de ce mouvement était moindre que celle que devait produire le poids du plateau augmenté de sa charge; il conclut de là qu'une partie de cette force constante était constamment absorbée pendant le mouvement, par la résistance opposée par les corps en contact à glisser l'un sur l'autre. La valeur de cette résistance, qui mesure le frottement F, se déterminera facilement, car on a, en appelant P le poids du plateau chargé et p la force qui produirait l'accélération du mouvement,

$$F = P - p.$$

En opérant les mêmes variations que précédemment dans la charge, la nature et l'étendue des surfaces en contact, et en modifiant la vitesse, Coulomb reconnut les 2e, 3e et 4e lois ; mais son procédé manquait d'exactitude. En 1831, M. Morin reprit les expériences en se basant sur la méthode déjà employée, et il vérifia rigoureusement les lois du frottement en se servant d'un appareil à indications continues, enregistrant directement le mouvement de la caisse.

480. Coefficient de frottement. — On appelle *coefficient de frottement* le rapport du frottement à la pression normale. Ce rapport, constant pour un même corps, se désigne par la lettre f, et l'on a :

$$f = \frac{F}{N},$$

F étant la valeur du frottement et N la pression normale.

Le tableau suivant, pris dans la *Mécanique* de Delaunay, donne, pour des corps de diverses natures, le coefficient de frottement. Connaissant ce coefficient et la pression N, on en déduit facilement le frottement total, et réciproquement.

INDICATION DES SURFACES EN CONTACT.	COEFFICIENT DE FROTTEMENT	
	AU DÉPART.	PENDANT LE MOUVEMENT
Bois sur bois, sans enduit,. . . . . . . moyennement.	0.50	0.36
Bois sur bois, avec enduit de savon sec, — . .	0.36	0.14
Bois sur bois avec enduit de suif. . . . — . .	0.19	0.07
Bois sur métaux, sans enduit. . . . . . — . .	0.60	0.42
Bois sur métaux, avec enduit de suif. . — . .	0.12	0.08
Courroie sur bois, sans enduit. . . . . — . . .	0.63	0.5
Courroie sur bois, mouillée d'eau.. . . — . .	0.87	0.33
Métaux sur métaux, sans enduit.. . . . — . .	0.18	0.18
— avec enduit d'huile d'olive. — . .	0.12	0.07

Remarque I.— Lorsque les corps sont durs comme le fer, l'acier, le frottement au départ est sensiblement le même que pendant le mouvement; mais, pour les corps compressibles, ou dont l'un est compressible, la valeur du frottement au départ varie avec la durée du contact. Il en est de même pour les corps dont les enduits, primitivement interposés, ont été expulsés par une cause quelconque.

Remarque II. — Le coefficient de frottement des corps varie avec leur degré de poli, la nature des enduits interposés et leur état d'entretien.

Dans les machines il faut, pour atténuer les frottements, que les surfaces en contact soient bien polies, ce qui n'arrive qu'après quelque temps de marche, et qu'elles soient convenablement graissées; lorsque ces deux conditions sont remplies, on atténue sensiblement les frottements.

L'interposition des enduits, entre les pièces frottantes, est d'une grande importance dans les machines, et les appareils imaginés à cet effet sont très-nombreux et très-variés; en général, on emploie, pour les grosses pièces des machines, des enduits ayant une certaine consistance, tels que le suif, le saindoux, les graisses, et pour les pièces légères, on emploie des huiles. Dans tous les cas, ces enduits doivent être entretenus avec soin et souvent renouvelés; ils ne doivent pas acquérir une trop grande adhérence avec

les pièces frottantes, car, dans ce cas, ils augmenteraient le frottement.

L'eau est quelquefois employée pour lubrifier certaines substances ; mais elle doit être rejetée pour les métaux. L'eau de savon sert pour empêcher l'élévation de température des pièces soumises à un grand frottement, comme dans les expériences au frein de Prony, et dans les machines à forer les métaux.

481. Frottement des tourillons. — Les expériences faites par M. Morin, ont démontré que le frottement des tourillons, sur leurs coussinets, est soumis aux mêmes lois que le frottement de glissement. Des tableaux indiquent le coefficient de frottement suivant la nature des tourillons, de leurs coussinets, et des enduits employés.

482. Frottement de roulement. — Lorsqu'on veut faire rouler un corps de forme cylindrique sur une surface plane et horizontale, il faut exercer un certain effort pour le mettre en mouvement, et pour entretenir ce mouvement, il faut qu'il soit soumis constamment à l'action d'une force. La résistance qu'oppose ainsi le corps est appelée *frottement de roulement*, et elle est dirigée en sens inverse du mouvement. Cette résistance provient seule de la compression des corps à leurs points de contact.

Les expériences faites sur le frottement de roulement, par Coulomb et par M. Morin, ont démontré que cette résistance R est proportionnelle à la pression P et en raison inverse du diamètre D des corps, la charge étant supposée appliquée au centre de ce corps. Ainsi, f étant le coefficient de frottement, on aura

$$R = f \times \frac{P}{D}.$$

La valeur de f dépend de la nature du corps et de l'état d'entretien de la surface sur laquelle il roule. Sur une route bien entretenue, f est égal à 0,03 pour les voitures ordinaires, et sur les voies ferrées cette valeur s'abaisse à 0,005.

Il résulte des expériences de M. Morin que le frottement de roulement varie avec la hauteur des cylindres roulants.

La valeur du frottement de roulement est bien inférieure à celle du frottement de glissement ; aussi cette première résistance est-elle souvent négligée dans le calcul des machines, et on la sub-

stitue, autant qu'on le peut, au frottement de glissement qui est quelquefois très-considérable.

483. Applications utiles du frottement. — Jusqu'ici, nous avons présenté le frottement comme ayant, dans les machines, une influence nuisible que l'on doit atténuer par tous les moyens possibles, pour obtenir le maximum d'effet utile. Mais cette résistance reçoit aussi des applications très-utiles que nous devons faire connaître.

484. Freins. — Les *freins* sont des appareils qui servent à ralentir et même à arrêter le mouvement des voitures et des wagons, en augmentant le frottement. Ils se composent généralement de deux pièces de bois que l'on oblige à s'appuyer fortement contre les jantes des roues. La figure 241 représente le frein d'un wagon. Les deux pièces de bois qui embrassent une partie de la

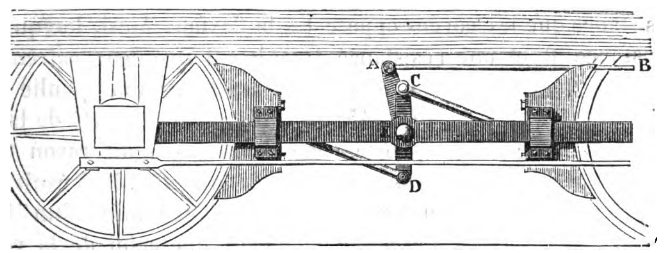


Fig. 241.

jante des roues, sont fixées aux extrémités de deux barres articulées en C et D avec un levier CD calé sur l'axe E ; celui-ci porte un autre bras de levier EA auquel est articulée une tringle AB. En agissant sur cette tringle pour l'amener vers la droite, le levier CD tournera dans le même sens, et, par suite, les morceaux de bois viendront presser fortement les roues.

Dans les machines destinées à l'élévation des matériaux, comme les grues, on emploie un frein, appelé *frein à ruban,* qui a pour but de ralentir le mouvement de l'appareil lorsqu'on fait descendre un fardeau. Il se compose d'une lame flexible de tôle entourant une poulie et dont les extrémités sont fixées à une pièce BC (*fig.* 242) ; cette pièce fait partie d'un levier AD mobile autour du point A. En soulevant l'extrémité D du levier, on applique fortement la lame contre la jante de la poulie et on détermine ainsi un

frottement considérable qui ralentit la vitesse de l'appareil. Sur la figure 151, le frein est adapté à gauche de la roue F.

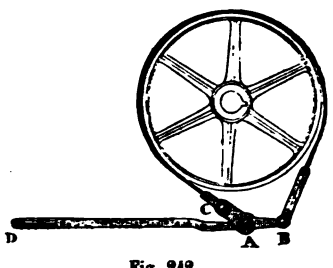
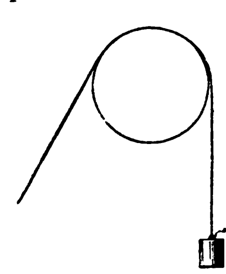


Fig. 242.

Le frottement est aussi employé utilement dans le frein de Prony, à la recherche du travail des machines motrices.

485. Nous avons déjà fait voir, en parlant du mouvement du centre de gravité, que les êtres animés ne se meuvent qu'en vertu des résistances qu'ils développent en appuyant leurs pieds sur le sol. La marche des animaux nous offre donc un nouvel exemple de l'emploi utile du frottement.

486. Raideur des cordes. — On appelle *raideur des cordes* la résistance que les cordes opposent à la flexion. Ainsi, lorsqu'une puissance P et une résistance Q agissent aux deux extrémités d'une corde passant sur une poulie fixe (*fig.* 243), la corde prend, du côté de la résistance, une courbure d'un rayon plus grand que celui de la poulie. Il s'ensuit que la puissance agit à l'extrémité d'un bras de levier plus petit que celui de la résistance, et pour vaincre cette dernière, la force P, qui devrait être égale à Q, doit être augmentée d'une certaine valeur ; cet accroissement qui n'aurait pas lieu si la corde était complétement flexible, en mesure la raideur.


Fig. 243.

Les expériences faites par Coulomb l'ont conduit à admettre que la raideur des cordes se compose de deux parties : 1° la raideur naturelle qui est indépendante de la charge, et 2° la raideur proportionnelle qui varie en raison directe de la charge et en raison inverse du diamètre de la poulie. D'après cela, la raideur sera exprimée par la formule suivante :

$$R = \frac{a + bQ}{D}.$$

Q étant la charge, D le diamètre de la poulie, *a* et *b* deux coeffi-

cients déterminés par l'expérience. Ces coefficients varient avec le diamètre et la nature des cordes, et suivant qu'elles sont neuves ou usées, blanches ou goudronnées, sèches ou mouillées.

487. Résistance des milieux.—C'est la résistance qu'opposent les fluides au mouvement des machines ; elle a pour naissance les déplacements des molécules du fluide dans lequel ces machines se meuvent, déplacement qui absorbe une certaine fraction de la force motrice. Cette résistance varie avec la forme du corps ; elle est proportionnelle : 1° *au carré de la vitesse ;* 2° *à la plus grande section faite perpendiculairement à la direction du mouvement*, et 3° *au poids spécifique du fluide.*

La résistance opposée par l'eau, au mouvement des corps, est beaucoup plus grande que celle exercée par l'air ; néanmoins cette dernière devient assez forte lorsque le corps ou le fluide est animé d'une très-grande vitesse.

La résistance des milieux reçoit également des applications utiles ; c'est la résistance de l'eau qui permet le mouvement et la direction des embarcations en servant de point d'appui aux propulseurs, rames, roues et aux gouvernails. C'est la résistance de l'air qui sert de point d'appui aux ailes des oiseaux ; elle est encore utilisée dans les régulateurs à ailettes employés pour régulariser certains mouvements.

§ 2. — CHOC DES CORPS

488. On appelle *choc* le phénomène qui se produit lorsque deux corps animés de mouvements différents, viennent à se rencontrer brusquement.

Tous les corps possèdent, à divers degrés, les propriétés physiques d'élasticité et de compressibilité ; mais nous admettrons, dans l'étude du choc, deux hypothèses : 1° les corps sont complétement dénués d'élasticité ; 2° les corps sont complétement élastiques. Nous supposerons en outre que les corps sont de forme sphérique et qu'ils se meuvent d'un mouvement rectiligne et uniforme suivant la ligne droite qui unit leurs centres de figure.

489. Choc des corps mous. — Soit A et B (*fig.* 244) les

deux solides considérés de masse M et M′, se mouvant suivant la ligne des centres CD, v la vitesse du corps A, et v' plus petite que v, celle du corps B, dirigée dans le même sens: A l'instant où les deux solides arrivent en contact, le corps A tend à imprimer instantanément sa vitesse au corps B; il y a donc compression des molécules voisines du point de contact, et par suite déformation des corps aux environs de ce point. Sous l'influence des forces moléculaires ainsi développées, la vitesse v diminue, la vitesse v' augmente et, au bout d'un temps très-petit, les corps A et B cheminent en contact avec une vitesse commune u. Si les corps sont complétement dénués d'élasticité, comme nous l'avons supposé, la déformation ne cesse qu'au moment où les vitesses deviennent égales, et ces corps ne reviennent point à leur forme primitive.

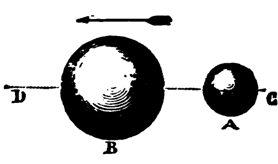


Fig. 244.

490. Détermination de la vitesse commune u. — 1° *Les corps vont dans le même sens.* Nous avons démontré (446) que les forces intérieures n'influent pas sur la variation de quantité de mouvement, et comme les corps ne se meuvent qu'en vertu de leurs vitesses initiales, c'est-à-dire sans être soumis à une force extérieure, il en résulte que la somme des quantités de mouvement avant et après le choc n'a pas changé; on aura donc

$$Mv + M'v' = (M + M')\,u;$$

$$\text{d'où} \qquad u = \frac{Mv + M'v'}{M + M'}$$

$$\text{Si } M = M', \text{ il vient } u = \frac{v + v'}{2}.$$

La masse M étant infiniment grande par rapport à M′, on aura sensiblement $u = v$, et si le contraire a lieu, on aura $u = v'$.

491. 2° *Les corps vont en sens contraire.* Il suffira, pour déterminer la vitesse commune, de prendre avec le signe — la vitesse v' dirigée en sens contraire des vitesses positives et l'on aura

$$u = \frac{Mv - M'v'}{M + M'}.$$

Le mouvement des corps aura lieu, après le choc, dans le sens

du corps qui, avant le choc, possédait la plus grande quantité de mouvement.

$$\text{Si } M = M', \text{ il vient } u = \frac{v - v'}{2}.$$

La masse M étant infiniment grande par rapport à M', on aura sensiblement $u = v$, et si le contraire a lieu, on aura $u = -v'$.

492. 3° *L'un des deux corps est au repos.* Le corps B étant au repos, on aura

$$u = \frac{Mv}{M + M'}.$$

$$\text{Si } M = M', \text{ il vient } u = \frac{v}{2}.$$

La masse M du corps choquant étant infiniment grande par rapport à M', on aura $u = v$.

La masse M' du corps choqué étant infiniment grande par rapport au corps choquant, on aura $u = o$. Exemple : Une balle de plomb tombant librement sur le sol.

493. Choc des corps élastiques. — Le choc des corps élastiques comporte deux périodes distinctes : 1° la période de *compression*, comme dans le choc des corps mous, et 2° la période pendant laquelle les corps, en raison de leur parfaite élasticité, reviennent à leur forme primitive. Au bout de la première période où les corps ont atteint leur maximum de compression, la vitesse du corps A a diminué de $v - u$ et celle du corps B a augmenté de $u - v'$; mais pendant la deuxième période, les réactions moléculaires qui ramènent les corps à leur forme primitive, produisent des variations de vitesse égales aux précédentes, de sorte que les vitesses w et w' des corps A et B, après le choc, sont données par les formules

$$w = v - 2(v - u) = 2u - v, \quad (1)$$
$$w' = v' + 2(u - v') = 2u - v'. \quad (2)$$

En retranchant membre à membre, il vient

$$w - w' = -(v - v'),$$

c'est-à-dire que *la vitesse relative des deux corps après le choc est égale, en grandeur absolue, à leur vitesse relative avant le choc, mais elle est de signe contraire.*

En remplaçant u par sa valeur $\frac{Mv + M'v'}{M + M'}$ dans les équations (1) et (2), on aura

$$w = \frac{2(Mv + M'v')}{M + M'} - v = \frac{Mv + 2M'v' - M'v}{M + M'}, \qquad (3)$$

$$w = \frac{2(Mv + M'v')}{M + M'} - v' = \frac{2Mv + M'v' - Mv'}{M + M'}. \qquad (4)$$

494. Détermination de la vitesse des corps après le choc. — 1° *Les corps vont dans le même sens.*

Les vitesses des corps A et B sont, comme nous venons de le prouver,

$$w = 2u - v \quad \text{et} \quad w' = 2u - v'.$$

Si $M = M'$, on a $u = \frac{v + v'}{2}$,

et par suite $w = v + v' - v = v'$ et $w' = v + v' - v' = v$.

Les corps échangent leurs vitesses.

La masse M étant infiniment grande par rapport à M', on a $u = v'$, et par suite

$$w = 2v - v \quad \text{et} \quad w' = 2v - v'.$$

La vitesse du corps choquant n'est pas changée, tandis que le corps choqué part avec une vitesse égale au double de celle du corps choquant, diminué de sa vitesse primitive.

La masse M' étant infiniment grande par rapport à M, on a $u = v'$, et par suite

$$w = 2v' - v \quad \text{et} \quad w' = v'.$$

La vitesse du corps choqué n'est pas changée, tandis que le corps choquant part avec une vitesse égale ou double de celle du corps choqué, diminué de sa vitesse primitive; ce dernier continue son chemin dans le même sens, s'arrête ou revient en sens contraire, suivant que sa vitesse primitive est plus petite, égale ou plus grande que le double de celle du corps choquant.

495. 2° *Les corps vont en sens contraire.* Le corps B marchant en sens contraire du corps A, il suffira de changer le signe de la



vitesse v' et l'on aura

$$w=2u-v \quad \text{et} \quad w'=2u+v'.$$

Si $M=M'$, on a $u=\frac{v-v'}{2}$,

et par suite $w=v-v'-v=-v'$ et $w'=v-v'+v'=v$

Les corps retournent en arrière en échangeant leurs vitesses.

La masse M étant infiniment grande, par rapport à M', on a $u=v$; par suite

$$w=2v-v=v \quad \text{et} \quad w'=2v+v'.$$

La vitesse du corps choquant n'est pas changée, tandis que le corps choqué retourne en arrière avec sa vitesse primitive augmentée du double de celle du corps choquant.

La masse M' étant infiniment grande par rapport à M, on a $u=-v'$, et par suite

$$w=-2v'-v=-(2v'+v) \quad \text{et} \quad w'=-v'.$$

La vitesse du corps choqué n'est pas changée, tandis que le corps choquant retourne en arrière avec une vitesse égale à sa vitesse primitive augmentée du double de celle du corps choqué.

496. 3° *L'un des deux corps est au repos.* Si le corps B est au repos, la vitesse du corps A, après le choc, sera évidemment $2u-v$ et celle du corps choqué $2u$.

Si $M=M'$, on a $u=\frac{v}{2}$,

et par suite $w=v-v=0$ et $w'=v$.

Le corps choquant s'arrête et le corps choqué part avec la vitesse de la masse M. Exemple : Une bille de billard, lancée suivant la ligne des centres, contre une bille au repos.

La masse M étant infiniment grande par rapport à M', on a $u=v$; par suite

$$w=v \quad \text{et} \quad w'=2v.$$

Le corps choqué part avec une vitesse double de celle du corps choquant.

La masse M′ étant infiniment grande par rapport à M, on a $u=0$, et par suite

$$w=-v \quad \text{et} \quad w'=0.$$

Le corps choquant revient en arrière avec sa propre vitesse. Exemple : Une bille d'ivoire tombant sur une table de marbre.

497. Perte de travail dans le choc des corps. — 1° Cas des corps mous. — La déformation produite dans le choc des corps mous détermine une perte de puissance vive qui est absorbée par les forces moléculaires ; nous allons déterminer cette perte.

Théorème de Carnot. — **La perte de puissance vive est égale à la somme des forces vives correspondant aux vitesses perdues ou gagnées par les deux corps.** — 1° *Les corps vont dans le même sens.*

La force vive possédée par le corps, avant le choc, est $Mv^2 - M'v'^2$, et celle possédée après le choc est $(M+M')\,u^2$; donc la perte de force vive est égale à $Mv^2 + M'v'^2 - (M+M')\,u^2$. D'après l'énoncé, cette perte de puissance vive est exprimée par

$$M(v-u)^2 + M'(u-v')^2.$$

Il s'agit donc de démontrer que l'on a

$$Mv^2 + M'v'^2 - (M+M')\,u^2 = M(v-u)^2 + M'(u-v')^2.$$

En effet, remplaçons u par sa valeur $\dfrac{Mv+M'v'}{M+M'}$; il vient

$$Mv^2 + M'v'^2 - (M+M')\left(\frac{Mv+M'v'}{M+M'}\right)^2 = M\left(v-\frac{Mv+M'v'}{M+M'}\right)^2 + \\ + M'\left(\frac{Mv+M'v'}{M+M'} - v'\right)^2.$$

Pour simplifier cette équation, prenons séparément chacun des deux membres ; le premier devient, en réduisant au même dénominateur et mettant MM′ en facteur commun,

$$\frac{MM'(v^2+v'^2-2vv')}{M+M'} = \frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}.$$

Le second membre devient successivement

$$M\left(\frac{M'(v-v')}{M+M'}\right)^2+M'\left(\frac{M(v-v')}{M+M'}\right)^2=\frac{MM'^2(v-v')^2}{(M+M')^2}+\frac{M'M^2(v-v')^2}{(M+M')^2}=$$
$$=\left(\frac{v-v'}{M+M'}\right)^2(MM'^2+M^2M')=\left(\frac{v-v'}{M+M'}\right)^2(M+M')(MM')=\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}.$$

Donc, en définitive,

$$\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}=\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}.$$

2° *Les corps vont en sens contraire.* La perte de puissance sera exprimée, en opérant comme précédemment, par l'expression

$$\frac{MM'(v+v')^2}{M+M'}.$$

3° *L'un des corps est au repos.* Dans ce cas, l'expression de la force vive perdue est donnée par l'équation

$$\frac{MM'\times v^2}{M+M'}.$$

Remarque. — Quel que soit le cas considéré, il y a toujours une perte de travail dans le choc des corps mous, et toutes choses égales d'ailleurs, la perte maximum est relative au cas où les corps sont animés de vitesses de sens contraire.

498. Cas des corps élastiques. — Pendant la première période du choc des corps élastiques, ceux-ci absorbent, comme dans le choc des corps mous, une certaine quantité de force vive déterminée par leur déformation; mais, pendant la deuxième période, ils restituent intégralement, pour revenir à leur forme primitive, toute la force vive qu'ils avaient précédemment absorbée pour se comprimer. Ainsi, dans le choc des corps parfaitement élastiques, la force vive perdue est complétement nulle.

499. Conséquences. — Les corps qui sont employés dans l'industrie pour la construction des machines, n'étant pas d'une élasticité parfaite, ils se déforment lentement s'ils sont soumis à des chocs réitérés; par suite, leur élasticité s'altère, et il y a une plus ou moins grande perte de travail. En outre, les chocs donnent naissance à des ébranlements, des vibrations qui, se transmettant aux pièces voisines, absorbent encore une partie de la

force vive initiale, détériorent les organes et altèrent leur stabilité.

Les chocs doivent donc être évités avec soin dans les machines et, pour cela, les organes qui les composent doivent se communiquer le mouvement sans variation brusque de vitesse.

Si le choc ne peut être évité, on en diminue l'intensité par l'interposition de ressorts élastiques (ressorts de suspension, tampons de choc), comme dans les voitures et les wagons.

Les corps destinés à recevoir l'action des chocs violents, tels que les enclumes ordinaires et celles des marteaux-pilons, ne reposent pas directement sur le sol ; on les place sur de gros blocs de bois et sur des planchers très-élastiques, afin de rendre presque insensible la vitesse qui leur est communiquée par l'effet du choc.

Le choc est un moyen d'action employé pour exercer de grands efforts ; ainsi, on agit par percussion dans le battage des pieux, dans les travaux de forge, etc.

COMPLÉMENT

§ 1. — FORCE CENTRIFUGE

500. La *force centrifuge* joue un rôle très-important dans toutes les machines animées d'un mouvement de rotation ; c'est elle qui, parfois, fait éclater les meules et en projette au loin les débris ; c'est elle encore qui renverse les voitures au tournant des routes, etc. Pour bien définir cette force, considérons un mobile A (*fig.* 245) attaché à l'extrémité d'un fil inextensible, fixé lui-même au point B, et parcourant, d'un mouvement uniforme, une circonférence de rayon AB. Pour une position quelconque A du mobile, sur sa trajectoire, la direction de la vitesse en ce point étant celle de la tangente AC, si le mobile n'était soumis à l'action d'aucune force, il se mouvrait, en vertu du principe de l'inertie, d'un mouvement rectiligne et uniforme suivant cette tangente. Cette tendance du corps à se mouvoir en ligne droite produit une tension du fil qui, ne pouvant pas s'allonger, maintient le mobile à une distance constante du point B ; le fil joue donc, dans ce cas, le rôle d'une action ou force dirigée constamment vers le centre ; cette action a reçu le nom de *force centripète*. Toute action donnant inévitablement naissance à une réaction égale et contraire, il s'ensuit que le mobile réagit avec une force égale à la tension du fil et dirigée suivant le prolongement du rayon.

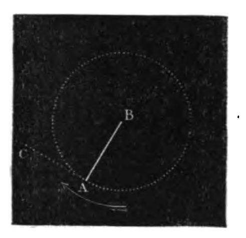


Fig. 245.

501. Définition de la force centrifuge. — On appelle *force centrifuge* la réaction dont nous venons de parler, exercée par tout corps assujetti à se mouvoir sur une trajectoire curviligne, et qui tend à l'éloigner du centre de courbure.

La force centrifuge est égale et directement opposée à la force centripète ; l'existence de l'une est forcément liée à celle de l'autre, mais elles ne sont jamais appliquées au même point matériel. Ainsi, dans la fronde que tout le monde connaît, la main exerce sur la pierre, par l'intermédiaire des cordons, un certain effort pour la faire tourner ; cette force, dirigée à chaque instant vers le centre de courbure de la trajectoire décrite, est la force centripète. La pierre, à son tour, réagit contre la fronde avec une force égale et contraire qui est la force centrifuge. La première, provenant de la main, est appliquée à la pierre par l'intermédiaire de la fronde, et la seconde, naissant de la pierre même, est appliquée à la fronde qui la retient.

502. Expression de la force centrifuge. — Pour exprimer la valeur de la force centrifuge, cherchons celle de la force centripète qui lui est égale. Soit O (*fig.* 246) une circonférence décrite d'un mouvement uniforme par le point matériel A, les positions du mobile au commencement et à la fin d'un temps t très-petit étant A et A′. Le chemin AA′ peut être considéré comme le chemin résultant de deux chemins composants AT et AB dirigés, le premier suivant la tangente AT, et le second, AB, suivant le rayon OA. Ce dernier, AB, est le chemin que la force centripète F tend à faire décrire au mobile.

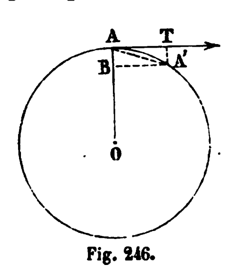


Fig. 246.

L'arc AA′ étant très-petit, peut être considéré comme se confondant avec sa corde, et, en désignant par v la vitesse du mobile, on aura

$$e = vt. \qquad (1)$$

Dans un cercle, toute corde étant moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre, on aura

$$\overline{AA'}^2 = 2r \times AB. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on tire

$$v^2t^2 = 2r \times AB; \quad \text{d'où } AB = \frac{v^2t^2}{2r}.$$

On voit donc que le mobile a parcouru le chemin AB d'un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est $\frac{v^2}{r}$; par suite, la force centripète F est constante. La masse du mobile étant *m*, on aura, pour l'expression de cette force,

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{Pv^2}{gr}.$$

Cette formule nous montre que *la force centrifuge est proportionnelle au carré de la vitesse et en raison inverse du rayon.*

Si la vitesse est donnée en fonction du nombre de tours par minute, on a

$$v = \frac{2\pi rn}{60}; \text{ par suite } F = \frac{m\pi^2rn^2}{30^2} = \frac{Prn^2}{894,5}.$$

Cette vitesse étant donnée en fonction de la vitesse angulaire, on a

$$v = \omega r \quad \text{et par snite } F = m\,\omega^2 r = \frac{P\omega^2 r}{g}.$$

Remarque. — Si le mobile parcourait une trajectoire quelconque d'un mouvement varié, les formules que nous venons de poser pourraient s'appliquer à la détermination de la force centrifuge à un instant quelconque, en prenant, pour la valeur de *r*, le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant considéré.

503. Dans les corps animés d'un mouvement de rotation très-rapide, la force centrifuge doit toujours être équilibrée par la force de cohésion des corps, c'est-à-dire que ceux-ci doivent résister aux réactions centrifuges déterminées par le mouvement qui leur est imprimé. Si cet équilibre cessait d'exister, les corps seraient projetés avec violence dans l'espace ; c'est ce qui arrive quelquefois dans les fabriques d'épingles et d'aiguilles où les meules destinées à user les pointes fonctionnent avec une vitesse très-grande. Les volants des machines à vapeur, les roues, et en général les pièces d'un grand diamètre qui sont animées d'un mouvement de rota-

tion très-rapide, doivent donc être solidement reliées à leur arbre. En outre, le centre de gravité du système doit se trouver exactement sur l'axe de cet arbre, afin que celui-ci ne soit pas sollicité par des efforts tendant à le déplacer latéralement ; mais, en pratique, la difficulté de distribuer uniformément la matière autour de l'axe de rotation, fait que le centre de gravité se trouve toujours à une certaine distance de cet axe. Il faut donc maintenir solidement les arbres pour qu'ils ne soient pas déplacés par les réactions centrifuges auxquelles ils sont soumis.

504. Lorsqu'un cheval tourne librement dans un manége, (*fig.* 247) il incline instinctivement son corps vers le centre, et cette inclinaison est d'autant plus marquée que sa vitesse devient plus grande; l'animal prend ainsi une position d'équilibre stable.



Fig. 247.

En effet, il est soumis à son poids P, force verticale dirigée de haut en bas, et à une force centrifuge F dirigée horizontalement, qui tend à l'éloigner du centre du cirque; ces deux forces se composent en une seule résultante, et afin de ne pas tomber, l'animal doit s'incliner pour que la direction de cette résultante passe à l'intérieur de sa base de sustentation.

L'écuyer, placé sur le cheval, s'incline également vers le centre du cirque pour se maintenir en équilibre.

505. La stabilité des voitures en mouvement sur les routes qui, dans leur parcours, présentent des courbes, est soumise aux mêmes considérations que celles exposées précédemment. La force centri-

fuge étant proportionnelle au carré de la vitesse et inversement proportionnelle au rayon, on comprend que, dans les tournants de faible courbure, la vitesse des voitures doive être ralentie pour éviter le renversement qui arriverait lorsque la résultante du poids P et de la force centrifuge F, ne percerait pas le sol entre la base d'appui. Sur les voies ferrées, où la vitesse des wagons est beaucoup plus grande, les règlements interdisent les courbes de faible rayon, et pour contre-balancer l'action de la force centrifuge, le rail extérieur est plus élevé que le rail intérieur. Le wagon étant ainsi incliné vers le centre de la courbe qu'il décrit, comme l'écuyer et le cheval dans un manége, la stabilité du véhicule est assurée.

Les applications industrielles de la force centrifuge se rencontrent dans les régulateurs, les essoreuses, les ventilateurs, etc.

§ 2. — THÉORIE ÉLÉMENTAIRE ET LOIS DU PENDULE SIMPLE

506. Définition. — On appelle *pendule*, en général, un corps solide de forme quelconque pouvant osciller autour d'un axe horizontal. Nous ne nous occuperons que du pendule simple, c'est-à-dire du pendule formé d'un point matériel pesant A (*fig.* 248) suspendu à l'une des extrémités d'un fil très-fin, inextensible et sans pesanteur, dont l'autre extrémité oscille sans frottement autour d'un point fixe B. Le pendule ainsi formé est idéal, mais on peut se le représenter en suspendant une balle de plomb à l'extrémité d'un fil très-délié.



Fig. 248.

507. Pendule simple. — Considérons le pendule dans sa position d'équilibre stable BC (*fig.* 249); la direction verticale du fil passe par le point fixe B. Si on écarte l'appareil de sa position d'équilibre pour l'amener en A, et qu'ensuite on l'abandonne à lui-même, la composante du poids du point matériel, dirigée suivant la perpendiculaire à la direction AB, élevée en A, aura pour effet de ramener le pendule vers sa position d'équilibre stable, et le point A décrira un arc de cercle de rayon BA, contenu dans un plan vertical passant par le point fixe. En vertu de la vitesse acquise, le point matériel dépassera sa position initiale C, et la pesanteur

qui précédemment agissait comme force accélératrice, agira maintenant comme force retardatrice, et l'on démontre que le point A remontera jusqu'en A', situé sur l'horizontale du point A; les arcs AC et A'C seront égaux, et la vitesse repassera par les mêmes valeurs pour des points de la trajectoire situés à la même hauteur. Arrivé en A', le pendule redescendra en C pour remonter en A, et il opérera ainsi une suite non interrompue d oscillations égales.

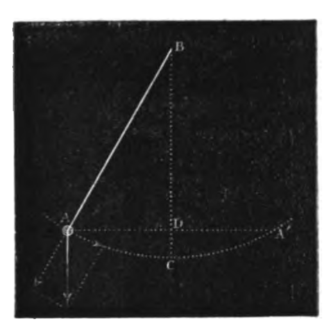


Fig. 249.

On appelle *amplitude* d'une oscillation, l'angle compris entre les positions extrêmes BA et BA' du pendule, et la durée de l'oscillation est le temps employé par le point A pour aller de A en A'

Remarque. — En réalité, le mouvement du pendule ne peut se continuer indéfiniment en raison du frottement au point fixe et de la résistance de l'air; l'amplitude des oscillations diminue progressivement pour devenir nulle au bout d'un certain temps. On observe, en outre, que la durée des oscillations varie avec leur amplitude; mais, lorsque ces amplitudes deviennent très-faibles, c'est-à-dire ne dépassent pas 4 ou 5 degrés, la durée des oscillations varie d'une manière insensible, et peut être considérée comme constante.

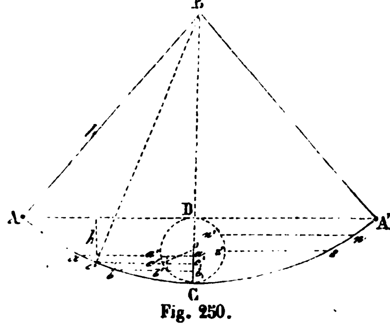


Fig. 250.

508. Détermination de la durée d'une oscillation. — Décomposons l'arc AA' (*fig.* 250) en petits arcs élémentaires tels que $ab=a$; chacun de ces petits arcs pourra être considéré comme étant parcouru d'un mouvement uniforme, et l'on aura

$$a=vt_1;\ \text{d'où}\ t_1=\frac{a}{v}. \qquad (1)$$

Or la vitesse de ce mouvement est la vitesse due à la hauteur moyenne h dont le pendule est descendu, c'est-à-dire que l'on a

$$v = \sqrt{2gh}.$$

En remplaçant dans (1) et élevant au carré, il vient

$$t_1^2 = \frac{a^2}{2gh}. \qquad (2)$$

Décrivons une circonférence sur la flèche DC comme diamètre, et projetons l'arc a sur la verticale BC ; les triangles semblables donnent

$$\frac{ab}{a_1b_1} = \frac{Bc}{cc_1} \quad \text{et} \quad \frac{a'b'}{a'_1b'_1} = \frac{oc'}{c_1'c_1}.$$

Ou encore $\frac{a}{a_1} = \frac{l}{x}$ (3) et $\frac{a'}{a_1} = \frac{r}{x'}$ (4)

en posant $a_1b_1 = a_1$; $a'b' = a'$; $cc_1 = x$; $c_1'c_1 = x'$ et $oc' = r$.

Mais les perpendiculaires x et x' sont moyennes proportionnelles entre les deux segments de leurs diamètres respectifs, et l'on a

$$x^2 = (2l - c_1C) \times c_1C = 2l \times c_1C - \overline{c_1C}^2 \quad \text{et} \quad x'^2 = h \times c_1C.$$

Si l'on suppose l'arc AA' d'un petit nombre de degrés, le terme c_1C^2 sera très-petit par rapport à $2l \times c_1C$, et on pourra le négliger.

Divisons l'une par l'autre les équations (3) et (4), en les élevant au carré, et remplaçons x et x' par leurs valeurs ; nous aurons

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{l^2 \times h \times c_1C}{r^2 \times 2l \times c_1C} = \frac{l \times h}{2r^2}; \quad \text{d'où l'on tire } a^2 = \frac{a'^2 lh}{2r^2}.$$

Introduisant cette valeur de a^2 dans l'équation (2), il vient

$$t_1^2 = \frac{a'^2 lh}{4ghr^2} = \frac{a'^2 l}{4gr^2}; \quad \text{d'où } t_1 = \frac{a'}{2r}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pour les autres arcs élémentaires, on aurait des expressions analogues dans lesquelles a' représenterait la projection de l'arc élémentaire sur la circonférence DC. En remarquant que la somme des projections, sur la circonférence DC, de tous les arcs élémentaires composant l'oscillation AA', est égale à la longueur $2\pi r$ de

cette circonférence, on aura, pour la durée totale de l'oscillation,

$$t=\frac{2\pi r}{2r}\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ou } t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (a)$$

509. Lois du pendule. — 1° Loi. — *Les oscillations sont isochrones.* La durée d'une oscillation étant, d'après la formule (a), indépendante de son amplitude, on peut dire que, *dans un même lieu, la durée des petites oscillations d'un pendule est constante*, ou, en d'autres termes, *que les oscillations sont isochrones.*

510. 2° **Loi.** — *Les durées des oscillations de deux pendules de longueurs différentes, oscillant dans un même lieu, sont proportionnelles aux racines carrées des longueurs de ces pendules.*

Les durées t et t' des oscillations des pendules considérés seront données par les formules

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{et} \quad t'=\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{t}{t'}=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l'}}.$$

511. 3° **Loi.** — *Les durées des oscillations de deux pendules de même longueur, oscillant dans des lieux différents, sont inversement proportionnelles à la racine carrée de l'accélération due à la pesanteur en ces lieux.*

Les durées t et t' des oscillations des pendules considérés seront données par les formules

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{et} \quad t'=\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{t}{t'}=\frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{g}}.$$

Cette loi peut être présentée sous une autre forme. En effet, soit n et n' les nombres d'oscillations exécutées par les pendules

pendant un temps T; on aura

$$\frac{T}{n} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{n'} = \pi\sqrt{\frac{l}{g'}},$$

$$\text{d'où l'on tire } \frac{g}{g'} = \frac{n^2}{n'^2},$$

ce qui s'exprime en disant que *les accélérations dues à la pesanteur en deux lieux différents, sont proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations qu'exécute le même pendule en ces lieux, pendant le même temps.*

512. Détermination du nombre g. — De l'équation (a) on tire $g = \frac{\pi l}{t^2}$; cette formule fait connaître la valeur de l'accélération due à la pesanteur en un lieu quelconque, étant donnée la durée t de l'oscillation d'un pendule de longueur l, au lieu où l'on opère.

513. Détermination de la longueur du pendule qui bat la seconde. — La longueur du pendule qui bat la seconde, se détermine au moyen de la formule (a), dans laquelle on fait $t = 1''$, et il vient : $l = \frac{g}{\pi^2}$. Connaissant le nombre g, dont les valeurs aux différents points du globe, sont renfermées dans le tableau (255), il sera facile d'évaluer l. Ainsi, à Paris, où $g = 9{,}8088$, on trouve

$$l = \frac{9{,}8088}{3{,}1416^2} = \frac{9{,}8088}{9{,}86965} = 0^m99384.$$

Le tableau suivant renferme les longueurs du pendule simple battant la seconde en différents points du globe.

LIEUX.	LATITUDES.	VALEURS DE l
Spitzberg.	79° 49′ 58″ N	996mm.03
Londres.	51° 31′ 8″	994 12
Paris.	48° 50′ 14″	993 85
Barcelone.	41° 23′ 15″	993 23
Équatéur..	0°	991 11
Jle de France.	20° 9′ 40″ S	991 77

514. Applications du pendule. — L'isochronisme des oscillations du pendule firent employer cet appareil pour la mesure du temps, et Huyghens l'appliqua, en 1657, pour régulariser la marche des horloges.

Une des plus belles applications du pendule a été faite en 1851, par M. Foucault, au Panthéon, pour démontrer le mouvement de rotation de la terre.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

§ 3. DÉCOMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES ANGULAIRES.

§ 4. MOMENTS DES FORCES ANGULAIRES.

§ 5. COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

§ 6. DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

§ 7. MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES.

CHAPITRE II.

§ 1. CENTRE DE GRAVITÉ.

§ 2. CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES, SURFACES ET VOLUMES NON DÉFINIS GÉOMÉTRIQUEMENT.

§ 3. CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES, SURFACES ET VOLUMES DÉFINIS GÉOMÉTRIQUEMENT.

Centre de gravité des lignes.

Centre de gravité des surfaces.

Centre de gravité des volumes.

CHAPITRE V.

Application des principes de la statique aux machines.

§ 1. SYSTÈME LEVIER.

§ 2. SYSTÈME TOUR.

§ 3. SYSTÈME PLAN.

DEUXIÈME PARTIE

CINÉMATIQUE

CHAPITRE Ier.

§ 1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET DÉFINITIONS.

§ 2. MOUVEMENT UNIFORME.

§ 3. MOUVEMENT VARIÉ.

§ 4. MOUVEMENTS UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ ET RETARDÉ.

§ 5. LOIS DE LA CHUTE DES CORPS.



§ 5. JOINTS.

§ 6. BIELLE ET MANIVELLE.

Manivelle et tige guidée.

§ 7. EXCENTRIQUES.

§ 8. CAMES.

§ 9. PARALLÉLOGRAMME ARTICULÉ.

§ 10. ENCLIQUETAGES ET EMBRAYAGES.

TROISIÈME PARTIE

DYNAMIQUE

CHAPITRE Ier.

§ 1. PRINCIPES GÉNÉRAUX ET LEURS CONSÉQUENCES.

. THÉORÈMES RELATIFS AUX QUANTITÉS DE MOUVEMENT.

CHAPITRE II.

§ 1. TRAVAIL DES FORCES.

§ 2. PRINCIPE DE L'EFFET DU TRAVAIL.

§ 3. PRINCIPE DE LA TRANSMISSION DU TRAVAIL DANS LES MACHINES.

CHAPITRE III.

§ 1. RÉSISTANCES PASSIVES.

§ 2. CHOC DES CORPS.

COMPLÉMENT.

§ 1. FORCE CENTRIFUGE.

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

COURS

DE MÉCANIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL
ET PROFESSIONNEL

COURS DE MÉCANIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

A L'USAGE

DES ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL
DES ÉCOLES D'ARTS ET MÉTIERS ET DES INDUSTRIELS

PAR MM.

FUSTEGUERAS
Préparateur à l'École
Professeur de mécanique et de travaux graphiques au collège

HERGOT
Ancien élève de l'École d'arts et métiers de Châlons, préparateur à l'École normale spéciale

DE CLUNY

QUATRIÈME ANNÉE

MOTEURS ET RÉCEPTEURS INDUSTRIELS

Avec 122 figures dans le texte

PARIS
VICTOR MASSON ET FILS
PLACE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE

M DCCC LXX

A MONSIEUR ROUX

OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, OFFICIER DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SPÉCIALE DE CLUNY

MONSIEUR,

Le désir de vous témoigner notre sincère reconnaissance nous donne la hardiesse de vous offrir cet ouvrage. Placés auprès de vous, sous votre éclairée et paternelle direction, nous avons compris l'importance et le but de l'enseignement qui nous était confié. Guidés par vos conseils, nous avons pénétré sans hésiter dans la nouvelle voie, et ce livre, dont vous daignez accepter le respectueux hommage, remplira, nous l'espérons, une lacune qui existe, et répondra aux besoins de l'étude de la mécanique, l'une des branches les plus importantes de l'enseignement spécial, et pourtant si peu répandue encore.

Permettez-nous, Monsieur le Directeur, de joindre ici comme dans nos cœurs, à votre nom, le nom de M. Rigolage, de cet excellent professeur qui, nous aidant de ses lumières, a su toujours rendre notre travail facile et agréable;

ami dévoué, il nous a secondés et soutenus, lorsque l'aridité de ce travail faisait faiblir notre courage.

Si cet ouvrage est digne de l'honneur que vous lui faites et s'il rend quelque service à nos jeunes élèves, nous aurons rempli notre tâche et nos vœux seront accomplis.

Cluny, le 5 *octobre* 1869.

R. Fustegueras, A Hergot.

COURS
DE MÉCANIQUE
THÉORIQUE ET APPLIQUÉE

MOTEURS ET RÉCEPTEURS INDUSTRIELS

CHAPITRE PREMIER

CONSIDÉRATIONS SUR LES MOTEURS EN GÉNÉRAL

1. Une machine, quelle qu'elle soit, étant essentiellement composée d'un assemblage de pièces matérielles, ne peut, en vertu du principe fondamental de l'inertie, effectuer un travail, ni même se mettre en mouvement, à moins qu'un effort, une puissance quelconque, ne vienne exercer son action sur son principal organe, comme, par exemple, la pression de la vapeur sur le piston d'une machine à vapeur, l'eau agissant par son poids ou par sa vitesse sur les aubes d'une roue hydraulique, etc. Toute cause capable d'exercer cette action prend en général le nom de *moteur*.

2. Les moteurs se divisent en deux classes principales : 1° *moteurs animés; 2° moteurs inanimés*.

Les moteurs animés sont : l'homme et certains animaux. Ils se

distinguent des autres moteurs en ce qu'ils ne peuvent travailler d'une manière continue.

Les moteurs inanimés comprennent :

1° Les *ressorts*. Ils sont employés assez fréquemment dans plusieurs machines dont certaines pièces, ayant un mouvement rectiligne alternatif, viennent buter contre les extrémités des ressorts à la fin de la course dans un sens, et sont mises en mouvement en sens contraire par l'effet de ces ressorts, au moment même où la force motrice change de sens. Leur élasticité permet de reproduire rapidement, et en sens inverse, les effets produits par un premier mouvement. Ils sont principalement employés dans l'horlogerie.

2° La *pesanteur*. Les corps pesants, abandonnés à l'action de la pesanteur, constituent de véritables moteurs, comme par exemple les poids dans une horloge, le mouton des sonnettes à tiraudes, le marteau dans les marteaux-pilons à simple effet.

3° L'*eau*. Le poids des liquides, et principalement celui de l'eau passant d'un certain niveau à un niveau inférieur, est une des plus abondantes sources de force qui se rencontrent dans la nature. Son emploi est d'autant plus facile que l'eau s'écoule naturellement après avoir agi sur le récepteur, si une légère pente a été ménagée, comme cela a toujours lieu, de façon à déterminer son mouvement.

4° Le *vent*. Le mouvement de l'air est une richesse naturelle que l'on peut utiliser dans bien des cas, comme par exemple dans les navires à voiles, ainsi que dans des appareils d'une construction particulière appelés *moulins à vent*.

5° La *vapeur*. La vapeur d'eau, comprimée sous diverses pressions, fournit à l'industrie le moteur le plus puissant et le plus répandu.

6° L'*électricité*. Ce moteur n'a pas rendu jusqu'à ce jour de bien grands services à l'industrie, à cause de son prix assez élevé de production; mais il a déjà reçu une application notable dans les machines dites *électro-magnétiques*.

3. En nous plaçant au point de vue de leur application dans l'industrie, nous n'avons à considérer que quatre moteurs, savoir : les moteurs animés, le vent, l'eau et la vapeur.

4. Un moteur, quel qu'il soit, peut être étudié à deux points

de vue différents : 1° on peut considérer le moteur en lui-même, sans s'occuper de la manière dont son action est utilisée ; on trouve ainsi la quantité de travail, dit travail absolu, qu'il peut fournir dans un temps donné ; 2° on peut ne pas séparer le moteur de sa machine motrice, et c'est ce qu'on fait habituellement, afin de s'assurer de la quantité de travail dont on peut réellement disposer. En comparant ce dernier résultat à celui obtenu dans le premier cas, on peut juger du degré de perfection de la machine motrice, d'après la quantité plus ou moins grande du travail moteur qu'elle aura rendue disponible.

Pour étudier un moteur en lui-même, on examine de quelle manière il peut agir, quelle force il est capable de déployer, et quel chemin parcourt le point d'application de cette force, compté suivant sa direction.

La mesure de la quantité de travail qu'une machine motrice rend disponible, s'obtient au moyen d'un appareil appelé *frein dynamométrique*.

5. Frein dynamométrique de Prony. — L'expérience consiste à débarrasser la machine de toute transmission, et par conséquent de toutes les résistances qu'elle doit vaincre, et à lui appliquer une résistance artificielle dont l'évaluation soit facile à déterminer.

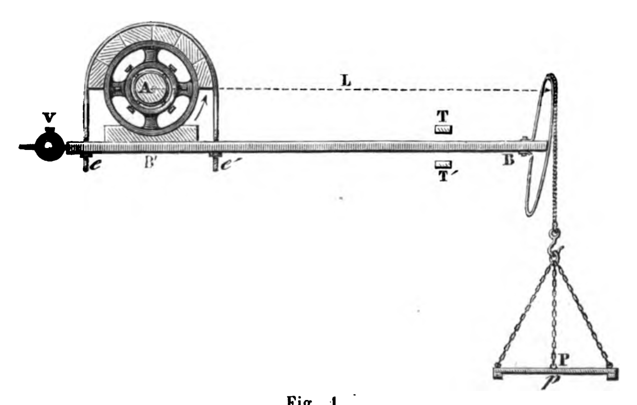


Fig. 1.

Alors, en faisant varier la grandeur de cette résistance jusqu'à ce que la machine prenne sa vitesse de régime, il suffira de déterminer la quantité de travail que la machine développe pour vaincre

cette résistance artificielle, pour obtenir le travail que cette machine fournit habituellement.

Pour cela, on adapte à l'arbre A (*fig.* 1) de la machine, le frein dynamométrique de Prony, qui consiste en un levier en bois BB′ muni d'une pièce également en bois formant coussinet; le coussinet supérieur est formé de morceaux de bois réunis entre eux par une chaîne ou une lame, dont les extrémités, terminées par des boulons, traversent le levier, et reçoivent des écrous *e* et *e′*. A l'extrémité du grand bras de levier se trouve un arc de cercle dont le centre est à l'axe de l'arbre, et à l'extrémité supérieure duquel on attache, à l'aide d'une courroie ou d'une corde, un plateau *p* destiné à recevoir des poids. Le petit bras du levier porte un contre-poids V qui sert à équilibrer le grand bras et son plateau; T et T′ sont des arrêts qui limitent l'amplitude des oscillations au moment de la mise en train.

Avant de monter le frein sur l'arbre, on adapte ordinairement à celui-ci un manchon ou une poulie que l'on fixe à l'aide de boulons, afin que sa surface ait tous ses points également éloignés de l'axe de rotation.

L'appareil étant disposé sur l'arbre, on met la machine en marche après avoir débrayé toute la transmission; le frottement qui se développe entre la poulie et le frein tendra à entraîner le levier dans le mouvement de rotation de l'arbre. Mais l'arrêt T s'y oppose, et détermine le glissement du manchon entre les mâchoires du frein. Si on serre les écrous *e* et *e′* jusqu'à ce que la machine prenne sa vitesse de régime, le travail résistant développé par le frottement du frein sur la poulie sera égal à la quantité de travail que la machine effectue dans les circonstances ordinaires.

Pour l'évaluer, on met sur le plateau *p* des poids en quantité suffisante pour que le levier se maintienne horizontal sans toucher les arrêts T et T′. Soient alors P le poids agissant à l'extrémité du levier L, la longueur de celui-ci étant comptée depuis l'axe de l'arbre jusqu'au point d'attache du plateau, *r* le rayon du manchon, *n* le nombre de tours par minute, et F la force de frottement.

Le travail de la machine étant rigoureusement égal à celui de la

force de frottement, qui agit tangentiellement à la circonférence de la poulie, on a :

$$T = F \times \frac{2\pi r n}{60} = F \times \frac{\pi r n}{30}.$$

Le levier étant en équilibre sous l'action du poids P, et de la force F, la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à l'axe doit être nulle. Or le moment du frottement est Fr : celui du poids est PL ; nous aurons donc l'égalité :

$$Fr - PL = 0,$$

d'où l'on tire $Fr = PL$,

et en remplaçant Fr dans l'équation précédente on a

$$T = \frac{P\pi L n}{30} = \frac{PLn}{9,55}.$$

Les expériences au frein exigent une très-grande attention. Il faut constamment lubrifier les parties frottantes avec de l'eau de savon, pour empêcher l'échauffement du frein et de la poulie.

EXERCICES.

I. — On demande le travail disponible d'une machine à vapeur d'après l'expérience au frein exécutée dans les circonstances suivantes : P ou le poids placé dans le plateau = 62^{kil},500, la longueur L du grand bras du levier = 3^{m},80, et le nombre de tours par minute n = 64.

II. — Quel est le travail disponible d'une roue hydraulique d'après l'expérience au frein exécutée dans les circonstances suivantes : P ou le poids placé dans le plateau = 95^{kil},240, la longueur L du grand bras du levier = 2^{m},75, et le nombre de tours n par minute = 14,75.

III. — Le poids P placé dans le plateau du frein dont le grand bras L a 2^{m},50, étant de 84^{kil},68, on demande le nombre de tours par minute que fait l'arbre de la machine à vapeur qui fournit un travail de 2825 kilogrammètres, sur lequel le frein est adapté.

IV. — On demande quel est le poids qui doit être placé dans le plateau d'un frein dont le grand bras L a 2^{m},44 pour faire équilibre au travail de 1925 kilogrammètres fourni par une machine à vapeur qui exécute 56 tours par minute.

6. Dynamomètre de rotation de M. Morin. — Lorsqu'on connaît le travail qu'une machine motrice peut effectuer, il est bon aussi de connaître le travail absorbé par les différentes résistances qui lui sont appliquées. On se sert pour cela d'un appareil imaginé par le général Morin, appelé *dynamomètre de rotation*,

qui a l'avantage de pouvoir être adapté presque instantanément à toutes sortes de machines, et de pouvoir être transporté aisément d'une machine-outil à une autre, pendant que ces appareils fonctionnent, sans qu'il en résulte aucune perte de temps ni de travail utile.

Il se compose d'un arbre horizontal AB (*fig.* 2), portant trois poulies de même diamètre, C, D et E, reposant sur deux paliers en

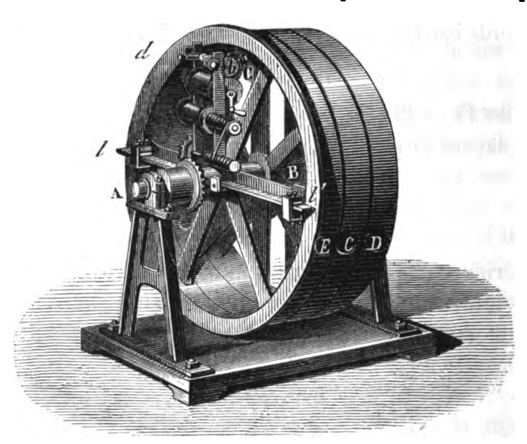


Fig. 2.

fonte. La poulie D est calée sur l'arbre, la poulie C est folle, et la poulie E est reliée au même arbre à l'aide d'une lame de ressort *ll'* qui le traverse, et dont les extrémités sont fixées à la circonférence de la poulie E.

On relie à l'aide de courroies la poulie D à l'arbre moteur, et la poulie E à la machine dont on veut mesurer le travail. L'arbre AB recevra du moteur un mouvement de rotation qui se transmettra par la lame *ll'* à la poulie E, et de celle-ci à la machine. Mais cette transmission ne s'accomplira que par un certain effort qui fera fléchir plus ou moins la lame *ll'*, et c'est cette flexion, proportionnelle à l'effort que nous voulons connaître, qui nous permet de le mesurer. Sur l'arbre AB est monté un engrenage conique qui communique le mouvement à un enregistreur composé de trois bobines sur lesquelles s'enroule une bande de papier avec une vitesse proportionnelle au mouvement de rotation de l'arbre.

Sur la jante de la poulie E se trouve un crayon *c* qu'un petit ressort appuie sur la bobine *b*. Un autre crayon *d*, fixé invariablement juste en face du précédent sur les deux montants de l'enregistreur, trace sur la même bande de papier une ligne droite qui correspond à une flexion nulle du ressort, et qu'on appelle *ligne des efforts zéro*. Le crayon *c* tracerait aussi une droite si la flexion de la lame *ll'* ne venait transformer cette droite en une courbe qui s'éloigne plus ou moins de la ligne des efforts zéro, suivant que l'effort supporté par le ressort est plus ou moins considérable. Les ordonnées de cette courbe donnent à chaque instant l'effort transmis, et l'aire de la surface comprise entre cette courbe et la ligne des efforts zéro donne le travail absorbé par la machine pendant le temps considéré.

L'instrument a été taré d'avance, c'est-à-dire que pour un effort d'un nombre donné de kilogrammes, on connaît la flexion correspondante du ressort, et par conséquent la longueur de l'ordonnée.

7. Cheval-vapeur. — La force d'une machine est le plus généralement exprimée en chevaux-vapeur.

Lorsqu'une machine est capable d'élever en une seconde 75 kilogrammes à 1 mètre de hauteur, on dit qu'elle est de la force de 1 cheval-vapeur.

Une machine sera de la force de 2, 3, 4.... chevaux, si elle peut élever dans le même temps et à la même hauteur 2, 3, 4... fois 75 kilogrammes, ou bien encore si elle peut dans le même temps, élever 75 kilogrammes à 2, 3, 4... mètres de hauteur.

Lorsqu'on a trouvé, à l'aide du frein de Prony, la quantité de travail qu'une machine est capable d'effectuer en une heure, il est très-facile de trouver sa force exprimée en chevaux-vapeur. Supposons, par exemple, qu'une machine puisse effectuer un travail de 2700000 kilogrammètres par heure ; en une seconde elle produira 3600 fois moins, c'est-à-dire 750 kilogrammètres, et comme 75 est contenu 10 fois dans 750, on en conclut que la machine a une force de 10 chevaux-vapeur.

Quelquefois, on remplace le nom de cheval-vapeur par celui de *cheval dynamique*.

CHAPITRE II

MOTEURS ANIMÉS

§ 1. — CONSIDÉRATIONS SUR LES MOTEURS ANIMÉS

8. Les moteurs animés ne peuvent, comme les autres moteurs, produire leur action d'une manière continue. Après un travail plus ou moins long, ils se fatiguent tous, et pour le continuer, il faut qu'ils se reposent pendant un certain temps. Si la durée du repos n'est pas suffisante, ou si la durée du travail est trop longue ou trop pénible, les forces du moteur s'épuisent, sa santé s'altère, et bientôt il devient incapable de fournir un nouveau travail.

Si F représente l'effort qu'un moteur peut développer, E le chemin qu'il fait parcourir à la résistance, et T le nombre de secondes pendant lequel son action s'exerce, le produit $F \times E \times T$ sera l'expression du travail effectué; si T représente le temps pendant lequel il travaille par jour, $F \times E \times T$ sera son travail journalier en kilogrammètres, si F est exprimé en kilogrammes.

9. D'après le mode d'action du moteur, le travail qu'il peut produire est plus ou moins grand, et le maximum d'effet dépend de l'effort, de la vitesse et de la durée du travail ; il est évident que ce maximum d'effet n'aura lieu que pour un rapport convenable entre ces trois quantités. Or, on a vu en statique que les efforts sont inversement proportionnels aux chemins parcourus; si donc le moteur exerce son maximum d'effort, le chemin qu'il fera parcourir à la résistance sera très-petit, et réciproquement. On a déterminé par expérience l'effort, la vitesse et la durée du travail pour obtenir ce maximum d'effet.

§ 2. — DE L'HOMME CONSIDÉRÉ COMME MOTEUR

10. La force de l'homme est très-souvent employée comme force motrice. En agissant avec ses mains, et sans se déplacer, l'homme

peut tirer ou pousser soit horizontalement, soit verticalement; étant assis, il peut pousser avec ses pieds ; en marchant, il peut encore pousser ou tirer; enfin il peut agir par son poids seulement, comme dans le treuil des carriers.

La somme de travail qu'il produit dans ces différents cas est loin d'être la même; on a remarqué qu'elle est la plus grande lorsque ses muscles exercent le genre d'effort le plus rapproché de celui auquel ils sont destinés.

11. Un homme qui monte une pente douce en élevant seulement son propre poids, qui est de 65 kilogrammes en moyenne, peut avoir une vitesse verticale de 0^m, 15 par seconde, et marcher 8 heures par jour sans se fatiguer. Il produit alors un travail de

$$65 \times 0,15 \times 8 \times 3600 = 280800 \ kgm.$$

Tandis que ce même homme, en transportant un fardeau de 65 kilogrammes en suivant le même chemin, ne pourra travailler que 6 heures par jour, et n'aura qu'une vitesse verticale de 0^m,04; son travail dans ce cas est de

$$65 \times 0,4 \times 6 \times 3600 = 56160 \ kgm.$$

et en ajoutant le travail développé en même temps pour soulever son propre poids, qui est également de 56160 kilogrammètres, on aura un travail total de 112320 kilogrammètres, travail plus petit que celui qu'il produit par l'élévation de son poids seul.

12. Il sera donc très-avantageux de faire consister le travail de l'homme dans la simple élévation de son propre poids, toutes les fois qu'on pourra obtenir l'effet qu'on se propose, comme par exemple, lorsqu'on a à élever des terres d'un niveau à un autre niveau supérieur.

Dans les travaux de terrassement exécutés au fort de Vincennes, on a employé pour la première fois un appareil qui y a produit une grande économie. Il se compose d'une charpente solide AA (fig. 3), portant à sa partie supérieure une grande poulie P dans la gorge de laquelle passe une corde C, portant à chacune de ses extrémités un plateau B analogue à celui d'une balance. La longueur de la corde a été déterminée de telle manière que, lorsqu'un des plateaux se trouve au niveau inférieur, l'autre se trouve

au niveau supérieur ; on place alors une brouette pleine de terre sur le plateau qui est en bas, en même temps qu'un ouvrier se place avec une brouette vide dans l'autre plateau. En supposant espoids des brouettes égaux , si l'ouvrier pèse un peu plus que le poids de la terre contenue dans la première brouette, l'équilibre sera rompu, et le plateau supérieur se mettra à descendre, en produisant le mouvement de l'autre. On décharge alors les deux plateaux, on met une brouette pleine sur celui qui vient de descendre, et sur l'autre se place un second ouvrier avec une brouette vide; le mouvement en sens contraire des plateaux a lieu, et ainsi de suite.

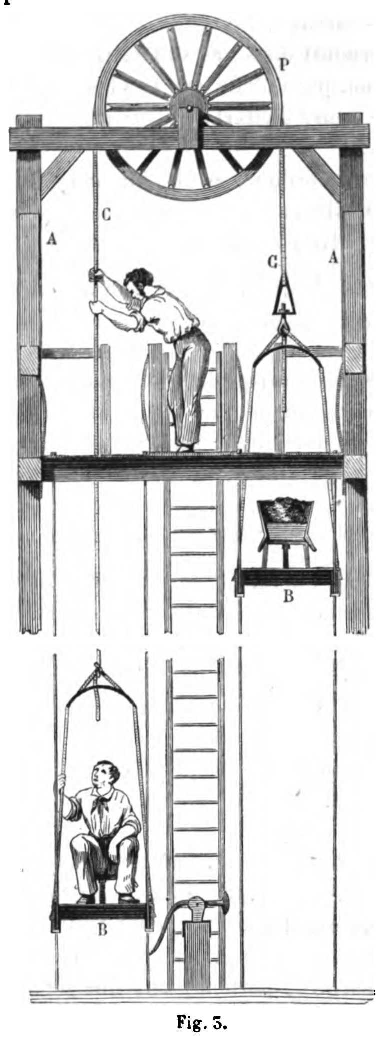


Fig. 3.

Les ouvriers qui descendent dans le plateau remontent à la partie supérieure à l'aide d'une échelle placée entre les deux plateaux. D'autres ouvriers sont employés, les uns au bas à remplir les brouettes, les autres en haut à les vider. Enfin un homme est placé au haut de l'appareil pour ralentir ou accélérer le mouvement, suivant que le poids de l'ouvrier placé dans le plateau l'emporte plus ou moins sur celui de la terre placée dans la brouette.

Si les ouvriers chargés de l'élévation des matériaux les avaient transportés à dos sur une pente douce, le travail utile de chacun

d'eux ne serait que de 56160 kilogrammètres, c'est-à-dire le 1/5 du travail qu'il produit avec cet appareil.

13. Le plus fréquemment, lorsque l'homme est employé comme moteur, il exerce son action sur une manivelle; dans ce cas, il peut exercer un effort moyen de 8 kilogrammes avec une vitesse linéaire de $0^m,75$, et travailler 8 heures par jour; son travail journalier est alors de

$$8 \times 0,75 \times 8 \times 3600 = 172800\ kgm.$$

14. L'immense progrès qu'a fait l'industrie depuis quelques années a beaucoup diminué le rôle de l'homme comme moteur. De nombreuses machines-outils établies dans les ateliers ont substitué au travail matériel de l'homme celui de son intelligence, seule capable de créer et d'entreprendre les prodigieux travaux qui s'accomplissent de nos jours, tels que le percement du mont Cenis, et celui du canal de l'isthme de Suez.

§ 3. — EMPLOI DES ANIMAUX COMME MOTEURS

15. Les animaux employés comme moteurs sont : le cheval, le bœuf, le mulet et l'âne.

La manière dont la force des animaux peut être employée est beaucoup moins variée que chez l'homme ; on les fait tirer presque toujours horizontalement, et dans le sens du mouvement.

L'effort maximum de traction qu'un cheval de force moyenne peut exercer est de 400 kilogrammes; mais, lorsqu'il travaille d'une manière régulière, il doit être de 100 à 120 kilogrammes, c'est-à-dire le 1/4 de cet effort.

Un cheval de roulier, allant au pas avec une vitesse de 1 mètre par seconde, peut faire 28 kilomètres par jour, et exercer un effort moyen de 60 kilogrammes; son travail journalier est, dans ce cas, de 1680000 kilogrammètres.

Un cheval allant au trot effectue beaucoup moins de travail, car, en exerçant un effort moyen de 40 kilogrammes avec une vitesse de 2 mètres par seconde, il ne peut travailler que 5 heures par jour; il produit ainsi un travail journalier de 720000 kilogrammètres.

Le bœuf tirant horizontalement exerce un effort plus considérable que celui du cheval; mais sa vitesse est beaucoup moins

grande. Son travail journalier est à peu près la 1/2 de celui fourni par un cheval.

Le cheval s'emploie ordinairement dans les pays de plaines; dans les pays de montagnes, le mulet convient mieux.

16. Les différents animaux que nous venons de citer s'emploient très-souvent pour faire mouvoir des manéges.

§ 4. — MANÉGES

17. On distingue trois sortes de manéges : 1° manéges à point fixe supérieur; 2° manéges à point fixe inférieur; 3° manéges locomobiles.

Anciennement, la première classe de manéges était presque exclusivement employée: aujourd'hui, on a reconnu les nombreux avantages des deux dernières classes.

18. Manége à point fixe supérieur. — Le manége à point fixe supérieur se compose généralement d'un arbre vertical AB (*fig.* 4),

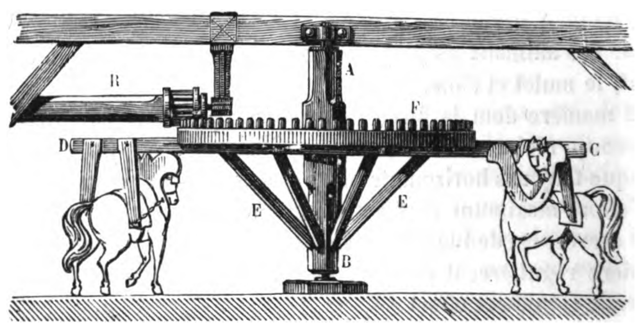


Fig. 4.

fixé à sa partie inférieure par un pivot à une pièce en bois dur reposant sur un plancher, ou plus ordinairement sur une aire en terre, et maintenu à sa partie supérieure par un collier fixé dans un autre plancher ou dans un comble. A cet arbre est fixée une pièce horizontale CD nommée *flèche*, dont l'horizontalité est maintenue à l'aide de tirants E.

La flèche est simple ou double, suivant qu'elle est destinée à recevoir un ou deux chevaux.

La roue à alluchons F, montée sur l'arbre vertical, transmet le

mouvement à l'arbre R, d'où l'on peut, à l'aide de courroies, le transmettre aux différentes machines que l'on veut faire mouvoir.

19. Manége à point fixe inférieur. — Un des manéges à point fixe inférieur le plus employé, c'est le manége Pinet.

Il se compose d'une plaque de fondation AB (*fig.* 5), surmontée d'une colonne creuse C, à l'intérieur de laquelle se trouve un

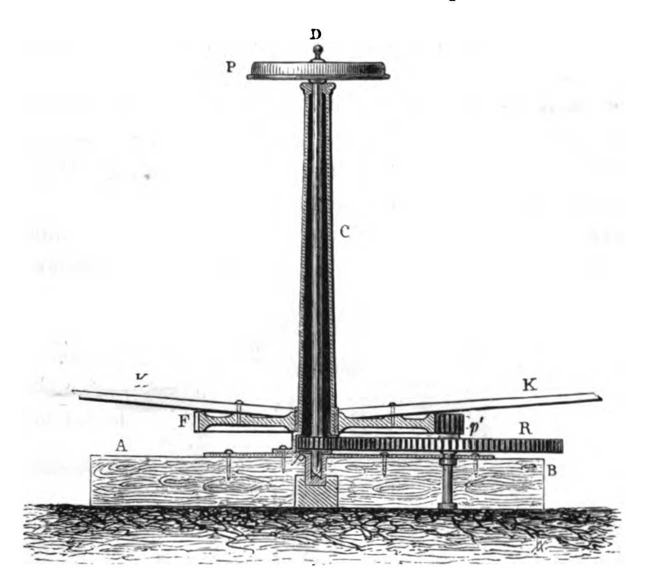


Fig. 5.

arbre vertical D, pouvant pivoter dans la plaque AB, et maintenu à la partie supérieure de la colonne par un collier qui en forme le chapiteau. L'arbre D dépasse la colonne de la quantité nécessaire pour recevoir une poulie P, qui n'est pas clavetée sur l'arbre, mais qu'on force à participer à son mouvement au moyen d'un rochet monté sur l'arbre et d'un cliquet que porte un des bras de la poulie. Par cette disposition, si le cheval vient à s'arrêter, la poulie peut tourner indépendamment de l'arbre devenu fixe, ce qui évite des commotions à l'animal.

La colonne porte, au-dessus du socle, une partie cylindrique destinée à recevoir une grande roue F formant douille, sur laquelle est fixée la flèche K. Cette roue F engrène avec un pignon

p' fondu d'une même pièce avec une roue R qui engrène avec un autre pignon p calé sur l'arbre central. Le pignon p' et la roue R tournent tous sur leur axe qui est fixé sur la plaque de fondation. Le socle de la colonne porte une ouverture de manière à permettre à la roue R d'engrener avec le pignon p.

Le cheval faisant tourner la flèche, communique par l'intermédiaire de la roue F, le mouvement au pignon p', et par conséquent à la roue R, qui en est solidaire, et celle-ci le transmet à l'arbre central au moyen du pignon p.

20. Manége locomobile. — Cette classe de manéges est préférable aux deux autres. Comme toutes les machines locomobiles, ils peuvent servir à des travaux très-variés, avantage très-grand, surtout pour les travaux d'agriculture.

Parmi les manéges locomobiles les plus employés, on peut citer le manége Champenois (*fig.* 6). Il est monté sur un chariot, et se

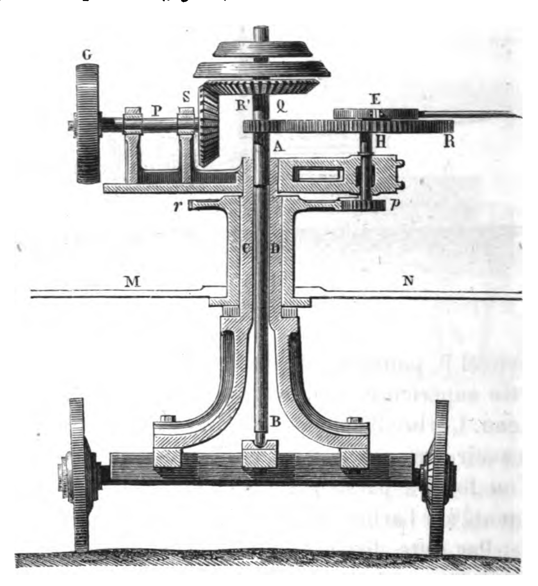


Fig. 6.

compose d'un arbre vertical AB, portant à sa partie supérieure un engrenage conique Q et deux poulies de différents diamètres; cet arbre est entouré d'un cylindre creux CD, faisant corps avec le

bâti. Autour de ce premier cylindre, on en a disposé un second formant douille, pouvant tourner autour du précédent, et auquel est fixée la flèche MN au moyen de boulons. Ce dernier cylindre fait corps avec un engrenage *r*, commandant un pignon *p* fixé sur l'arbre vertical H, qui porte à sa partie supérieure la roue R engrenant avec R′ calée sur l'arbre central. De plus, l'engrenage conique Q de cet arbre fait tourner la roue S, montée sur l'arbre horizontal P, et par suite communique le mouvement à la poulie G.

Ce manége permet d'opérer avec des vitesses différentes, et de commander directement des arbres verticaux et horizontaux. En outre, comme il y a des machines qui exigent un mouvement rectiligne alternatif, sur l'axe de la roue R on a disposé un excentrique E qu'on peut articuler à une tige, et par suite, on obtient ce genre de mouvement.

21. Les chevaux peuvent être attelés aux manéges de deux manières différentes : 1° par arcade, 2° par palonnier.

L'*arcade* consiste en une pièce de bois ou de métal AB (*fig.* 7), qui embrasse les deux côtés du cheval de manière à empêcher tout mouvement de droite à gauche ou de gauche à droite. L'arcade peut être fixe ou mobile autour de son axe. On emploie l'ar-

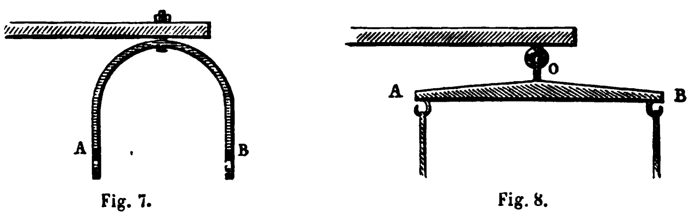


Fig. 7. Fig. 8.

cade mobile lorsque le manége doit marcher tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre ; on peut, dans ce cas, changer la marche sans dételler.

22. Le *palonnier* se compose d'une pièce AOB qui peut osciller librement autour du point O (*fig.* 8). Il reçoit deux cordes fixées aux extrémités A et B, et qui reviennent s'attacher aux harnais du cheval.

Le palonnier a le même avantage que l'arcade mobile, mais il a l'inconvénient d'exiger des chevaux dressés.

23. Le travail journalier d'un cheval attelé à un manége dépend nécessairement de la vitesse qu'on lui fait prendre. Le che-

val allant au pas, c'est-à-dire avec une vitesse de $0^m,90$ à 1 mètre, peut exercer un effort moyen de 45 kilogrammes pendant une journée de 8 heures. Son travail journalier est de 1296000 kilogrammètres.

Le cheval allant au trot, c'est-à-dire avec une vitesse d'environ 2 mètres, peut exercer un effort moyen de 30 kilogrammes et travailler 5 heures par jour, ce qui donne un travail de 1080000 kilogrammètres.

24. Quant aux bœufs, mulets et ânes, on les fait toujours tirer au pas.

Le bœuf peut exercer un effort moyen de 60 kilogrammes avec une vitesse de $0^m,60$ pendant 8 heures; dans ces conditions, son travail journalier est de 1036800 kilogrammètres.

Le mulet peut exercer un effort moyen de 30 kilogrammes avec une vitesse de $0^m,90$ et travailler 8 heures par jour, ce qui donne un travail journalier de 777600 kilogrammètres.

Enfin l'âne, travaillant 8 heures par jour, peut exercer un effort moyen de 14 kilogrammes avec une vitesse de $0^m,80$; il produit un travail journalier de 322560 kilogrammètres.

Il faut, pour que ces animaux ne soient pas gênés dans les manéges, que la flèche ait au moins de 7 à 8 mètres de rayon.

§ 5. — TRANSPORT HORIZONTAL DES FARDEAUX

25. L'effort qu'un moteur animé doit exercer dans le transport horizontal des fardeaux, dépend essentiellement de la manière dont ce transport s'effectue.

Ainsi, en employant un traîneau glissant sur un sol uni, il faudra exercer un effort de 250 kilogrammes pour transporter un fardeau de 750 kilogrammes, car le frottement qui se développe dans ce cas, seule résistance que le moteur ait à vaincre, vaut le 1/3 environ de la pression.

Si le transport de ce même fardeau se faisait sur une route en bon état à l'aide d'une voiture ordinaire, l'effort à exercer ne serait que de 25 kilogrammes, le tirage valant le 1/30 de la charge.

Enfin cet effort ne serait que de $3^{kil},75$, si le transport s'effectuait sur un wagon roulant sur des rails, car dans ce cas le tirage ne vaut que les 5/1000 de la charge.

26. Dans le transport direct des fardeaux par les moteurs animés, il n'y a réellement pas de travail mécanique produit. Ainsi, un homme ne produirait aucun travail dans l'acception que l'on donne à ce mot en mécanique, s'il transportait directement un fardeau sur ses épaules ; car, l'action de la pesanteur étant verticale, il n'aurait aucune résistance à vaincre dans le sens du chemin parcouru. Cependant le moteur se fatigue en transportant le fardeau ; il fait évidemment un travail qui a son utilité, et par conséquent son unité de mesure et son prix en argent.

L'effet utile qui provient de ce mode de transport prend souvent, mais à tort, le nom de travail ; il est susceptible d'un maximum à égalité de fatigue du moteur, et il s'en éloigne d'autant plus que le poids, la vitesse et le temps s'approchent des limites qui ne sauraient être dépassées sans compromettre la santé du moteur.

27. Manivelle dynamométrique. — Nous avons dit qu'on détermine par expérience l'effort qu'un moteur animé doit exercer pour effectuer le maximum d'effet dont il est capable. S'il s'agit, par exemple, d'un homme qui agit sur une manivelle pour faire

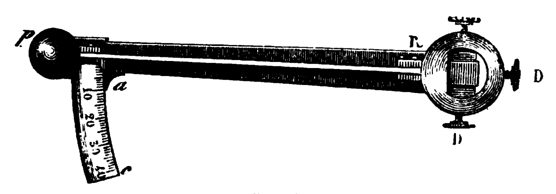


Fig. 9.

tourner un arbre, on arrive à ce résultat en employant un appareil appelé *manivelle dynamométrique*, dont la poignée *p* (*fig.* 9), est fixée à l'extrémité d'une lame de ressort R. On adapte cette manivelle à l'extrémité de l'arbre que l'on veut faire tourner, et on la cale à l'aide de vis de pression D.

Lorsqu'on fait tourner la manivelle, le ressort fléchit, et la quantité dont il se déforme indique la grandeur de la pression exercée sur la poignée. Un arc de cercle *ac*, gradué d'avance comme un dynamomètre, tourne avec la manivelle sans participer à la flexion du ressort, et il suffit de voir à quel point de division correspond un index que porte la lame R pour connaître le nombre de kilogrammes que représente cette flexion.

CHAPITRE III

DU VENT

EMPLOI DU VENT COMME MOTEUR

28. Le vent est le moteur le plus répandu dans la nature, car il se trouve partout et en grande quantité; mais relativement il est peu employé, et cela tient à la grande irrégularité de sa direction et de son intensité.

L'irrégularité de sa direction ne serait pas un grave inconvénient, vu les moyens d'orientation que l'on possède; mais l'irrégularité de son intensité fait qu'on ne peut le recommander à la grande industrie. Néanmoins, dans certains cas, il est d'une application utile et économique selon les localités, les circonstances et les conditions d'installation.

§ 1. — NAVIRES A VOILES

29. Le vent était autrefois l'unique moteur employé dans la navigation sur mer, et ce n'est que dans notre siècle qu'on lui a substitué la vapeur dans la plupart des navires. Tantôt la violence du vent expose les bâtiments aux plus grands dangers, tantôt le calme de l'atmosphère les force à rester dans une immobilité presque complète.

30. Le corps d'un navire se nomme *coque*, la partie submergée *carène* ou *œuvre vive*, la partie hors de l'eau *œuvre morte*, et le plan qui sépare la partie plongée de la partie flottante s'appelle *plan de carène* ou *de flottaison*.

On surmonte la coque d'un grand appareil de cordes et de mâts appelé *mâture*, destiné à recevoir les voiles sur lesquelles le vent doit exercer son action. Les voiles sont formées de lais de toile de $0^m,50$ à $0^m,60$ de largeur, cousus les uns aux autres; elles sont placées sur les mâts de façon à pouvoir se replier ou s'étendre à

volonté, et à prendre des directions différentes suivant les besoins.

31. Deux cas peuvent se présenter dans la navigation à voiles : 1° le navire doit suivre la même direction que le vent; 2° la marche du navire doit avoir une direction différente de celle du vent.

Dans le premier cas, on dispose la surface des voiles perpendiculairement à l'axe du navire; le vent les rencontrant de face, exerce sur elles une pression proportionnelle à son intensité, et produit le mouvement de progression du navire.

Dans le second cas, on dispose les voiles obliquement par rapport à l'axe du navire et à la direction du vent; celui-ci, en glissant sur les voiles, exerce sur elles une pression qui leur est toujours perpendiculaire; d'un autre côté, le gouvernail étant tourné dans le sens convenable, il résulte de la part du liquide des pressions qui sont obliques par rapport à l'axe du navire, et on conçoit que l'on peut toujours s'arranger, en combinant l'obliquité des voiles et l'inclinaison du gouvernail, de façon à ce que la résultante des pressions exercées par le vent et par le liquide ait pour direction celle que doit suivre le navire.

En disposant convenablement les voiles et le gouvernail, on peut arriver à marcher presque en sens contraire du vent; on dit alors qu'on marche *au plus près du vent*.

§ 2. — MOULINS A VENT

32. L'action du vent n'est pas seulement employée dans la navigation. Depuis longtemps, cette action est également utilisée au moyen d'appareils spéciaux appelés *moulins à vent*.

La vitesse la plus convenable du vent pour les moulins est de 6 à 7 mètres; aussitôt qu'elle s'en écarte notablement, on ne peut plus l'employer utilement, ce qui fait qu'un moulin à vent ne peut guère travailler plus de 100 à 120 jours par an.

Donc, toutes les fois qu'on aura à effectuer un travail continu, il faudra rejeter l'emploi du vent comme moteur; dans une usine, par exemple, on ne saurait l'utiliser. On peut l'employer avec avantage lorsqu'il s'agit de travaux accidentels, comme pour élever l'eau dans un réservoir, pour irriguer ou pour dessécher les marais, comme cela se pratique en Hollande.

33. Les moulins à vent se divisent en deux classes :

1° Moulins à vent s'orientant à bras;

2° Moulins à vent s'orientant d'eux-mêmes.

34. La première classe est la plus ancienne. Ces moulins se

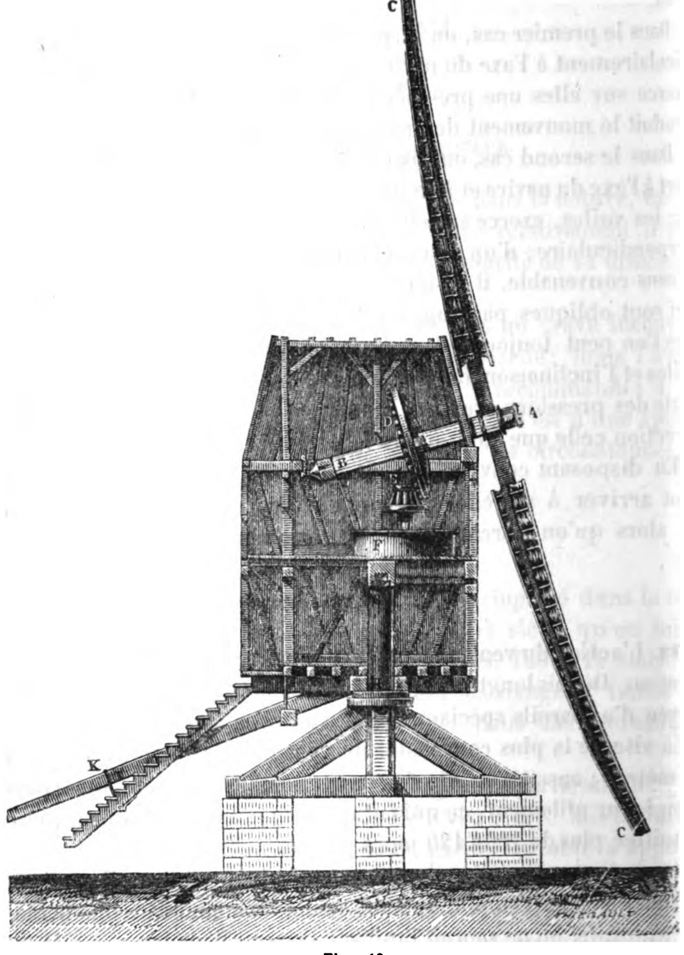


Fig. 10.

composent d'une maisonnette en charpente (*fig.* 10), mobile autour d'un arbre vertical GH. Un autre arbre AB, incliné d'en-

viron 10° à l'horizon, porte à son extrémité en dehors du moulin, 4 bras C de 10 à 12 mètres de longueur, disposés à angle droit et respectivement perpendiculaires à l'arbre qui les porte.

Les ailes sont en planches ou en toiles; dans le premier cas, on dispose les planches d'une manière analogue aux lames des persiennes. Dans le second cas, le bras porte, perpendiculairement à sa longueur, plusieurs lattes équidistantes reliées à leurs extrémités par deux autres lattes assez fortes, sur lesquelles sont fixées les toiles destinées à recevoir l'action du vent.

L'extrémité de l'aile la plus rapprochée de l'arbre se trouve à une distance d'environ 2 mètres de l'axe. La direction des ailes doit être inclinée par rapport à l'axe de l'arbre AB, dont la direction est la même que celle du vent, de manière à recevoir obliquement son action. Si une aile avait sa face perpendiculaire à l'axe de l'arbre, elle recevrait en face l'action du vent qui exercerait sur elle une pression ne tendant nullement à le faire tourner, tandis que si on donne à l'aile une certaine inclinaison par rapport à l'arbre, la pression qu'elle éprouve de la part du vent étant toujours normale à sa surface, sera oblique par rapport à l'arbre, et cette pression tendra à le faire tourner dans le sens convenable.

La vitesse linéaire augmentant à mesure qu'on s'éloigne de l'axe, il importe, pour que le vent agisse utilement, que la surface des ailes soit gauche, c'est-à-dire que l'obliquité de la surface des ailes, sur la direction de l'arbre, ne soit pas la même sur toute la longueur de chacune d'elles. Cette obliquité va en diminuant depuis l'extrémité de l'aile située près de l'arbre, jusqu'à l'autre extrémité; ordinairement on s'arrange de façon que la partie de l'aile la plus rapprochée de l'arbre fasse, avec la direction de cet arbre, un angle de 60°, et que la partie la plus éloignée fasse avec cette même direction un angle de 80°.

L'arbre AB porte une roue à alluchons D qui engrène avec un pignon E fixé sur l'arbre portant la meule courante. Cette meule mobile est située à une très-petite distance d'une autre appelée meule dormante.

Pour monter au moulin, on dispose à sa partie inférieure une longue et forte pièce de bois K portant un escalier; de plus, à l'aide de cette pièce qu'on nomme queue, on peut faire tourner le moulin de manière à placer l'arbre AB dans la direction du vent.

L'axe de rotation ne correspond pas avec celui du moulin ; il est disposé de façon à ce qu'il y ait équilibre entre les parties situées de chaque côté.

25. Quelquefois, on emploie des moulins dont le toit seul est mobile ; alors l'arbre incliné et la queue sont portés par la calotte tournante, et l'axe de rotation correspond avec celui de cette calotte.

26. Les moulins que nous venons de décrire peuvent, suivant les cas, être frappés par derrière ou par devant. Les ailes frappées par derrière ont un avantage : c'est que le moulin devient une véritable girouette, et s'oriente de lui-même ; leur inconvénient est que le corps du bâtiment cache une grande partie de la surface des ailes, ce qui occasionne une perte de travail ; aussi, ils sont très-peu employés.

Il y a pourtant un cas exceptionnel où cette sorte de moulin peut être avantageusement employée : c'est celui où l'on aurait à faire marcher une corderie, qui est un bâtiment tout en longueur et très-bas ; le moulin n'aurait plus à contenir que la transmission, et pourrait être placé sur une plate-forme supportée par des colonnes en fonte qui n'empêcheraient pas le vent d'arriver sur les ailes.

27. Comme exemple des moulins s'orientant d'eux-mêmes, nous citerons les moulins à vent auto-régulateurs construits par M. Formis-Benoît, que nous avons étudiés à l'Exposition universelle de 1867.

Ce moulin se compose de quatre montants en bois ou en fonte A, (*fig.* 11) reliés entre eux à une certaine hauteur par un croisillon *b* portant un trou en son milieu et qui sert, de même que la pièce en fonte *e*, percée également d'un trou, qui forme le sommet du bâtis, à laisser passer et à guider le manchon vertical *c* de l'appareil. Ce manchon est terminé à sa partie supérieure par une fourche *f* à deux branches, portant à ses extrémités des paliers destinés à supporter l'arbre horizontal *h* qui reçoit son mouvement des ailes. Le manchon est ajusté à frottement doux dans le croisillon et dans la pièce *e*, sur laquelle il repose, de manière à pouvoir tourner dans tous les sens pour l'orientation de l'appareil.

L'arbre horizontal *h* est creux, et fait corps avec un disque à huit nervures, qui forme avec l'axe de l'arbre un angle de 80°. Dans

chacune des nervures vient s'emmancher un bras en bois *i*, de $3^m,50$ environ de longueur, et y est maintenu à l'aide de boulons.

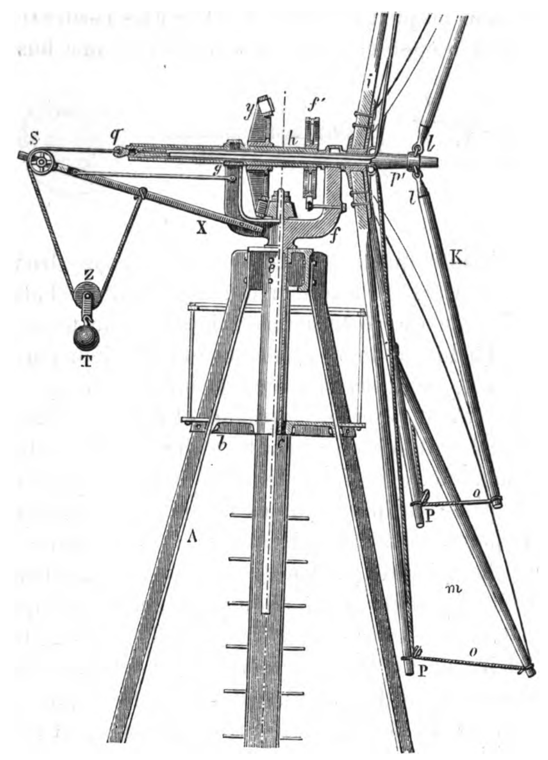


Fig. 11.

Une antenne K est reliée à chacun des bras à l'aide d'une douille terminée par un anneau qui lui permet de tourner dans tous les sens autour du point d'attache avec le bras.

Huit voiles en toile *m*, en forme de trapèze, sont fixées aux bras par un de leurs longs côtés ; des deux sommets libres, l'un vient s'attacher sur l'antenne, et l'autre, à l'aide d'une corde, au second bras suivant. L'extrémité libre des antennes reçoit une corde O qui passe sur deux poulies de renvoi P et *p'*, fixées, l'une à l'extrémité du bras suivant, l'autre sur le disque près du centre, et vient s'attacher à une pièce *j*, nommée *rat*, qui peut glisser à l'in-

térieur de l'arbre horizontal *h*. Cette pièce, indiquée à part à une plus grande échelle (*fig.* 12), se trouve creusée à l'intérieur de 8 rainures dans lesquelles viennent se loger les cordes O. De plus, deux des arêtes opposées que présente le rat, une fois cannelé,

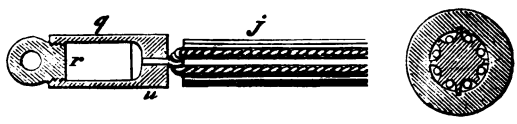


Fig. 12.

sont plus saillantes que les autres, et pénètrent dans deux rainures rectilignés creusées à l'intérieur et tout le long de l'arbre *h* ; de cette manière le rat se trouve entraîné dans le mouvement de rotation de l'arbre, et les 8 cordes conservent leur parallélisme. Derrière le rat, se trouve un petit cylindre creux *q*, en fer, de manière à servir de réservoir à graisse, et fermé par un bouchon à vis *v* auquel s'attache une corde S dont l'autre extrémité est invariablement fixée à une potence X boulonnée à la fourche *f*. Cette corde passe sur une poulie de renvoi montée sur la potence, et porte la poulie mobile Z qui supporte le contre-poids T.

Le fond du cylindre *q* est percé d'un trou dans lequel passe librement la tige d'un gros boulon à tête sphérique, qui vient se fixer au rat et fait corps avec lui. Par cette disposition, le cylindre *q* est solidaire du rat pour le mouvement rectiligne alternatif, mais nullement pour le mouvement de rotation que ce dernier reçoit de l'arbre *h*. Cet appareil forme girouette, et s'oriente de lui-même.

Les différentes pièces que nous venons de décrire permettent d'abandonner la machine complétement à elle-même, ne s'en occupant que de temps à autre pour graisser ses différentes articulations, sans qu'elle soit exposée à se briser sous l'action de coups de vent trop forts. Lorsque la pression que le vent exerce sur les voiles ne dépasse pas la tension de la corde S, c'est-à-dire la moitié environ du poids T, le rat se trouve à l'extrémité de sa course, et la surface des voiles est dans le plan formé par le bras qui la supporte et le bras suivant. Mais si le vent augmente, ou si les résistances à vaincre par le moteur diminuent, la pression sur les voiles dépassera la tension de la corde S, le rat avancera dans

l'intérieur de l'arbre h, et les extrémités libres des antennes se sépareront de plus en plus des poulies P. Alors, l'angle formé par la surface de chaque voile et le plan des deux bras consécutifs, deviendra de plus en plus grand ; par conséquent les voiles recevront de plus en plus obliquement l'action du vent, et en éprouveront de moins en moins d'effort, jusqu'à ce que la tension des huit cordes O ne dépasse pas la tension de la corde S. La longueur de la course a été déterminée de façon à ce que la surface des voiles puisse être perpendiculaire au plan formé par deux bras consécutifs.

Un fil de fer de 6 à 8 millimètres de diamètre sert à consolider les bras et à les relier entre eux.

En sachant que le 1/3 de la pression exercée par le vent sur chaque voile se porte sur l'extrémité libre de l'antenne, et par suite sur la corde O, on pourra régler le contre-poids T de manière à marcher avec la charge voulue.

L'arbre h porte un frein f' pour arrêter la machine et une roue à alluchons y communique le mouvement à un arbre vertical qui tourne à l'intérieur du manchon portant la fourche f. Ce moteur a été construit et exposé pour l'élévation de l'eau.

28. Détermination de la vitesse du vent. — La vitesse du vent peut se déterminer en observant celle d'un corps léger abandonné à la hauteur de l'arbre qui porte les ailes. Le plus souvent, on la détermine à l'aide d'appareils spéciaux appelés *anémomètres*. Lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande exactitude, on peut se servir d'un tube en U, ABC (*fig.* 13), dont l'une des branches se recourbe horizontalement. On met de l'eau dans ce tube, et on dirige la branche horizontale en sens inverse de la vitesse du vent. La pression que celui-ci exerce sur le liquide le fait descendre dans la branche CB et monter dans la branche AB ; et on admet que la différence de niveau dans les deux branches est proportionnelle à $\frac{V^2}{2g}$ qu'on appelle *la hauteur due à la*

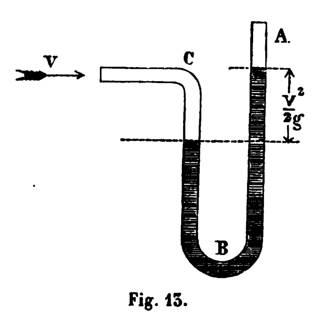


Fig. 13.

vitesse V *du vent*. Cet instrument porte le nom d'anémomètre de Lind.

Il résulte des observations de Smeaton, confirmées par les expériences de Coulomb, que lorsqu'un moulin marche à vide, l'extrémité des ailes prend une vitesse égale à 4 fois celle du vent.

39. Formule du travail dans les moulins à vent. — L'expression du travail transmis dans les moulins à vent est donnée par la formule empirique :

$$T = KSV^3,$$

dans laquelle K est un coefficient égal à 0,13, S la surface d'une voile, et V la vitesse du vent.

Pour obtenir le maximum d'effet utile du moteur, il faut que la vitesse de l'extrémité de l'aile soit les 2,60 de celle du vent.

EXERCICES

I. — Déterminer le travail transmis à la circonférence extérieure d'un moulin à vent, sachant que la vitesse du vent par seconde est de 5m,85, la largeur d'une des ailes 1m,84, la longueur 11m,20.

On demande en outre quelle doit être la vitesse de l'extrémité des ailes pour que le moteur produise son maximum d'effet utile.

II. — On demande quelle est la vitesse à l'extrémité des ailes d'un moulin à vent de la force de 12 chevaux, la surface d'une aile étant de 19mc,24. Le moteur fonctionne à son maximum d'effet utile.

III. — Calculer la surface à donner aux ailes d'un moulin à vent qui doit effectuer un travail de 485 kilogrammètres, la vitesse du vent par seconde étant de 4m,67.



CHAPITRE IV

HYDRAULIQUE

40. L'*hydraulique* est la partie de la mécanique qui s'occupe des fluides et de leur emploi comme moteurs.

Elle se divise en deux parties : l'*hydrostatique* qui traite des conditions d'équilibre des fluides, et l'*hydrodynamique* qui comprend l'étude des machines dans lesquelles ces fluides sont les moteurs.

§ 1. — NOTIONS SUR LE MOUVEMENT DES FLUIDES

41. Avant de nous occuper des moteurs hydrauliques, nous croyons indispensable de faire connaître quelques principes relatifs au mouvement et à l'écoulement des liquides, qui nous permettront d'exposer d'une manière complète et précise l'étude des divers récepteurs.

42. Mouvement permanent. — On dit qu'un courant est parvenu à l'état de *régime permanent* ou de *mouvement permanent*, lorsque la vitesse des molécules, considérée en un même point, reste constante en grandeur et en direction, de sorte qu'entre deux sections quelconques du courant, les mêmes phénomènes se présentent, quoique ces sections soient composées de molécules différentes, et pouvant avoir des vitesses très-différentes.

43. Écoulement par un orifice en mince paroi. — L'écoulement en *mince paroi* a lieu toutes les fois que l'épaisseur de la paroi du vase sur laquelle est percé l'orifice est moindre que la moitié de la plus petite dimension de l'orifice, et qu'elle n'excède pas $0^m,05$ ou $0^m,06$.

44. Considérons un liquide en équilibre dans un vase de forme quelconque (*fig.* 14 et 15), et pratiquons un orifice soit au fond, soit dans les parois latérales, au-dessous de la surface de niveau. A cet instant, la pression qui s'exerce sur les molécules placées à

l'orifice, n'est plus équilibrée par la résistance de la paroi, et l'écoulement du liquide a lieu avec une faible vitesse d'abord, mais qui augmente rapidement et atteint bientôt son maximum.

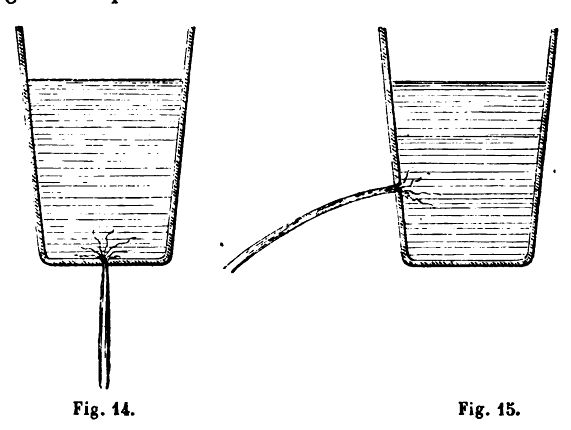


Fig. 14. Fig. 15.

La direction que prend la veine fluide est verticale ou parabolique, suivant qu'elle s'échappe par le fond ou par l'une des parois latérales.

L'expérience prouve que la veine diminue de section à partir de l'orifice jusqu'à une très-petite distance où elle devient sensiblement constante. Ce phénomène s'appelle *contraction de la veine fluide;* il est dû à ce que les filets fluides affluant de toutes parts de l'intérieur du vase vers l'orifice, les filets qui y coulaient à peu près parallèlement à la paroi, ne peuvent lui devenir brusquement perpendiculaires.

45. Torricelli a démontré, dans le théorème qui porte son nom, que la vitesse d'un liquide s'écoulant en mince paroi, est la même que celle que posséderait un corps tombant en chute libre, et de la même hauteur h, distance du centre de l'orifice au niveau supérieur.

Ainsi, quelle que soit la forme du vase et la direction de la veine fluide, la vitesse d'un liquide s'écoulant en mince paroi, est

$$V = \sqrt{2gh},$$

en désignant par V cette vitesse, et par h la hauteur du liquide au-dessus du centre de l'orifice.

46. Le théorème de Torricelli se vérifie expérimentalement d'une manière très-simple. Prenons un vase A (*fig.* 16), muni d'un tube horizontal B, percé d'un orifice O. Le liquide s'élevant au niveau CD et l'orifice étant débouché, le jet s'élèvera presque à la hauteur du liquide contenu dans le vase, et il s'y élèverait tout à fait si des causes extérieures, la résistance de l'air, le frottement contre les parois, et les molécules qui retombent, ne venaient gêner le mouvement ascensionnel : par conséquent le liquide doit avoir à sa sortie la même vitesse que s'il tombait de la hauteur h.

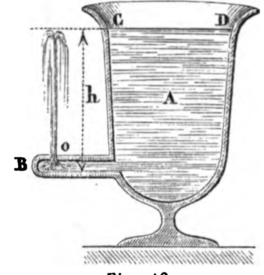


Fig. 16.

47. La quantité d'eau écoulée pendant l'unité de temps se nomme la *dépense*. Par suite, la dépense théorique s'obtient en multipliant la section Ω de l'orifice par la vitesse d'écoulement, et l'on a

$$Q = \Omega\sqrt{2gh}.$$

Mais en pratique, on est loin d'obtenir ce résultat, car il faudrait que Ω représentât la section de la veine à l'endroit de la plus forte contraction, et non la section de l'orifice comme nous l'avons supposé.

L'expérience prouve que, pour avoir la dépense effective, il faut multiplier la dépense théorique par le coefficient 0,62, et on a la formule :

$$Q = 0{,}62\,\Omega\sqrt{2gh},$$

qui donne la quantité de liquide réellement écoulée pendant l'unité de temps par un orifice en mince paroi.

48. Ajutages. — On appelle *ajutage* une portion de tuyau que l'on adapte à un orifice en mince paroi, et qui en modifie sensiblement la dépense, comme nous le verrons plus loin, suivant sa forme et ses dimensions.

On distingue deux sortes d'ajutages : les ajutages cylindriques et les ajutages coniques, convergents ou divergents.

49. Écoulement par un orifice dont l'entrée est évasée. — Pour atténuer les effets de la contraction dans le cas d'orifices en mince paroi, on munit ceux-ci d'ajutages ayant la forme de tronc

de cône (*fig.* 17), dont la grande base est en dedans, et les bords intérieurs arrondis sont raccordés avec les parois de manière à obtenir exactement la forme de la veine. On évite ainsi ce qu'on appelle les *pertes de charge* dues aux changements brusques de direction des filets liquides, et s'il n'y avait aucun frottement contre les parois, l'expression de la dépense effective serait :

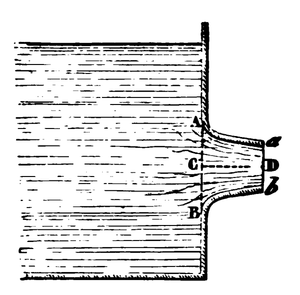


Fig. 17.

$$Q = \Omega\sqrt{2gh}.$$

Des expériences de MM. Poncelet et Lesbros ont fourni un coefficient qui est de 0,98, de sorte que l'on a réellement pour la dépense effective :

$$Q = 0{,}98\,\Omega\sqrt{2gh}.$$

D'après Michelotti, les dimensions les plus convenables pour obtenir la dépense maximum sont : AB = 100 ; *ab* = 39 et CD = 70.

Eytelwein a donné pour ces mêmes quantités les nombres 10.5 et 8.

La dépense variant d'après les dimensions de l'orifice, il existe des tableaux, résultant de nombreuses expériences, qui indiquent le coefficient à employer dans chaque cas pour obtenir cette dépense.

50. Écoulement par un orifice évasé suivi d'un canal. —

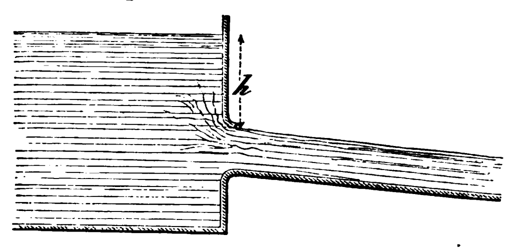


Fig. 18.

Dans ce cas (*fig.* 18), qui est celui qui se présente le plus ordinairement dans l'établissement des récepteurs hydrauliques, la

théorie prouve que la vitesse est encore donnée par la formule :

$$V = \sqrt{2gh},$$

avec la différence que h ne représente pas ici la distance du niveau supérieur au centre de l'orifice, mais la hauteur de ce niveau au-dessus du sommet de l'orifice, c'est-à-dire la différence de niveau entre le bassin et le canal.

La dépense théorique est donnée par la formule :

$$Q = \Omega \sqrt{2gh}.$$

Et pour obtenir la dépense effective, il suffit de multiplier le résultat précédent par un coefficient qui varie suivant la charge sur le centre, et les dimensions de l'orifice.

51. Écoulement par un déversoir. — L'écoulement par déversoir a lieu lorsque l'eau s'écoule au-dessus d'un obstacle établi à dessein dans un courant. L'eau étant ainsi retenue, le niveau d'amont s'élève jusqu'à ce qu'elle passe au-dessus du sommet du déversoir appelé *crête*, et au bout de quelques instants, le volume d'eau dépensée sera le même qu'à l'état primitif.

Lorsque l'eau est sur le point de traverser le barrage, il se produit un phénomène particulier observé pour la première fois par Bidone, et soumis au calcul par M. Bélanger. La surface libre subit un peu avant son passage sur la crête, une dénivellation assez prononcée, puis redevient horizontale, pour tomber ensuite dans le bief d'aval : c'est ce phénomène qui prend le nom de *ressaut*.

52. La théorie est jusqu'à ce jour impuissante pour déterminer les lois de l'écoulement d'un liquide par un déversoir à mince paroi ; mais néanmoins, dans un cas presque exceptionnel que nous allons supposer, on peut s'en rendre compte.

Supposons que l'épaisseur du barrage (*fig.* 19), appelée plus ordinairement *seuil*, présente une surface assez grande pour que le liquide puisse être considéré comme horizontal, et les filets comme étant animés d'une vitesse rectiligne et uniforme.

D'après ce que nous avons vu (**50**) dans le cas d'un orifice suivi d'un canal, la vitesse des filets liquides en AB sera exprimée par

$$V = \sqrt{2gh},$$

h étant la différence de niveau produite sur le seuil par le ressaut.

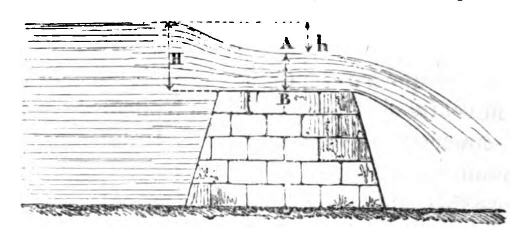


Fig. 19.

La dépense théorique sera donnée par la formule :

$$Q = \Omega V = \Omega \sqrt{2gh}.$$

Si L représente la largeur de la section, et H la hauteur du liquide au-dessus de la crête avant le ressaut, on peut écrire :

$$Q = L(H\text{-}h)\sqrt{2gh},$$

et par suite la dépense par mètre courant sera

$$Q = (H\text{-}h)\sqrt{2gh}.$$

Si nous supposons $h = o$ ou $H = h$, la dépense Q devient égale à 0 ; il y a donc entre les valeurs de H et h un certain rapport qui donne le maximum de dépense, et l'expérience prouve que ce maximum a lieu lorsque

$$h = 1/3\ H.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de Q, on a :

$$Q = \left(H - \frac{H}{3}\right)\sqrt{2g\frac{H}{3}}$$

$$\text{ou } Q = \frac{2H\sqrt{2gH}}{3\sqrt{3}} = 0{,}3852\ H\sqrt{2gH}.$$

Cette formule ne pourrait être employée dans les circonstances ordinaires sans une correction relative au frottement et à la contraction contre les parois latérales ; mais dans le cas où le déversoir est mince, on a trouvé par expérience que cette formule, quoique la théorie précédente ne soit plus applicable, donne très-approximativement la dépense effective.

MM. d'Aubuisson et Castel ont fait à Toulouse, en 1835 et 1836,

des expériences en évitant la contraction latérale ; ils ont trouvé pour la dépense :

$$Q = 0,443 H \sqrt{2gH}$$

$$\text{ou } Q = 1,96 \sqrt{H}.$$

C'est cette formule qu'il conviendra d'employer lorsque le déversoir aura une grande étendue, car alors la contraction latérale est négligeable.

53. Écoulement par un ajutage cylindrique. — Lorsqu'un orifice en mince paroi se trouve prolongé par un ajutage cylindrique, l'écoulement peut avoir lieu de deux manières différentes.

Si la longueur du tuyau n'excède pas une fois et demie le diamètre de l'orifice, le liquide n'en touche pas les bords, et aucune modification n'est apportée à la dépense ; mais si ce tuyau a une longueur égale au moins à trois fois le diamètre de l'orifice, le liquide en remplira la capacité intérieure, et dans ce cas on dit que l'écoulement a lieu *à gueule-bée*.

Si on admet que les filets ont tous la même vitesse après leur sortie du tuyau, le volume de liquide dépensé par un tuyau de section Ω et sous la charge h sera exprimé par

$$Q = \Omega \sqrt{2gh}.$$

L'expérience constate que cette dépense doit être modifiée par un coefficient qui est égal à 0,82, de sorte que

$$Q = 0,82\, \Omega \sqrt{2gh}.$$

Nous avons vu (**47**) que, pour un orifice en mince paroi, on admet que

$$Q = 0,62\, \Omega \sqrt{2gh}.$$

On voit donc que l'on augmente la dépense au moyen des ajutages cylindriques : voyons quelle en est la cause. Lorsque le liquide commence à s'écouler, la veine, d'abord détachée de la paroi, entraîne une partie de l'air qui l'entoure ; l'air ainsi dilaté à l'intérieur exerce une pression plus faible sur la veine à l'endroit de la contraction, et la vitesse de l'eau s'accroît ; mais la pression atmosphérique s'exerçant toujours à l'extérieur, il y a une différence de pression qui ralentit la veine et la force à prendre la forme du tuyau et à suivre les parois, sans empêcher pour cela la contraction qui a toujours lieu à une distance de

l'orifice égale à environ la moitié de son diamètre. Mais ce ralentissement est moindre que l'augmentation de vitesse dont nous avons parlé plus haut, d'où il s'ensuit que la dépense est augmentée.

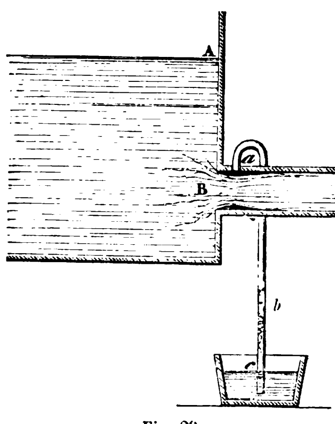


Fig. 20.

54. Venturi a vérifié pour la première fois le fait de la diminution de pression à l'endroit de la contraction. Il adapta à l'ajutage un tube en verre recourbé *abc* (*fig.* 20) dont la partie supérieure communique avec la veine fluide à l'endroit de la contraction, et dont l'autre extrémité plonge dans un vase rempli d'eau. Dès que l'écoulement commence, on voit le liquide s'élever dans le tube à une hauteur *bc* au-dessus du niveau extérieur. En mesurant cette hauteur, il trouva qu'elle était égale aux 3/4 de AB.

Une application des ajutages cylindriques a été faite dans l'appareil suivant :

55. Bélier hydraulique. — Le bélier hydraulique est un appareil fort ingénieux construit pour la première fois par Montgolfier en 1796, et qui a pour but, en se servant de l'eau d'une chute, d'en élever une partie à un niveau supérieur.

Il se compose d'un tuyau horizontal AA (*fig.* 21), appelé *corps du bélier*, amenant l'eau d'une chute ou d'un réservoir ; il est percé d'un trou K appelé *tête*, qui dans les premiers moments est ouvert, et peut être fermé au moyen d'une soupape à boulet P appelé soupape *d'arrêt*. Ce même tuyau communique, au moyen d'un autre orifice, avec une capacité ou réservoir d'air R dans laquelle aboutit l'extrémité du tuyau d'ascension C. Cet orifice est fermé à l'aide d'une soupape B appelée soupape d'*ascension*.

Voyons maintenant quel est le jeu de l'appareil. L'eau arrive dans le tuyau horizontal A avec une vitesse :

$$V = \sqrt{2gH}$$

H étant la hauteur de chute. Une partie du liquide s'écoule alors par l'orifice K qui est ouvert, et la contraction se produit comme dans le cas d'un ajutage cylindrique ; il y a donc une diminution de pression, et la différence des pressions de chaque côté de la

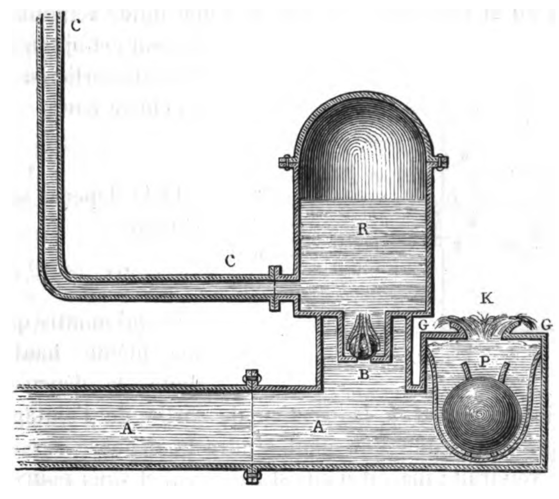


Fig. 21.

soupape force cette dernière à monter, et à fermer l'orifice K. A ce moment, on entend un choc assez violent appelé *coup de bélier*. Or l'eau qui arrive avec une puissance vive exprimée par

$$1/2\ MV^2$$

ne trouvant plus d'issue, presse les parois du conduit, soulève la soupape d'ascension et se rend dans le réservoir R en y comprimant l'air qu'il contient. Au bout de quelques instants, le liquide est ramené au repos, et cette soupape retombe sur son siége par suite de son poids et de la contraction qui produit une diminution de pression. Immédiatement, la soupape P, n'étant plus pressée, ouvre de nouveau l'orifice K et vient prendre sa première position. Pendant ce temps, l'air qui est comprimé dans la cloche presse sur le liquide qui y est contenu, et le force à monter dans le tuyau vertical C où il peut être élevé à une assez grande hauteur.

Une partie de l'eau de la chute ou du réservoir reste à la partie inférieure; néanmoins, il résulte de l'expérience, qu'un bélier

hydraulique établi dans de bonnes conditions, et fonctionnant bien, fournit environ les 0,60 du travail moteur.

56. Écoulement par un ajutage divergent. — Supposons qu'un ajutage, de la forme représentée par la figure 22, soit adapté à un orifice évasé, et que la veine fluide remplisse entièrement cet ajutage. La vitesse de sortie en AB sera exprimée par :

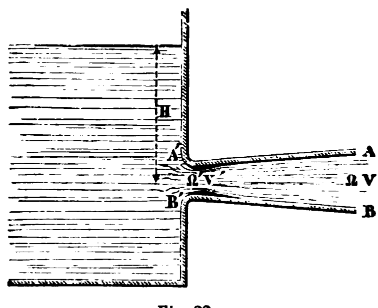


Fig. 22.

$$V = 2gH$$

Et la dépense sera donnée par

$$Q = \Omega' V' = \Omega V = \Omega \sqrt{2gH}.$$

Ce qui montre que, sous une même hauteur de chute, la dépense varie proportionnellement à la section de sortie de l'ajutage. Cela porterait à croire que l'on peut rendre la dépense aussi grande qu'on le voudrait ; mais il n'en est pas ainsi, et voici pourquoi : la vitesse du liquide à la sortie de l'ajutage est plus petite que celle qu'il possède à son passage dans la section A'B', puisqu'elle remplit une capacité plus grande. Or l'axe de l'ajutage étant horizontal, la pesanteur n'agit aucunement sur le liquide, et par conséquent la diminution de vitesse ne peut provenir que de la différence des pressions qu'il supporte en A'B' et en AB, et comme la pression à l'endroit de la contraction ne peut devenir nulle, on conçoit que la dépense ne peut être augmentée indéfiniment.

Si la section AB était trop grande par rapport à la section A'B', le liquide se détacherait de la paroi, et nous retomberions dans le cas d'un orifice évasé suivi d'un canal.

57. Résistance de l'eau contre les parois des tuyaux de grande longueur. — Si nous observons le mouvement d'un liquide dans un tuyau d'une assez grande longueur et parfaitement cylindrique, on ne peut plus négliger la résistance que celui-ci exerce sur le liquide, et qui diminue sa vitesse dans des proportions assez grandes. De plus, l'expérience démontre que la

vitesse diminue à mesure que le tuyau est plus long, quoique le diamètre et la charge restent constants.

Il est facile de se rendre compte de ce fait. Les molécules liquides avoisinant la paroi reçoivent de cette dernière une action en sens contraire de leur mouvement, provenant du frottement de ces molécules contre le tuyau, et qui ralentit leur vitesse. La deuxième couche de molécules étant animée d'une vitesse alors plus grande, donne encore lieu à un frottement tendant à accélérer les premières, et à ralentir les suivantes, et ainsi de suite. De sorte que, si nous considérons le liquide comme divisé en couches cylindriques minces *a*, *b*, *c* (*fig.* 23), concentriques au tuyau, chacune d'elles aura une vitesse différente; celle qui sera le plus près des parois aura la plus faible vitesse, et celle qui se trouvera au centre aura la plus forte.



Fig. 23.

Si les vitesses de toutes ces couches étaient égales, l'expression de la dépense serait facile à déterminer, car il suffirait de multiplier la section du tuyau par la vitesse commune et unique. Ici, il faudra multiplier la section par la vitesse moyenne.

58. En profitant des travaux nombreux faits avant lui, de Prony fit, en 1804, une expérience de laquelle il résulte que la résistance R d'un tuyau sur un liquide en mouvement permanent est représentée par la formule :

$$R = \Pi LX(aU + bU^2).$$

En appelant L la longueur du tuyau dont le périmètre de la section est X, U désignant la vitesse moyenne, et Π le poids du mètre cube de liquide. Les deux constantes *a* et *b* sont deux coefficients dont la valeur est

$$a = 0{,}0000173$$
$$b = 0{,}000348$$

Cette formule fait voir que la résistance exercée par le tuyau varie proportionnellement à la vitesse du liquide. Il faudra donc, pour ne pas perdre une trop grande partie de la puissance motrice, limiter la vitesse moyenne. En général, il convient de ne pas dépasser 2 mètres, surtout si des robinets sont placés de distance en distance, car il se produirait des chocs assez violents

qui, au bout d'un certain temps, pourraient occasionner des accidents. Il ne faut pas non plus adopter une vitesse trop faible, car si l'eau contient des matières étrangères en suspension, elles se déposeraient sur les parois.

59. Mouvement de l'eau dans les canaux. — Les canaux sont des voies artificielles établies, soit pour rendre la navigation d'un cours d'eau plus facile, lorsque celui-ci ne s'y prête pas dans toute sa longueur, et dans ce cas la pente du canal est à peu près la même que celle du cours d'eau, soit pour faire communiquer deux fleuves ou deux rivières ensemble. On peut aussi établir des canaux s'alimentant des eaux provenant des pluies et de la fonte des neiges, qu'on recueille dans d'immenses réservoirs; ainsi le canal du Midi, dont l'importance est si connue, est alimenté par le magnifique et grandiose bassin de Saint-Ferréol, qui lui-même est alimenté par celui de Lampy.

60. Si le canal est supposé avoir dans toute son étendue la même forme et les mêmes dimensions, c'est-à-dire si la section en un point quelconque est toujours la même, l'inclinaison du lit étant constante, le mouvement du liquide sera le même sur tout le parcours. Les molécules liquides auront, dans ce cas, des vitesses rectilignes sensiblement uniformes, et la surface libre se trouvera dans un plan parallèle à celui du fond.

61. Le mouvement de l'eau dans un canal peut être considéré comme celui d'un liquide dans un tuyau de dimensions uniformes, avec cette différence que, dans le premier cas, l'eau présente une surface libre, tandis que, dans le second, elle est environnée de outes parts. On remarque, comme dans les tuyaux, que les molécules liquides sont animées de vitesses très-différentes, et du reste cela se conçoit facilement, car les filets qui sont en contact avec a paroi, éprouvent de leur part une résistance assez grande tendant à ralentir leur vitesse ; ceux-ci retardent à leur tour les filets voisins, et ainsi de suite; d'où il résulterait que le maximum de vitesse aurait lieu au milieu de la surface libre du liquide, pour décroître ensuite jusqu'à la paroi où elle atteint son minimum. Cependant, l'expérience constate que la plus grande vitesse a lieu, non au milieu de la surface, mais un peu au-dessous.

On peut s'assurer de ce fait, en prenant deux balles de sureau '*fig.* 24), liées par un fil de faible longueur; si on jette ces boules

dans une eau tranquille, après avoir préalablement lesté l'une d'elles, de manière à rendre sa densité plus forte que celle du liquide, et de telle façon que la plus légère ne dépasse pas la surface libre, le fil prendra une position verticale. Mais si on jette cet appareil au milieu d'un canal, le fil s'inclinera dans le sens du courant, ce qui indique la différence de vitesse. Il doit en être ainsi, car les molécules qui forment la surface libre ont à vaincre la résistance de l'air qui diminue leur vitesse.

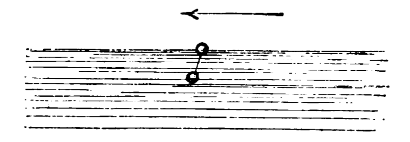


Fig. 24.

62. Dans les besoins usuels, on appelle *vitesse moyenne* une quantité qui, multipliée par la section transversale, donne la dépense effective, c'est-à-dire le volume de liquide écoulé pendant l'unité de temps ; ou encore la vitesse dont toutes les molécules doivent être animées, pour que la quantité d'eau qui traverse une section, pendant ce même temps, soit toujours la même.

La vitesse moyenne U a, avec la vitesse maximum V, la relation suivante :

$$\frac{U}{V}=\frac{V+2,37}{V+3,15}.$$

Dans les canaux ordinaires, la vitesse moyenne est environ les 0,80 de la vitesse maximum ; si le cours d'eau a une assez grande largeur, ce rapport diminue, et peut s'abaisser jusqu'à 0,62.

Il est très-bon de couper fréquemment les herbes et les roseaux qui croissent sur les parois, car les résistances éprouvées deviennent plus grandes, et le coefficient peut s'abaisser jusqu'à 0,60 et au-dessous.

63. La vitesse au fond du canal, d'après M. Morin, est en fonction de la vitesse moyenne.

$$W=U-6\sqrt{\frac{A}{S}-\frac{H}{L}};$$

et en fonction de la vitesse maximum, elle est

$$W=V-20\sqrt{\frac{A}{S}-\frac{H}{L}},$$

A étant l'aire du profil du canal, S le contour mouillé, H la pente totale et L la longueur.

D'après les expériences de M. Dubuat, on a

$$W = 0{,}60\,V \quad \text{et } U = 1/3\,(V + W).$$

Et si on admet

$$U = 0{,}80\,V, \quad \text{et } W = 0{,}60\,V,$$

on en déduit

$$U = 1{,}33\,W.$$

D'après la nature du fond du canal, on détermine la vitesse à adopter, car on ne peut dépasser la limite à laquelle le sol serait dégradé.

Ainsi, pour des terres détrempées, la limite de la vitesse sera de $0^m,076$, tandis que pour des roches cette limite pourra être portée à $3^m,05$.

64. Dans la construction d'un canal, il faut autant que possible diminuer la résistance des parois, afin d'avoir la plus grande vitesse correspondant à une pente déterminée; et l'expérience apprend que, pour approcher autant que possible de cette vitesse maximum, lorsque le canal est en terre et les parois en talus, ce qui est le cas le plus ordinaire, la largeur du lit doit être égale à 5 fois la profondeur.

L'inclinaison des talus construits pour empêcher les éboulements, varie suivant la nature des matériaux employés. Les rapports de la base à la hauteur les plus fréquemment usités sont: 0,50, 1 et 2. Quant à la pente à donner au canal, elle dépend du volume d'eau à dépenser, et par suite de la vitesse que l'on adopte et du périmètre mouillé.

§ 2. — JAUGEAGE DES COURS D'EAU

65. Lorsqu'on veut établir un récepteur hydraulique, il faut en premier lieu, pour déterminer le choix du récepteur à employer, connaître la quantité d'eau dont on peut disposer, et pour cela il est nécessaire de faire le jaugeage du cours d'eau. Si le mouvement du liquide est uniforme, l'opération sera facile à exécuter, car il suffira de multiplier la vitesse moyenne du courant par la section transversale du canal ou de la rivière.

66. Détermination de la section transversale d'un cours d'eau. — On tend, un peu au-dessus de la surface du liquide, une corde AB (*fig.* 25) partagée en parties égales, de $0^m,50$ en $0^m,50$ par exemple, et fixée par ses deux extrémités au moyen de deux piquets plantés sur les rives. Alors, à l'aide d'un bateau, on

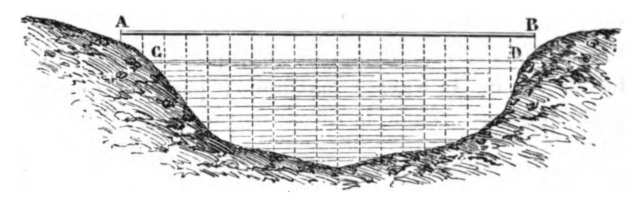


Fig. 25.

se transporte à chaque point de division, et on mesure, avec une sonde, la distance du fond à la surface du niveau de l'eau. Une fois l'opération terminée, on rapporte sur le papier, et à une même échelle, les ordonnées et les abscisses de la courbe. En joignant tous les points ainsi obtenus par un trait continu, on aura approximativement la forme du lit du cours d'eau. Pour obtenir l'aire de la section, il suffit d'évaluer la surface comprise entre le niveau CD et le contour, au moyen de la formule de Thomas Simpson.

Si la section du cours d'eau avait une forme géométrique, comme cela a toujours lieu dans les canaux à régime uniforme, l'aire de cette section s'obtiendra d'une manière plus facile.

67. Détermination de la vitesse moyenne. — Il reste maintenant à déterminer la vitesse moyenne, et pour cela, il suffit de connaître la vitesse à la surface.

Considérons deux sections transversales perpendiculaires à l'axe du cours d'eau et situées à une assez grande distance l'une de l'autre. On jette, un peu au-dessus de la première section et à l'endroit où le courant est le plus fort, un flotteur qui est ordinairement un morceau de chêne, car ce bois plonge presque entièrement dans l'eau, de sorte que l'air ne peut lui offrir aucune résistance tendant à diminuer sa vitesse. Deux observateurs, munis chacun d'un chronomètre, observent le passage du flotteur au moment où il traverse les sections considérées; la distance parcourue, exprimée en mètres, divisée par la différence des heures,

exprimée en secondes, sera la vitesse à la surface de l'eau. Ainsi, par exemple, la différence des heures étant représentée par 7 minutes 30 secondes ou 450 secondes, et la distance qui sépare les deux sections étant de 280 mètres, la vitesse à la surface sera

$$V = \frac{280}{450} = 0^{m},62.$$

Or nous avons vu précédemment (62) que la vitesse moyenne est les $0^{m},80$ de la vitesse maximum; par conséquent, dans l'exemple qui nous occupe, la vitesse moyenne sera

$$V = 0,80 \times 0,62 = 0^{m},496.$$

68. Moulinet de Woltmann. — Le plus souvent, pour déterminer la vitesse de l'eau, surtout lorsqu'on veut l'obtenir à une pro-

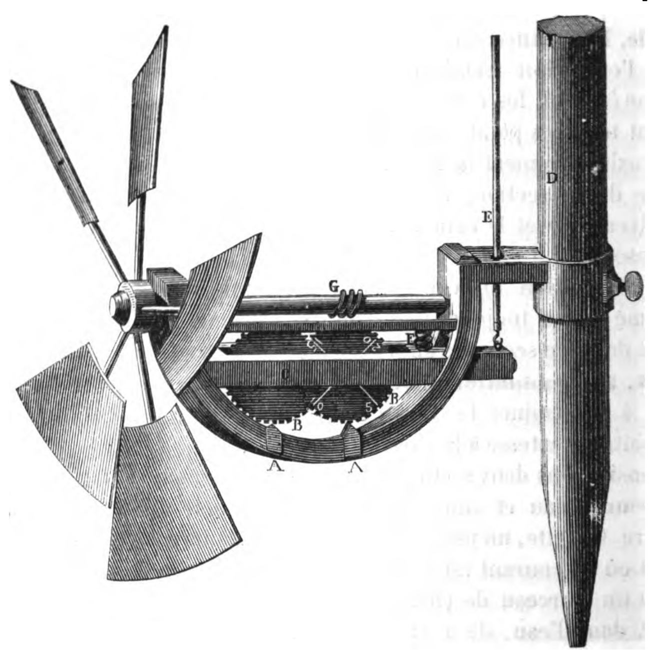


Fig. 26.

fondeur quelconque, on se sert d'un appareil appelé *moulinet de Woltmann* (*fig.* 26), qui se compose d'un arbre horizontal G, que l'on place dans le sens du courant, et qui porte, à l'une de ses

extrémités, une roue à ailettes planes ou hélicoïdes et, en son milieu, une vis sans fin G engrenant avec une roue dentée B; celle-ci porte sur son axe un pignon commandant une autre roue B′; une tringle verticale E permet, en la soulevant, de remonter la pièce portant les axes des roues dont nous venons de parler. Le système est supporté par une pièce demi-circulaire, portant à son extrémité une douille pouvant glisser, à frottement doux, dans une tige D destinée à supporter l'appareil et pouvant s'enfoncer dans le sol. Une vis de pression permet de fixer l'appareil en un point quelconque de la tige D. Lorsqu'on abaisse la tringle, la roue B n'engrène plus avec la vis, et deux arrêts A et A′, entrant dans les dents, arrêtent immédiatement la marche des engrenages.

L'appareil étant fixé à l'endroit où l'on veut connaître la vitesse, les ailettes prendront un mouvement de rotation d'autant plus rapide que la vitesse du courant sera plus grande. Le mouvement uniforme étant établi, on soulève la tringle E de façon à faire engrener la roue B avec la vis sans fin, et on maintient ainsi l'appareil pendant quelques secondes, que l'on a bien soin de compter. On abaisse ensuite la tringle et les arrêts A et A′ rendent les roues immobiles; on observe alors ces roues, qui sont graduées, et d'après leur position, on en déduit facilement le nombre de tours du moulinet, et on remarque que ce nombre de tours est sensiblement proportionnel à la vitesse du liquide.

69. L'instrument doit d'abord être taré, c'est-à-dire que l'on doit connaître à l'avance le nombre de tours qu'il fait pour une vitesse déterminée, et pour cela il suffit de le plonger dans un courant dont on connaît la vitesse, ou de le transporter, avec une vitesse connue, dans une eau tranquille : alors, d'après les résultats de cette expérience, on trouve par une simple proportion, la vitesse du courant dans lequel on opère.

Le moulinet de Woltmann étant un appareil très-délicat, pouvant se déranger facilement, il est bon de le vérifier fréquemment. On a constaté que cet instrument altère légèrement la vitesse à l'endroit où l'on opère.

70. Tube de Pitot. — On peut encore se servir, pour mesurer la vitesse de l'eau à une profondeur déterminée, du tube de Pitot, qui se compose d'un tube en verre ABC (*fig.* 27), recourbé à angle droit, et à branches inégales.

On plonge l'instrument dans l'eau, en maintenant la courte branche horizontale et l'orifice C tourné vers l'amont. Le liquide s'élève dans la branche verticale à une hauteur d'autant plus grande que la vitesse du courant est plus forte ; une échelle, placée en regard, indique la vitesse d'après cette hauteur.

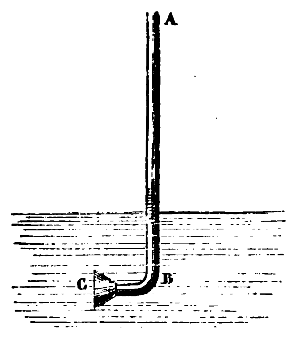


Fig. 27.

On ne peut, avec cet instrument, obtenir un résultat bien exact, et, malgré les modifications qui y ont été apportées, il ne peut fournir d'indications bien précises.

71. La section et la vitesse étant déterminées par l'un quelconque des procédés que nous venons d'indiquer, en multipliant l'une par l'autre, on obtiendra la dépense.

72. Méthode des fontainiers. — Lorsque le mouvement de l'eau est très-varié, comme cela a lieu pour les fleuves et les rivières, on emploie, lorsque le cours d'eau a peu d'importance, la méthode suivante, dite des fontainiers.

On barre la rivière au moyen de planches percées d'une rangée horizontale d'orifices d'un pouce de diamètre, c'est-à-dire $0^m,027$, et bouchés préalablement par des tampons. A un moment donné, on débouche autant d'orifices qu'il en faut pour que le niveau reste constant au-dessus de leur sommet : alors, il est évident que la quantité d'eau écoulée est égale à celle fournie par la source. Le volume d'eau écoulée pendant vingt-quatre heures par chacun de ces orifices est de $19^{mc},1953$.

73. Jaugeage par vanne. — Le jaugeage peut encore s'effectuer au moyen d'une vanne.

On appelle *vanne* une paroi verticale ou inclinée placée en travers d'un cours d'eau, et qui peut s'élever ou s'abaisser suivant les besoins. Les vannes les plus employées laissent écouler l'eau à leur partie inférieure et l'écoulement a lieu comme en mince paroi. Pour les vannes verticales, le coefficient de contraction est de 0,625, et pour les vannes inclinées à 45°, il est de 0,80.

Quelquefois l'eau s'échappe par la partie supérieure ; on dit

alors que la vanne est *plongeante* et on rentre dans le cas de l'écoulement en déversoir.

§ 3. — RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES

74. Considérations sur les récepteurs hydrauliques. — L'emploi de l'eau comme moteur était connu des anciens qui s'en servaient pour divers usages et principalement pour faire mouvoir des moulins. Comme à cette époque les connaissances en mécanique étaient peu répandues, les machines destinées à cet usage laissaient beaucoup à désirer et ne donnaient qu'un faible rendement, comparativement à celui qu'on aurait pu obtenir si ces appareils avaient été mieux construits et mieux appropriés à rendre disponible la plus grande quantité possible du travail absolu du cours d'eau. Cette dernière question a été l'objet de recherches et de travaux assez considérables, et elle a été enfin résolue.

Les machines sur lesquelles l'eau vient exercer son action prennent le nom de *récepteurs hydrauliques.* L'eau agit par son poids ou par sa vitesse, suivant le débit du cours d'eau, ou le genre de récepteur employé.

75. Les récepteurs hydrauliques se divisent en deux types principaux : 1° récepteurs à axe horizontal; 2° récepteurs à axe vertical.

Les récepteurs à axe horizontal se divisent en: 1° roues en dessous; 2° roues de côté; 3° roues en dessus.

Les récepteurs à axe vertical, appelés plus ordinairement *turbines,* tendent de jour en jour à remplacer avec avantage les récepteurs à axe horizontal.

76. Création d'une chute d'eau et détermination de la force absolue d'un cours d'eau. — Lorsqu'on a besoin d'une chute pour faire marcher un récepteur hydraulique, si le cours d'eau n'en présente aucune de naturelle, on établit ce qu'on appelle une chute artificielle. On construit pour cela, en travers du cours d'eau, un barrage en maçonnerie terminé par une crête horizontale; l'eau, retenue dans le bassin d'amont, s'y accumule jusqu'à ce que le niveau dépasse la crête, et alors le liquide s'écoule en déversoir et tombe dans le bassin d'aval.

La quantité de liquide qui s'écoule par-dessus la crête du barrage sera la même que celle qui s'écoulait avant son établissement et la dépense ne sera pas changée.

Les deux parties du cours d'eau situées de chaque côté du barrage prennent aussi le nom de *bief:* celle qui est située au-dessus se nomme *bief supérieur*, *bief d'amont* ou *canal d'amenée;* celle située à la partie inférieure, *bief d'aval* ou *canal de fuite*.

77. Chaque molécule, passant du niveau supérieur au niveau inférieur, s'abaisse verticalement d'une certaine quantité, et cet abaissement donne lieu à la production d'une certaine quantité de travail utile, qu'on obtient en multipliant le poids de cette molécule par la distance verticale séparant les deux niveaux.

On doit en premier lieu, pour établir un récepteur hydraulique, connaître la force disponible du cours d'eau, c'est-à-dire son travail absolu; or, ce travail varie évidemment avec la dépense et la hauteur de chute. Ces deux quantités sont faciles à connaître; la première, qui est la dépense ou le poids P de l'eau, s'obtiendra par l'une quelconque des méthodes de jaugeage que nous avons apprises, et la hauteur de chute H sera déterminée par un nivellement.

Connaissant ces valeurs, le travail absolu du cours d'eau sera exprimé par

$$T=PH \quad (1).$$

Si Q représente la dépense exprimée en litres, le poids du mètre cube étant 1000 kilogrammes, l'expression du travail en kilogrammètres sera

$$T=1000QH.$$

Si on veut l'obtenir en fonction de la vitesse, on sait (**45**) que

$$V=\sqrt{2gH}$$
$$\text{ou } V^2=2gH;$$

d'où l'on tire

$$H=\frac{V^2}{2g}.$$

et remplaçant dans l'équation 1, il vient

$$T=\frac{PV^2}{2g}$$
$$\text{ou } T=\frac{1000QV^2}{2g}.$$

Ordinairement, on exprime ce résultat en chevaux-vapeur et, pour cela, il suffit de diviser par 75 le nombre obtenu en kilogrammètres; et l'on a

$$T = \frac{1000QH}{75} = \frac{1000QV^2}{150g}$$

Et en effectuant le calcul des quantités constantes

$$T = 14,666QH = 0,68QV^2.$$

Pour estimer ce travail absolu, il faut choisir l'époque où les eaux sont à leur hauteur moyenne; il ne faudrait pas faire cette opération en hiver, car les eaux sont toujours hautes, ni en été, où elles sont ordinairement basses.

EXERCICES.

I. — Quelle est la force absolue d'un cours d'eau qui fournit $0^{mc},320$ par seconde, la différence de niveau du bief d'amont et du bief d'aval étant $2^m.85$.

II. — Quelle est la force absolue d'un cours d'eau qui fournit $0^{mc},425$ par seconde, la vitesse due à la charge étant de $3^m,25$.

III. — La force absolue d'un cours d'eau étant de 22 chevaux-vapeur, et la hauteur de chute de $4^m,26$, on demande quelle est la dépense par seconde.

IV. — La force absolue d'un cours d'eau dont la dépense est de $0^m,620$ par seconde, étant de 13 chevaux-vapeur, on demande quelle est la hauteur de chute.

78. Équation générale du travail dans les récepteurs hydrauliques. — Proposons-nous de déterminer l'équation générale du travail dans les récepteurs hydrauliques.

Si l'eau arrive sur la roue avec une vitesse V, le travail qu'elle pourra fournir sera donné par l'expression de sa puissance vive :

$$\frac{MV^2}{2}.$$

Si le récepteur est mis en mouvement par le poids du liquide, la pesanteur agit sur une hauteur H, distance verticale du niveau supérieur au niveau inférieur; le travail développé sera

$$MgH.$$

Lorsque le liquide arrive avec une vitesse V sur le récepteur qui est animé d'une vitesse plus faible, il y a choc des molécules

liquides contre la roue et par suite, une perte de travail que nous désignerons par

$$\frac{MU^2}{2}.$$

De plus, lorsque l'eau quitte le récepteur, elle sort avec une vitesse sensiblement égale à celle de la roue ; elle possède donc encore une certaine quantité de puissance vive qui n'a pas été mise à profit, et qui diminue d'autant le travail ; W étant cette vitesse, la perte de travail sera exprimée par

$$\frac{MW^2}{2}.$$

L'expression générale du travail est donc

$$T = \frac{MV^2}{2} + MgH - \frac{MU^2}{2} - \frac{MW^2}{2}.$$

79. Considérons les termes accompagnés du signe négatif : le travail sera évidemment maximum, lorsqu'ils disparaîtront, et, pour cela, voyons quelles conditions doit remplir le récepteur ; en d'autres termes, quelles sont les conditions générales du bon établissement d'un récepteur hydraulique.

Prenons le terme $\frac{MU^2}{2}$ représentant la perte de puissance vive occasionnée par le choc de l'eau à son arrivée sur la roue, et produisant un travail négatif d'autant plus grand que la différence entre les vitesses de l'eau et de la roue sera plus grande.

La vitesse de la roue dépend de la résistance offerte par les appareils qu'elle met en mouvement ; on peut donc la faire varier à volonté, en augmentant ou en diminuant ces résistances, c'est-à-dire en chargeant plus ou moins le récepteur.

Si au moment de la levée de vanne, la roue, étant débarrassée de toute sa transmission, prenait une vitesse égale à celle de l'eau, il n'y aurait aucune action produite de la part du liquide et par suite, le travail serait nul. Si d'un autre côté, la roue était chargée outre mesure, de manière à rester au repos lorsque la levée de vanne aurait lieu, dans ce cas comme dans le précédent, le travail serait nul. Il y a donc, entre ces deux limites, une vitesse convenable à adopter, et qui produit l'effet maximum : cette

vitesse varie avec chaque genre de récepteur, comme nous le verrons en étudiant les différentes classes de roues.

Pour que le terme $\frac{MW^2}{2}$ disparaisse, il faudrait que l'eau quittât la roue sans vitesse, car le liquide, participant au mouvement des aubes, se trouve entraîné par elles, et, au moment où elle cesse d'agir, sa vitesse est évidemment la même que celle de la roue; elle emporte donc avec elle une partie de sa puissance vive qui n'a pas été utilisée.

80. Donc les deux conditions principales du bon établissement d'un moteur hydraulique sont : 1° que l'eau arrive sans choc sur la roue; 2° qu'elle en sorte sans vitesse; conditions trop absolues et irréalisables en pratique; néanmoins, le but des constructeurs est d'en approcher le plus possible.

81. Manœuvre de vannes. — Avant d'étudier les divers récepteurs hydrauliques, il est bon de connaître par quels moyens on peut régler la dépense de l'eau dans le canal d'amont. On se sert pour cela de vannes.

On appelle *vanne* (**73**), une paroi plane ou inclinée que l'on place en travers d'un cours d'eau, et qui se compose de plusieurs pièces de bois réunies entre elles, pouvant glisser entre deux rainures pratiquées dans les murs du canal, de façon à pouvoir monter ou descendre pour être amenée dans la position convenable.

Le moyen le plus simple et le plus ancien pour obtenir le mouvement de bas en haut ou de haut en bas de la vanne, consiste à la munir, en son milieu, d'une tige verticale dont la partie supérieure est filetée, et qui reçoit un écrou que l'on manœuvre au moyen d'une barre; le mouvement de translation de cet écrou est empêché par le poids même de la vanne, qui le force à s'appuyer constamment sur une traverse.

82. Mais, le plus ordinairement, on munit la vanne de deux tiges à crémaillère engrenant avec deux pignons montés sur un arbre horizontal parallèle au plan des deux crémaillères; sur cet arbre est montée une manivelle ou une roue à poignées qui, en la faisant tourner dans le sens convenable, produit le mouvement rectiligne de la vanne.

83. Lorsque la vanne est d'un poids assez considérable, elle

est manœuvrée au moyen de la disposition suivante : elle porte toujours, du côté d'amont (*fig.* 28), une tige verticale T formant crémaillère, engrenant avec un pignon *p* ; sur l'axe de ce pignon

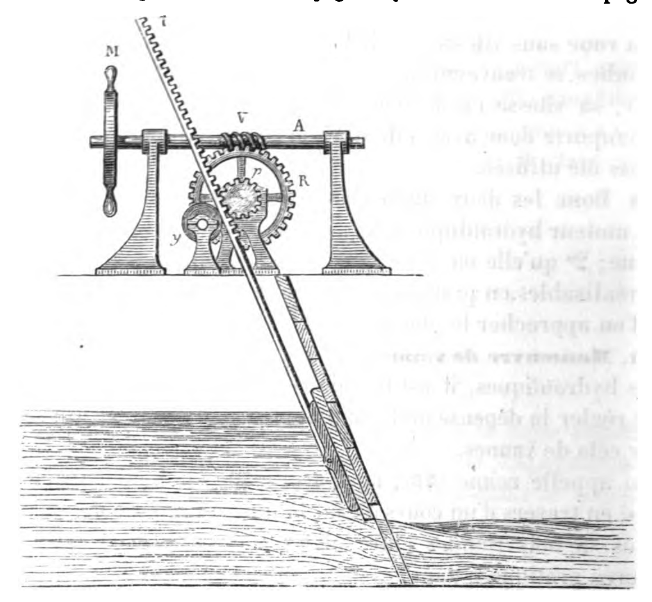


Fig. 28.

et formant corps avec lui, est montée une roue R engrenant avec une vis sans fin V. Pour guider la crémaillère, on place derrière elle, et juste en face du pignon *p*, un galet *y* qui, en tournant lorsque la tige monte ou descend, diminue beaucoup le frottement.

Sur l'arbre A, qui porte la vis sans fin, est montée une roue à poignées M.

§ 4. — RÉCEPTEURS A AXE HORIZONTAL

84. Roues en dessous à palettes planes. — Les roues en dessous à palettes ou aubes planes sont d'une application très-ancienne. Presque tous les moulins qu'on rencontre dans les campagnes sont mus par des roues de ce genre. Elles étaient recherchées à cause de la simplicité de leur construction et de

leur installation ; mais leur emploi diminue de jour en jour, et on leur substitue avec avantage des moteurs qui donnent un rendement plus considérable, et qui compensent largement les frais qu'occasionne leur achat d'un prix plus élevé.

85. Les roues en dessous se composent généralement de deux couronnes circulaires appelées *jantes*, AA (*fig*. 29), soutenues

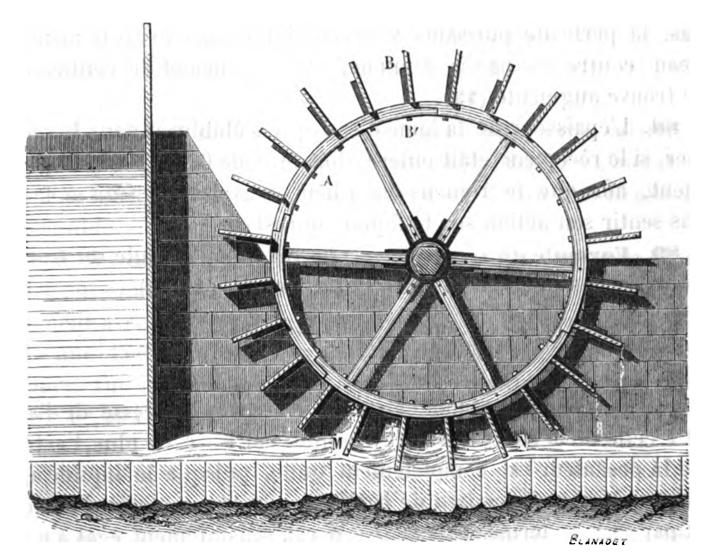


Fig. 29.

par six ou huit bras assemblés avec l'arbre qu'ils traversent, ou plus ordinairement, celui-ci ayant une forme polygonale, l'une des extrémités de ces bras vient se placer dans des rainures pratiquées dans des espèces de colliers en fonte appelés *tourteaux* et y sont assujettis par des boulons; l'autre extrémité est fixée à la jante. Des chevilles B, appelées *coyaux* ou *bracons*, implantées dans les jantes, supportent des palettes ou aubes composées de planches de $0^m,02$ à $0^m,03$ d'épaisseur, et dont la hauteur, ainsi que leur écartement, est de $0^m,35$ à $0^m,40$.

86. En aval de la vanne est disposé un canal en maçonnerie appelé *coursier*, dont la largeur est de $0^m,02$ à $0^m,03$, supérieure à celle de la roue. Le fond de ce coursier, qu'on nomme *radier*,

est horizontal ou incliné de 1/12 à 1/15, et présente sur une portion MN, une surface cylindrique concentrique à la roue, et qui laisse le moindre jeu possible aux aubes.

87. La vanne est le plus souvent verticale et placée à une certaine distance de la roue ; mais il convient, dans l'établissement des moteurs hydrauliques, de diminuer cette distance autant que possible, et pour cela on emploie des vannes inclinées. Dans ce cas, la perte de puissance vive occasionnée par le frottement de l'eau contre les parois diminue, et le coefficient de contraction se trouve augmenté (**72**).

88. L'épaisseur de la lame d'eau qui s'établirait dans le coursier, si le récepteur était enlevé, doit être de $0^m,15$ à 0^m20 seulement, afin que le remous qui a lieu en aval de la roue ne fasse pas sentir son action sur le liquide qui est en amont.

89. Formule du travail. — Cherchons la formule du travail pour ce genre de roues. La formule générale (**78**) est

$$T = \frac{MV^2}{2} + MgH - \frac{MU^2}{2} - \frac{MW^2}{2}.$$

Or, dans le cas qui nous occupe, V désignant la vitesse de l'eau et v celle de la roue, U sera représentée par $V - v$. De plus, l'action de la pesanteur est complétement nulle, puisque le liquide agit par sa vitesse, dépendant de la charge sur le sommet de l'orifice, et par suite le terme $MgH = 0$: W est sensiblement égal à v, et la formule générale devient :

$$T = \frac{MV^2}{2} - \frac{M(V-v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2}.$$

En développant

$$T = \frac{MV^2}{2} - \frac{MV^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} + \frac{2MVv}{2} - \frac{Mv^2}{2}.$$

supprimant les facteurs communs, il reste

$$T = MVv - Mv^2 = Mv(V-v).$$

Si nous supposons v (V—v) égale à une certaine quantité K, il est facile de voir que la valeur de T sera maximum, lorsque v sera égal à V-v ou $\frac{V}{2}$ parce que, quand deux facteurs formant un pro-

duit ont une somme constante, le produit est maximum, quand les deux facteurs sont égaux entre eux.

L'expression de travail devient donc

$$T = \frac{MV^2}{4}.$$

Les expériences faites par Smeaton, en 1759, ont montré que le maximum d'effet utile avait lieu, lorsque la vitesse v de la roue correspondait à une vitesse moyenne des 0,43 de celle de l'eau affluente.

90. Le rendement d'une roue à palettes planes varie suivant la disposition et la construction du récepteur; mais, en général, il est très-faible et varie entre les 0,25 et les 0,30 du travail absolu disponible.

Malgré leur faible rendement, ces roues sont encore assez généralement employées. Leur avantage consiste en ce qu'elles fonctionnent avec des vitesses variant dans des limites assez étendues, sans que l'effet utile s'écarte du maximum d'effet qui leur est propre. On les emploie pour des chutes dont la hauteur varie entre $1^m,50$ et 2 mètres.

EXERCICES.

I. — On demande quel est l'effet utile d'une roue à palettes planes qui dépense $0^{mc},735$ par seconde, la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue étant de $5^m,18$, et celle de la circonférence extérieure $2^m,76$.

II. — On demande quel est l'effet utile d'une roue à palettes planes qui dépense $0^{mc},684$ par seconde, la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue étant de $4^m,96$, et celle de la circonférence extérieure $3^m,15$.

III. — On sait que l'effet utile d'une roue à palettes est de 465 kilogrammètres, qu'elle dépense $0^{mc},740$, et quelle fait 10 tours par minute, son rayon étant de $2^m,50$; on demande : 1° quelle est la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue; 2° la hauteur de la levée de vanne, la largeur de l'orifice étant de $1^m,344$.

91. Roues pendantes. — On établit assez souvent des roues à palettes (*fig.* 30), mues par un courant d'une largeur quelconque, et placées, soit entre deux bateaux, et dans ce cas elles suivent d'elles-mêmes les variations du niveau, soit dans un bâtiment, et alors on obtient leur déplacement à l'aide d'un mécanisme particulier.

La hauteur des palettes, et surtout la largeur de la roue, varie

d'après la fraction plus ou moins grande que l'on veut utiliser du travail moteur dont on dispose. Le diamètre des roues est d'environ 8 ou 10 fois la hauteur des palettes.

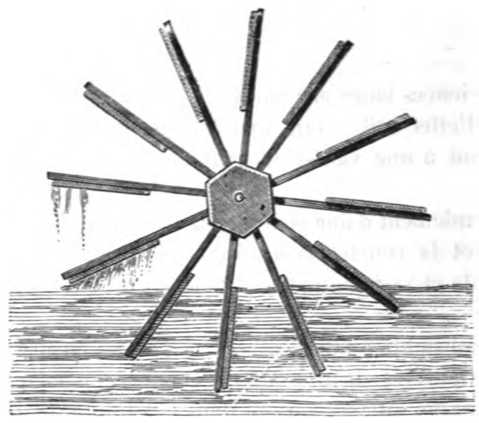


Fig. 30.

92. M. Poncelet a donné, pour calculer la quantité de travail utilisée par ces roues, la formule suivante :

$$T = 81{,}56AVv(V-v)$$

Dans cette formule, A désigne la surface immergée de l'aube verticale, V la vitesse de l'eau à la surface, et v la vitesse de la circonférence moyenne de la partie plongée des palettes.

L'expérience a démontré que, pour obtenir le maximum d'effet utile, la vitesse v doit être les 0,40 de celle de V.

On augmente le rendement de ces roues en inclinant les palettes d'environ 30° sur le côté d'amont, et en disposant, sur leurs côtés latéraux, des rebords faisant saillie de $0^m{,}05$ à $0^m{,}10$ environ.

EXERCICES.

I. — Quel est l'effet utile d'une roue pendante, sachant que la surface immergée A de l'aube $= 2^m{,}65$; la vitesse V de l'eau à la surface $= 2^m{,}75$, et la vitesse v de la circonférence moyenne de la partie plongée des palettes $= 0^m{,}96$?

II. — On demande quelle est la valeur qu'il faut donner à la vitesse v d'une roue pendante, sachant que la surface immergée de l'aube est égale à $1^{mc}{,}70$,

la vitesse à la surface de l'eau $3^m,50$, et qu'elle doit fournir un effet utile de 675 kilogrammètres.

III. — On propose de déterminer la vitesse V de l'eau à la surface d'un courant dans lequel fonctionne une roue pendante avec une vitesse v de $1^m,25$, la surface immergée de l'aube étant de $2^{mq},50$, et son effet utile égal à 548 kilogrammètres.

93. Roues à aubes courbes de Poncelet. — Les roues en dessous à aubes courbes ont été imaginées par le général Poncelet, en 1827, dans le but de modifier celles à palettes planes en utilisant une plus grande partie du travail absolu du cours d'eau.

Frappé du peu de rendement des roues à aubes planes, il se proposa d'atténuer, autant que possible, les deux causes de pertes de travail, c'est-à-dire d'éviter le choc de l'eau à son entrée dans la roue, et de faire en sorte qu'elle en sortît avec une faible vitesse.

94. Théorie de ces roues. — Pour donner une idée de ce récepteur, supposons qu'on puisse rendre l'aube courbe AB (*fig.* 31) tangente à la circonférence extérieure de la roue, et proposons-

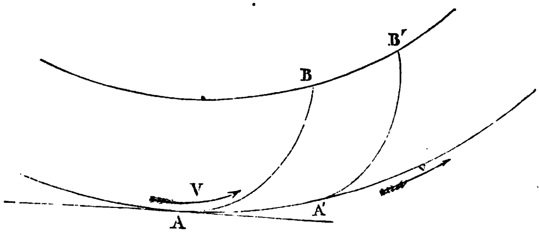


Fig. 31.

nous de déterminer, dans cette hypothèse, la vitesse de sortie du liquide qui se présente en A, suivant la direction de la tangente commune à la circonférence et à l'aube avec une vitesse V : soit v la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de cette aube suivant la circonférence AA' supposée d'un grand rayon.

Si la roue était au repos, l'eau s'élèverait dans l'aube avec sa vitesse V; mais la roue étant animée de la vitesse v, le liquide n'entrera qu'avec une vitesse relative égale à $V-v$. Au bout de quelques instants, si rien ne gêne son mouvement ascendant, l'eau reviendra à l'extrémité A de l'aube qui, pendant ce temps, se sera transportée en A', avec sa vitesse relative $V-v$. Or le che-

min parcouru AA′ étant très-petit, on peut regarder l'aube comme s'étant transportée parallèlement à elle-même sur la tangente en A, et la vitesse absolue de l'eau à sa sortie en A′ sera la différence entre V—v et v.

D'où il résulte que la vitesse de l'eau à sa sortie de la roue sera exprimée par

$$(V-v)-v = V-2v.$$

95. Formule du travail. — Si nous considérons la formule générale dans les récepteurs hydrauliques, W sera représentée par V—2v ; de plus, le choc de l'eau à son entrée dans la roue étant évité par des dispositions que nous verrons plus loin, le terme $\frac{MU^2}{2}$ est nul ; il en est de même du terme MgH, puisque l'eau agit par sa vitesse et nullement par son poids.

L'équation générale du travail se réduit donc à

$$T = \frac{MV^2}{2} - \frac{MW^2}{2}.$$

Et, en remplaçant W par sa valeur,

$$T = \frac{MV^2}{2} - M\frac{(V-2v)^2}{2}.$$

Développant la parenthèse,

$$T = \frac{MV^2}{2} - \frac{MV^2}{2} + 2MVv - 2Mv^2.$$

d'où l'on déduit en simplifiant

$$T = 2Mv(V-v).$$

Le maximum d'effet aura lieu, comme dans les roues à palettes planes, lorsque v sera égal à $\frac{V}{2}$, et la formule du travail devient :

$$T = \frac{2MV^2}{4} = \frac{MV^2}{2}.$$

Ce qui montre que toute la puissance vive possédée par l'eau à son arrivée sur la roue aurait été transmise au récepteur.

96. Mais il est complétement impossible de réaliser, en pratique, les hypothèses que nous avons admises. En effet, l'aube ne

peut être rendue tangente à la circonférence extérieure et à la lame d'eau, car le liquide n'y entrerait pas, étant gêné par l'aube précédente. Pour que l'introduction ait lieu, la vitesse relative de l'eau doit faire, avec la circonférence extérieure, un certain angle dont la valeur, déterminée par expérience, est d'environ 30°, et il résulte de là que la vitesse du liquide, en quittant la roue, ne peut devenir nulle. De plus, l'eau étant gênée dans son mouvement ascensionnel par celle qui descend, il en résulte une agitation qui absorbe une partie de sa puissance vive, et par suite, cause une perte de travail.

93. Description. — Les aubes sont généralement en tôle mince, reliées entre elles par des couronnes annulaires A, B (*fig.* 32), dont la largeur dans le sens du rayon est égale à 1/3 de la hauteur de

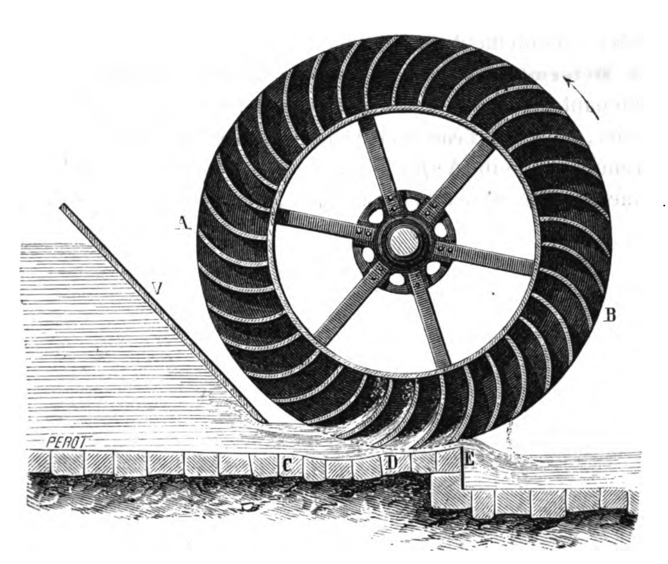


Fig. 32.

chute ; ces couronnes sont destinées à empêcher l'eau de se répandre latéralement lorsqu'elle produit son action sur la roue. Elles sont reliées à l'arbre d'une manière analogue à celles des roues à palettes planes.

L'eau arrive sur la roue, en sortant du canal d'amont, par une

vanne V ordinairement inclinée à 45°. Les côtés latéraux de l'orifice sont légèrement évasés de manière à éviter la contraction. L'écartement des couronnes extrêmes est de $0^m,02$ à $0^m,03$ plus grand que la largeur de l'orifice, afin que l'eau fournie par le bief d'amont soit forcée d'entrer complétement dans les aubes.

La levée de vanne est réglée de manière à donner une lame d'eau variant entre $0^m,20$ et $0^m,30$ d'épaisseur pour des chutes au-dessous de $1^m,50$, et seulement de $0^m,10$ à $0^m,16$ pour les chutes au-dessus de 2 mètres.

Un peu avant la vanne, le coursier est incliné d'environ 1/10; puis il affecte, de C en D, la forme d'une courbe que nous allons apprendre à déterminer; ensuite, et dans l'intervalle DE, double de celui entre deux aubes consécutives, il est concentrique à la roue; puis enfin il est terminé par un ressaut assez profond pour faciliter l'écoulement du liquide.

98. Détermination de la portion CD du coursier. — Voici maintenant la manière de déterminer la forme de la partie CD du coursier, pour que l'eau arrive sans choc sur les aubes.

Prenons un point A (*fig.* 33) sur la circonférence extérieure de la roue, de telle sorte que la tangente AB, menée par ce point, soit

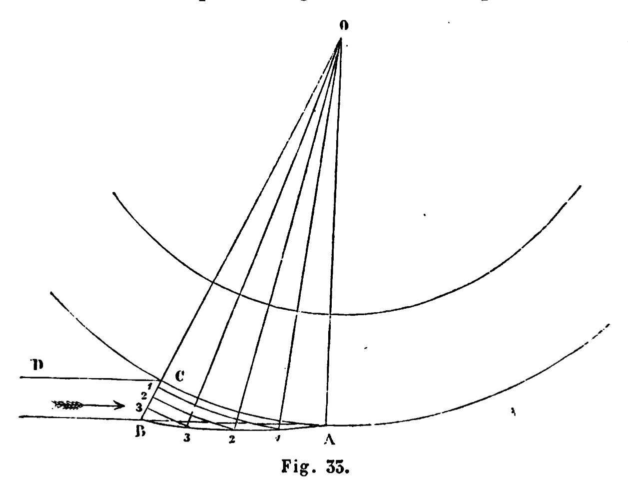


Fig. 33.

inclinée d'environ 1/10 sur l'horizontale. A une distance égale à l'épaisseur de la lame d'eau, menons une parallèle CD à cette

tangente, rencontrant la circonférence extérieure au point C; menons le rayon passant par ce point C, et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en B, avec AB. Partageons CB et AB en un même nombre de parties égales. Joignons les points de division de AB au centre, et par les points correspondants de BC décrivons des arcs de cercle concentriques à la roue: l'intersection de ces arcs avec les rayons menés précédemment, donne une série de points qui, en les joignant par un trait continu, déterminent la courbe cherchée.

99. Forme des aubes. — Il reste maintenant à trouver le profil des aubes. Leur forme doit être telle que le premier élément fasse, comme nous l'avons dit (**96**), un angle de 30° avec la circonférence extérieure de la roue; le dernier élément doit être perpendiculaire à la circonférence intérieure, afin que l'eau ne soit pas projetée intérieurement. Ces deux conditions peuvent être remplies en donnant à l'aube la forme d'un arc de cercle, dont voici le tracé.

Soit O (*fig.* 34) le centre de la roue, KK' et II' les circonférences intérieure et extérieure de l'une des couronnes, et A, le

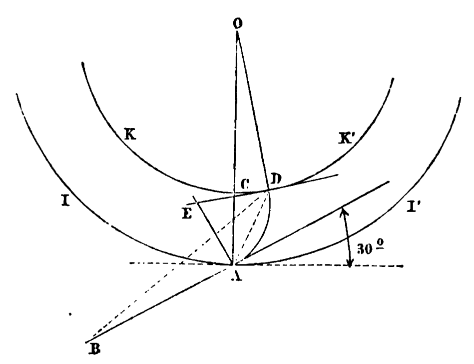


Fig. 34.

point par où doit passer une aube. Menons par le point A une droite AB, faisant avec la tangente à la circonférence II' en ce point, un angle de 30°; ce sera la tangente au dernier élément de l'aube. Menons le rayon OA, qui rencontre la circonférence KK' au point C, et prenons AB=OC. Du point B avec OA comme rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe cette même

circonférence en D, et en ce point, menons la tangente DE. Si en A nous élevons la perpendiculaire AE à AB, le centre de l'arc déterminant l'aube se trouvera à l'intersection de cette droite avec DE. En effet, les triangles BDA et OAD étant égaux comme ayant leurs côtés respectivement égaux, leurs angles BAD et ODA sont égaux, mais

$$BAD = 90^\circ + EAD$$
$$OAD = 90^\circ + EDA,$$

et par suite

$$EAD = EDA.$$

Le triangle ADE est donc isocèle, et de plus l'arc décrit du point E comme centre avec EA pour rayon, sera tangent à AB et à OD: il remplit donc les deux conditions demandées.

100. Rendement et avantages. — Une roue à aubes courbes, établie dans de bonnes conditions, donne un rendement moyen égal aux 0,60 ou 0,65 du travail absolu du cours d'eau.

La vitesse la plus convenable à la circonférence extérieure, pour obtenir le maximum d'effet, est les 0,55 de la vitesse d'arrivée de l'eau.

Ces roues peuvent marcher à leur état normal quand elles sont noyées des 2/3 de la hauteur des couronnes. Lorsqu'on a à craindre des crues assez fréquentes, on peut donner une grande largeur à ces couronnes, les fermer intérieurement, et disposer le vannage de façon à verser l'eau en déversoir, en même temps que celle du fond agit dans le coursier.

101. Ces roues ont, sur les autres moteurs à axe horizontal, le grand avantage de fonctionner à une vitesse assez considérable. Leur construction est en outre peu coûteuse, et comme elles peuvent fonctionner noyées à une certaine profondeur, leur emploi est convenable dans les pays exposés aux inondations, et où l'on dispose de chutes de $1^m,50$ et au-dessous avec une grande dépense d'eau.

102. Roues de côté. — On appelle *roues de côté* celles qui sont emboîtées sur une portion BC (*fig.* 35) de leur contour par un coursier circulaire, et qui reçoivent l'eau par un orifice en déversoir.

Elle se compose de jantes AA', sur lesquelles sont placées les

aubes ou palettes qui sont planes ou polygonales, faites en bois, ou courbes, et alors on les construit en tôle. Les jantes sont réunies à l'arbre au moyen de bras. La roue se trouve comprise entre deux

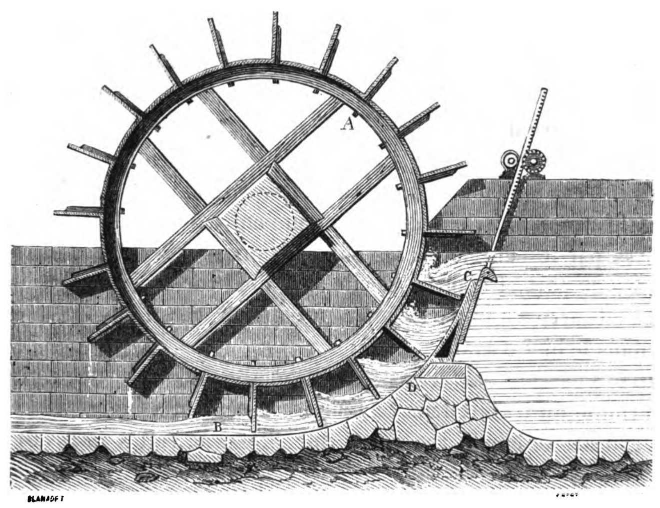


Fig. 35.

murs verticaux appelés *bajoyers*, ne laissant qu'un jeu de quelques millimètres seulement, afin que l'eau ne s'échappe pas sans produire un effet utile.

Le coursier, jusqu'à l'aplomb de l'arbre, est une portion de surface cylindrique composée de deux parties : l'une, BD, construite en maçonnerie ; l'autre, CD, est une pièce en fonte appelée *col de cygne*, derrière laquelle glisse une vanne plongeante destinée à augmenter ou à diminuer l'épaisseur de la lame d'eau. Cette épaisseur doit être de $0^m,20$ à $0^m,25$, et la largeur de la roue sera calculée d'après la dépense dont on dispose. Néanmoins, lorsque cette dernière est très-considérable, pour ne pas donner à la roue une trop grande largeur qui la rendrait trop coûteuse et trop lourde, on peut augmenter l'épaisseur de la lame liquide jusqu'à $0^m,50$ ou $0^m,60$ environ.

Le diamètre des roues de côté est de 4 mètres au minimum et 6 à 7 mètres au maximum, et l'axe doit être placé à $0^m,40$ ou $0^m,50$ au-dessus du niveau d'amont.

La hauteur des aubes, dans le sens du rayon, est calculée de façon que la capacité comprise entre deux palettes consécutives soit égale à deux fois ou deux fois et demie le volume d'eau à admettre, condition indispensable pour obtenir un bon rendement. Or, connaissant la vitesse de la roue, on connaîtra le nombre de palettes qui passent devant l'orifice pendant l'unité de temps ; divisant la dépense par ce nombre, on obtiendra le volume d'eau à admettre entre deux palettes. Celles-ci sont ordinairement espacées de $0^m,30$ à $0^m,35$ sur la circonférence extérieure.

103. L'eau agit d'abord par sa vitesse au moment où elle entre dans la roue ; puis, elle est maintenue entre deux palettes consécutives par le coursier et les bajoyers qui l'empêchent de se répandre de part et d'autre, et elle agit ainsi par son poids jusqu'à ce qu'elle arrive à la partie inférieure de la roue où elle est déversée dans le bief d'aval.

104. Formule du travail. — Proposons-nous de déterminer la formule du travail dans ce genre de récepteurs.

L'eau arrive sur la roue avec une vitesse V; soit A (*fig.* 36) le

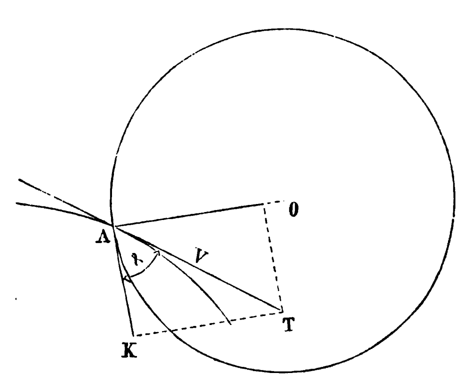


Fig. 36.

point de rencontre du filet moyen et de la circonférence moyenne des palettes. Menons au point A la tangente AT à la parabole que décrit le filet moyen, et prenons sur cette tangente une longueur AT proportionnelle à la vitesse V du liquide; nous pouvons décomposer cette vitesse en deux autres, l'une dirigée suivant la tangente AK à la circonférence moyenne, l'autre suivant le rayon

OA. Si nous appelons α l'angle des deux tangentes AT et AK, ces deux composantes seront V cos α et V sin α : cette dernière se trouve détruite par la résistance de l'axe.

L'eau, une fois introduite dans la roue, participe à son mouvement et se trouve animée de la même vitesse v; donc la vitesse perdue U sera égale à V cos $\alpha - v$, augmentée de la composante suivant le rayon V sin α.

Si nous remplaçons, dans l'équation générale du travail

$$T = \frac{MV^2}{2} + MgH - \frac{MU^2}{2} - \frac{MW^2}{2},$$

U par sa valeur, elle devient

$$T = \frac{MV^2}{2} + MgH - M\frac{(V\cos\alpha - v)^2}{2} - \frac{MV^2\sin^2\alpha}{2} - \frac{MW^2}{2}.$$

La vitesse W étant sensiblement égale à v, on a en, effectuant la parenthèse

$$T = \frac{MV^2}{2} + MgH - \frac{MV^2\cos^2\alpha}{2} - \frac{Mv^2}{2} + MVv\cos\alpha - \frac{MV^2\sin^2\alpha}{2} - \frac{Mv^2}{2}$$

Mettant $\frac{MV^2}{2}$ et Mv en facteurs communs, on a

$$T = \frac{MV^2}{2} + MgH - \frac{MV^2}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + Mv(V\cos\alpha - v).$$

Or on sait que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, et par suite

$$T = MgH + Mv(V\cos\alpha - v).$$

Le maximum d'effet aura lieu lorsque v sera égale à $\frac{V\cos\alpha}{2}$ et la formule devient

$$T = MgH - \frac{MV^2\cos^2\alpha}{4}.$$

105. Il résulte de l'expérience que cette formule doit être modifiée par un coefficient qui varie nécessairement d'une roue à une autre; lorsque celle-ci est établie dans de bonnes conditions, ce coefficient peut être porté à 0,75 ou 0,80.

La vitesse de la roue la plus convenable pour obtenir le maxi-

mum d'effet doit être environ les 0,60 ou 0,70 de celle de l'eau à son arrivée sur le récepteur.

Ces roues ont, comme les roues à palettes planes, l'avantage de pouvoir fonctionner avec de grandes vitesses; leur inconvénient est qu'elles exigent parfois des largeurs assez considérables et qu'elles ne peuvent marcher lorsque les aubes sont noyées.

106. Quelquefois, au lieu de faire arriver l'eau en déversoir, ou établit une vanne inclinée que l'on place le plus près possible de la roue; mais l'expérience démontre que dans ce cas le rendement est inférieur au précédent, et peut descendre jusqu'à 0,55.

EXERCICES.

I. — Quelle est la valeur de la vitesse perdue U dans une roue de côté fonctionnant dans les circonstances suivantes : la vitesse V d'arrivée de l'eau sur le récepteur égale $3^m,20$; celle v de la roue égale $1^m,81$; l'angle des tangentes à la parabole décrite par le filet moyen et à la circonférence moyenne des palettes étant de 38° ?

II. — Quel est l'effet utile d'une roue de côté qui dépense $0^{mc},709$ par seconde, la hauteur verticale H pendant laquelle l'eau agit étant $2^m,12$; $V \cos \alpha$ étant égal à $1^m,36$, et la vitesse v de la circonférence moyenne des palettes étant de $0^m,97$?

III. — Quel est l'effet utile d'une roue de côté qui dépense $0^{mc},825$ par seconde, la hauteur verticale H pendant laquelle l'eau agit étant $2^m,15$; la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue étant $1^m,75$, la vitesse v à la circonférence moyenne des palettes, $0^m,86$, et l'angle des deux tangentes à la parabole décrite par le filet moyen et à la circonférence moyenne des palettes étant 35° ?

IV. — Quelle est la vitesse d'arrivée de l'eau sur une roue de côté qui dépense $1^m,450$ par seconde, et de la force de 12 chevaux 5, sachant que la vitesse de la roue est de $0^m,97$, que la hauteur H est de $2^m,75$, et l'angle des deux tangentes à la parabole décrite par le filet moyen et à la circonférence moyenne des palettes étant de 28° ?

107. Roues à augets. — Les roues en dessus, appelées *roues à augets*, reçoivent l'eau à leur partie supérieure. Elles se composent de deux ou plusieurs couronnes annulaires A, reliées à l'arbre par des bras B, et entre lesquelles sont fixées les aubes polygonales ou courbes C (*fig.* 37); la roue est fermée intérieurement, de sorte que l'eau, une fois introduite, se trouve comprise dans une espèce de vase auquel on a donné le nom d'*auget*, et ne se déverse qu'à la partie inférieure, dans le bief d'aval, après avoir agi par son poids pendant une grande partie de la demi-révolution.

L'eau est amenée sur la roue par un canal rectangulaire de

0m,04 à 0m,06 moins large que l'écartement des couronnes extrêmes. Les murs latéraux du canal se prolongent assez loin au

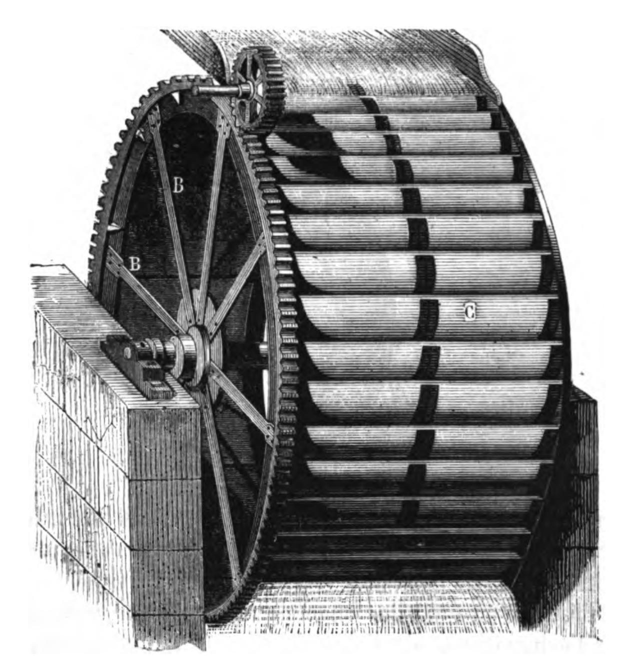


Fig. 37.

delà du point d'introduction du liquide afin de guider la veine et d'éviter que l'eau soit projetée latéralement.

La levée de vanne est toujours très-faible; elle varie ordinairement entre 0m,06 et 0m,10.

Au moyen de la disposition que nous venons de décrire pour l'introduction de l'eau, la roue tourne dans le sens de la vitesse de l'eau arrivant par le canal d'amont.

108. Lorsque le niveau est très-variable dans le bief supérieur, on est obligé de changer le système d'introduction, et alors on dispose une paroi inclinée AB (*fig.* 38), percée d'orifices verticaux en forme d'ajutage convergent, occupant toute la largeur de la roue dans le sens de son axe, et ces cloisons directrices approchent environ de 0m,01 à 0m,02 de la surface cylindrique en-

gendrée par l'extrémité des augets. Dans ce cas, la roue tourne en sens inverse de celui obtenu dans le mode d'introduction pré-

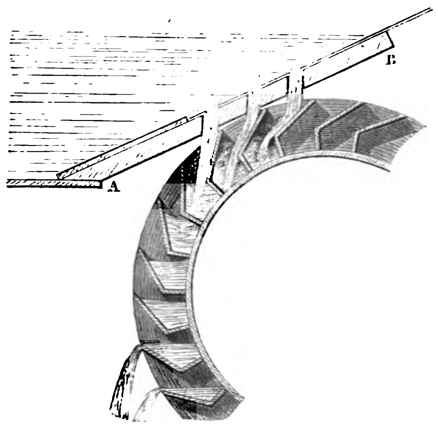


Fig. 38.

cédent; mais ce système est désavantageux, car l'eau tombant verticalement perd, en prenant la vitesse de la roue, une plus grande quantité de puissance vive.

On pratique au fond des augets quelques petits trous, pour faciliter l'échappement de l'air à l'arrivée du liquide qui, autrement, pourrait nuire à l'effet produit. Ces trous occasionnent bien une perte de liquide qui, en les traversant, ne reste pas dans l'auget; mais cette perte est très-peu considérable.

Les augets sont espacés d'environ $0^m,30$ à $0^m,40$ à la circonférence extérieure, et leur profondeur, dans le sens du rayon, est d'environ $0^m,25$ à $0^m,30$. S'ils avaient une profondeur moindre, l'eau commencerait trop tôt à se déverser; si elle était trop grande, l'eau acquerrait par sa chute une plus grande vitesse, et augmenterait ainsi la perte de puissance vive due au choc à l'introduction.

109. On donne aux augets différentes formes; mais la plus simple et la plus généralement employée, se compose de deux parties planes en bois, dont l'une a pour direction la vitesse relative de l'eau à son arrivée sur la roue, et l'autre est dirigée suivant le rayon; ces deux parties se raccordent sur la génératrice

de la surface cylindrique ayant pour base la circonférence moyenne des couronnes.

110. La direction de la vitesse relative de l'eau s'obtiendra de la manière suivante. Soit A (*fig.* 39) le point de rencontre du filet moyen de la lame d'eau et de la circonférence extérieure de la roue; menons par ce point la tangente AT à la parabole décrite par le filet moyen et la tangente AK à la circonférence; prenons sur ces deux droites des longueurs AR, AB proportionnelles à la

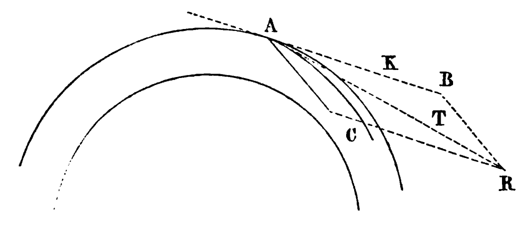


Fig. 39.

vitesse du liquide et de la roue. En construisant le parallélogramme des vitesses, le côté AC donne la direction de la vitesse relative, et par suite celle à donner au plan extérieur de l'auget.

Si les aubes sont courbes, on donne cette direction au premier élément.

La roue ne doit jamais plonger dans le niveau d'aval; on doit, au contraire, la maintenir à une certaine distance du liquide.

Dans les roues à augets on peut distinguer deux cas : 1° celui où les augets sont remplis à la moitié de leur capacité, ou roues *lentes;* 2° celui où les augets peuvent être remplis aux 2/3 et au delà de leur capacité, ou roues *rapides*.

111. Forme de la surface libre du liquide dans les augets. — La surface libre du liquide contenu dans chaque auget, au lieu d'être horizontale comme cela arriverait si la roue était au repos, affecte une forme particulière que nous allons déterminer.

Considérons à cet effet une molécule A (*fig.* 40), située à la surface libre du liquide dans un auget; cette molécule est soumise à l'action de deux forces : 1° son poids P qui agit verticalement et tend à la faire glisser au fond; 2° la force centrifuge F qui s'exerce dans le sens du rayon et tend à la soulever.

Pour que l'équilibre existe, il faut que la résultante R de ces deux forces soit normale à la surface du liquide. La direction de cette résultante coupe la verticale passant par le centre de rotation de la roue au point E.

Les deux triangles BAC et OAE étant semblables, on a

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OE}.$$

Or AB représente l'intensité de la force centrifuge qui, comme on le sait, a pour expression mw^2r; BC, qui est le poids de la molécule, est égal à mg, et AO étant égal à r, on peut écrire :

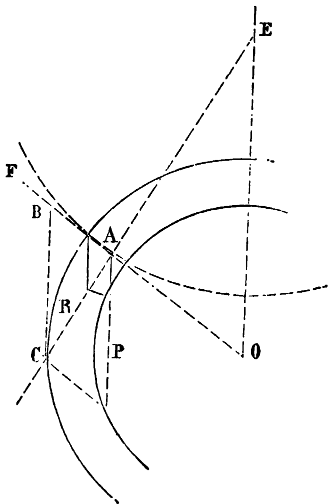


Fig. 40.

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{r}{OE}.$$

D'où l'on tire :

$$OE = \frac{mgr}{m\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Ce qui montre que toutes les normales concourent au même point E de la verticale OE passant par le centre de rotation de la roue, et par conséquent, la surface libre du liquide dans l'auget est une surface cylindrique droite à base circulaire ayant pour axe la droite menée par le point E parallèlement à l'axe de rotation O.

Ce point E est d'autant plus rapproché du centre O que la vitesse de la roue est plus grande, et plus cette vitesse augmentera, moins un auget, dans une position donnée, pourra contenir de liquide; car la force centrifuge devenant de plus en plus grande, tendra à projeter l'eau hors de l'auget. C'est là le principal inconvénient des roues rapides, car le déversement commençant plus tôt l'eau agit pendant un temps plus court conséquence immédiate d'un rendement moindre.

112. Formule du travail. — Dans ce genre de récepteurs, la

formule est la même que celle des roues de côté; nous pouvons donc écrire

$$T = MgH + Mv(V\cos\alpha - v).$$

Mais dans ce cas, le terme MgH ne représente pas le travail d'une force constante, car à partir du moment où le déversement commence, la quantité d'eau que contient un auget diminuant à chaque instant, il faut évaluer le travail d'une force variable. Il est donc important de connaître le point où l'eau commence à quitter l'auget et celui où cet auget est complétement vide.

113. Pour cela on peut employer la méthode suivante : Considérons un auget a, b, c, d, e, f (*fig.* 41), dans une position quelconque, et supposons d'abord qu'il soit rempli à la moitié de sa capacité. La section droite du prisme d'eau qu'il contient devra être égale à la moitié de la surface a, b, c, d, e, f : menons donc par le point f une droite fi, de telle manière que les surfaces a, b, c, i, f et i, d, e, f interceptées soient égales ; du centre O de la roue, abaissons la perpendiculaire Oh sur le prolongement de fi, et faisons tourner le système de ces deux droites, supposé rigide, jusqu'à ce que Oh soit verticale. Par le point f' où la droite fi, dans sa nouvelle position, rencontre la circonférence extérieure de la roue, traçons le profil d'une aube $f'e'd'$ égale à fed. On obtient ainsi le point où le déversement va commencer, car $f'i'$ étant horizontale, le point f' répond à la position pour laquelle le niveau du liquide passe par le bord de l'aube, et pour un déplacement aussi petit qu'on le voudra, une partie du liquide s'échappera pour tomber dans le bief d'aval.

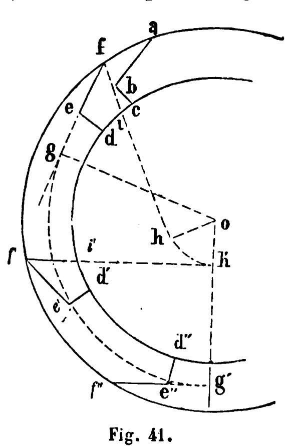


Fig. 41.

114. Pour trouver maintenant la position de l'auget lorsqu'il sera complétement vide, abaissons du centre O, sur le prolongement du côté fe de l'aube, la perpendiculaire Og, et faisons tourner comme précédemment le système de ces deux droites jusqu'à amener Og à être verticale : on aura alors la position $f''e''$ que le

côté *fe* de l'auget prendra lorsqu'il sera arrivé en ce point, et il est bien évident que, son côté étant horizontal, il ne restera plus d'eau dans l'auget.

115. Si la roue marche à grande vitesse, il faut remplacer la droite *fi* par l'arc de cercle dont nous avons appris à déterminer le centre, et la position de l'auget pour laquelle le déversement commence et finit, ne peut plus s'obtenir que par tâtonnements. Le volume de liquide que doit contenir chaque auget étant déterminé à l'avance, en divisant ce volume par la largeur de la roue, on obtient l'aire de la section du prisme d'eau, et cette eau commencera à s'échapper lorsque, décrivant un arc de cercle de rayon $\frac{g}{w^2}$ passant par le bord supérieur de l'auget, la surface interceptée sera juste égale à celle de cette section. Quand l'arc de cercle dont il s'agit passe entièrement au-dessous du profil de l'auget, le déversement sera terminé.

116. Dans la formule du travail, en remplaçant M par la valeur $\frac{1000\,Q}{g}$, elle devient

$$T = 1000QH + 102Qv(V\cos\alpha - v).$$

Appelons h (*fig.* 42) la distance verticale du point de rencontre du filet moyen de la lame d'eau avec la circonférence extérieure, et du point où le déversement commence; h' celle de ce dernier point au-dessus du bord extérieur de l'auget lorsque celui-ci est complétement vide, et q la quantité d'eau que chaque auget a dû recevoir. Pour obtenir le travail de la force variable, divisons h' en un certain nombre de parties égales, 8 par exemple : projetons ces points sur la circonférence extérieure, traçons les positions correspondantes des augets, et déter-

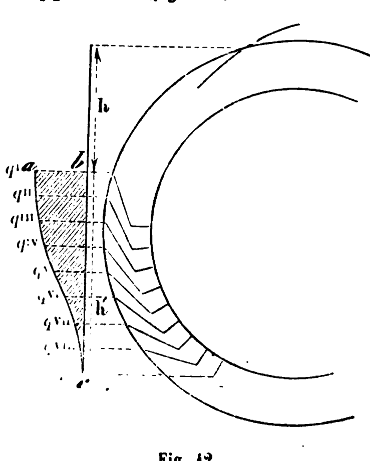


Fig. 42.

minons le volume d'eau qu'ils contiennent. Par chacun des points de division de h', élevons des ordonnées respectivement égales ou proportionnelles à chacun des volumes correspondants et joignons tous ces points par un trait continu : l'aire de la figure *abc*, qui s'obtient par la formule de Thomas Simpson, donne l'expression de ce travail.

L'équation générale du travail pour un auget sera donc :

$$T' = 1000\,qh + \frac{1000h'}{3\times 8}\left[q^{\text{I}} + 4\left(q^{\text{II}} + q^{\text{IV}} + q^{\text{VI}} + q^{\text{VIII}}\right) + 2\left(q^{\text{III}} + q^{\text{V}} + q^{\text{VII}}\right)\right] + 102Qv(V\cos\alpha - v($$

Or v représentant la vitesse à la circonférence extérieure de la roue, e l'écartement des augets sur cette même circonférence, $\frac{v}{e}$ représentera le nombre d'augets qui passent devant l'orifice par seconde, et le travail par seconde sera exprimé par

$$T = \frac{1000v}{e}\left(qh + \frac{h'}{3\times 8}\left[q^{\text{I}} + 4\left(q^{\text{II}} + q^{\text{IV}} + q^{\text{VI}} + q^{\text{VIII}}\right) + 2\left(q^{\text{III}} + q^{\text{V}} + q^{\text{VII}}\right)\right]\right) + 102Qv(V\cos\alpha - v)$$

L'expérience a fait voir que la vitesse la plus convenable pour les roues lentes est de 1 mètre à $1^{\text{m}},30$; dans ces conditions, elles donnent un rendement qui va jusqu'à 0,80 et même au delà.

Les roues rapides marchent avec une vitesse de 3 mètres au minimum, mais le rendement s'abaisse à 0,40 et même au-dessous.

Les roues à augets conviennent aux grandes chutes. Au-dessous de 3 mètres, les roues de côté sont préférables.

EXERCICES.

I. — Quelle est la hauteur du centre de courbure de l'eau au-dessus de l'axe de rotation dans une roue à augets qui fait 18 tours par minute?

II. — Quel est le nombre de tours par minute effectués par une roue à augets, sachant que la distance du centre de courbure de l'eau au-dessus de l'axe de rotation et de $3^{\text{m}},26$?

III. — Quel est l'effet utile d'une roue à augets fonctionnant dans les circonstances suivantes : la dépense par seconde $Q = 0^{\text{mc}},360$; la vitesse V d'arrivée de l'eau $= 4^{\text{m}},25$, et celle v de la roue $2^{\text{m}},86$; l'angle des deux tangentes à la circonférence extérieure et à la parabole décrite par le filet moyen est de $10°$; $h = 1,45$ et $h' = 1,74$, l'écartement des augets à la circonférence extérieure étant de $0^{\text{m}},35$: la hauteur h' ayant été partagée en 8 parties égales, on a pour les volumes contenus dans chaque auget, depuis le moment où le déversement commence jusqu'à celui où il finit, $q = 0^{\text{mc}},044$; $q_{\text{I}} = 0^{\text{mc}},044$; $q^{\text{II}} = 0^{\text{mc}},042$; $q_{\text{III}} = 0^{\text{mc}},036$; $q_{\text{IV}} = 0^{\text{mc}},029$; $q^{\text{V}} = 0^{\text{mc}},017$; $q^{\text{VI}} = 0^{\text{mc}},009$; $q^{\text{VII}} = 0^{\text{mc}},005$; $q^{\text{VIII}} = 0^{\text{mc}},0015$ et $q^{\text{IX}} = 0$?

§ 5. — TURBINES.

117. Considérations générales sur les turbines. — Les roues à axe vertical, appelées plus ordinairement *turbines*, peuvent être rangées, depuis les nombreux perfectionnements qu'elles ont subis il y a un petit nombre d'années, parmi les meilleurs récepteurs hydrauliques.

M. Fourneyron est le premier qui modifia ce genre de récepteurs inventé par Euler en 1754, et qui l'amena à un tel point, que son emploi dans l'industrie fut dès lors assuré.

118. Les turbines ont sur les récepteurs à axe horizontal, les avantages suivants : 1° de n'occuper que très-peu de place; 2° de marcher avec une vitesse assez grande; et 3° le point qui est le plus important, de s'approprier à toutes les chutes, à toutes les dépenses d'eau.

119. Turbine Fourneyron. — L'eau du bassin d'amont, pour

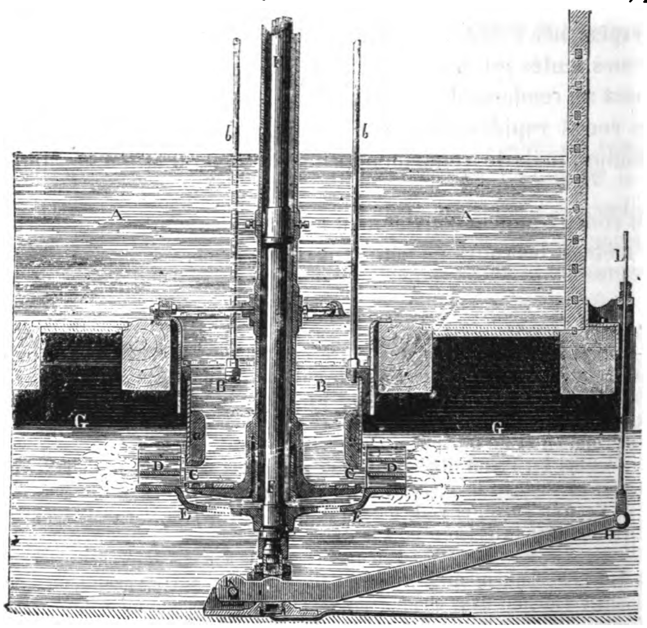


Fig. 45.

descendre dans le bief d'aval, s'introduit dans une cuve circulaire

en fonte B (*fig.* 43), à l'intérieur de laquelle peut glisser un cylindre *aa*, servant de vanne. Un plateau qui forme le fond de ce cylindre est solidement fixé à un manchon, appelé tuyau *porte-fond*, et qui enveloppe l'arbre central F, auquel l'eau doit communiquer un mouvement de rotation. Cet arbre porte, à sa partie supérieure, un engrenage destiné à transmettre le mouvement à un arbre intermédiaire entre lui et l'arbre de couche de l'usine. Il repose à sa partie inférieure sur un pivot, qu'on peut élever d'une faible quantité, au moyen d'un levier HK, articulé au point K, et dont l'autre extrémité H porte une tige verticale L, filetée à sa partie supérieure et recevant un écrou maintenu par des pièces fixes; en tournant cet écrou dans le sens convenable, la tige L soulève le levier HK, et par suite la roue D, de façon à la disposer convenablement. Cette roue D se compose de deux couronnes horizontales réunies entre elles par des aubes en tôle ou en fonte, qui sont des surfaces cylindriques à génératrices verticales, dont la forme est suffisamment indiquée dans la coupe horizontale (*fig.* 44). La couronne inférieure est reliée à l'arbre F par une calotte E, de façon à les rendre solidaires.

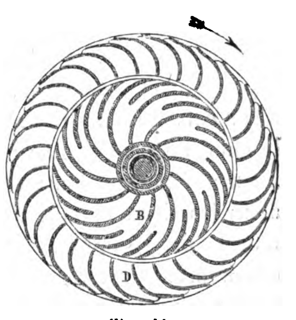


Fig. 44.

Comme il est très-important que l'eau n'arrive pas sur la roue d'une façon quelconque, il faut guider le liquide avant son entrée sur cette roue. Pour cela, on dispose sur le plateau C, des aubes B, également en tôle, appelées *directrices*, dont la courbure est dirigée en sens inverse de celle des aubes précédentes, mais ayant même hauteur. Le nombre des aubes de la roue est de 1/3 supérieur à celui des directrices; celles-ci n'ont pas toutes la même longueur, la moitié seulement est prolongée jusqu'à l'axe, l'autre moitié ne s'étend à peu près qu'à la circonférence moyenne du plateau, afin d'éviter un trop grand rapprochement des extrémités voisines de l'axe.

La vanne est manœuvrée au moyen de trois tiges verticales *b* également espacées sur une circonférence concentrique à l'axe. Ces tiges, filetées à leur extrémité supérieure, reçoivent chacune

une roue faisant office d'écrou, assujettie à tourner sur place, et engrenant avec une autre roue, montée folle sur l'axe central de la turbine. Le mouvement de rotation étant transmis à l'un des engrenages par un moyen quelconque, les trois tiges et par suite la vanne se trouveront élevées ou abaissées de la même quantité.

Supposons la vanne entièrement levée, et de plus que la rotation de l'axe soit empêchée ; les filets liquides, à leur sortie des canaux directeurs, rencontreront la surface concave des aubes qui s'opposent à leur mouvement, et exerceront sur elles des pressions horizontales, qui tendent à faire tourner la roue dans le sens de la flèche. Si donc le moment de la résistance est inférieur à la somme des moments des actions exercées par le liquide, et l'arbre pouvant tourner librement, il se produira le mouvement de rotation de la roue, et par suite de l'arbre qui en est solidaire.

Il semblerait, au premier abord, que les filets liquides venant rencontrer les aubes de la turbine presque perpendiculairement, ceux-ci doivent éprouver un choc; mais il n'en est rien, si le récepteur est bien construit, car par suite du mouvement de la roue, les aubes fuyant devant les filets liquides, ceux-ci ne peuvent exercer d'action qu'en vertu de la vitesse relative qu'ils possèdent par rapport à cette roue; or, comme le dernier élément de la courbe à son extrémité intérieure est dirigé suivant cette vitesse relative, le choc ne peut pas se produire, ou du moins est considérablement atténué. Pour arriver à ce que l'eau sorte sans vitesse, et alors les deux conditions du bon établissement et de la bonne marche des récepteurs seront remplies, il faut faire prendre à la circonférence extérieure une vitesse précisément égale à la vitesse relative de l'eau, au sortir des aubes de la turbine.

Afin d'éviter autant que possible les effets de la contraction, pendant le passage du liquide du bief supérieur jusqu'à la roue, il faut arrondir les bords supérieurs de la cuve B, et de même, munir la vanne cylindrique d'appendices en bois, placés à la partie inférieure, et arrondis à leurs bords ; cette garniture en bois se compose d'une série de pièces tout à fait semblables, et occupant chacune l'espace libre compris entre deux directrices consécutives, afin que la vanne puisse s'abaisser complétement.

Dans les turbines Fourneyron, on doit donner à la section circulaire de la cuve où se trouvent les cloisons directrices, une

surface au moins égale à quatre fois la section droite des orifices distributeurs, afin que les filets liquides puissent passer facilement de la direction verticale à la direction horizontale, qu'ils doivent avoir au moment de leur sortie.

120. Il résulte des expériences faites par M. Morin, sur diverses turbines Fourneyron, que le rendement varie entre 0,65 et 0,70, lorsque la vanne est levée de toute la hauteur de la roue.

Comme elles peuvent fonctionner sous l'eau, à des profondeurs assez considérables sans que le rendement varie d'une manière sensible, on doit, lors de l'installation, les placer au niveau des plus basses eaux d'aval, afin d'utiliser en tout temps la chute dont on dispose.

Elles ont l'avantage de pouvoir marcher avec des vitesses très-différentes de celle qui correspond au maximum d'effet, sans que l'effet utile s'écarte sensiblement de ce maximum.

121. Pour qu'une turbine Fourneyron produise son maximum d'effet utile, il faut que la vanne soit entièrement levée ; si elle n'est levée que d'une fraction de la hauteur de la roue, le rendement s'abaisse à 0,60; car, dans ce cas, l'eau s'introduisant dans la roue par un orifice moins élevé que la distance verticale séparant les deux couronnes, éprouve, à son passage dans les aubes, un changement brusque de section, occasionnant une perte de puissance vive. Pour remédier à cet inconvénient, on dispose sur la hauteur de la roue des diaphragmes horizontaux, de manière à faire descendre la vanne juste au niveau de l'une de ces cloisons ; mais par contre, la construction de l'appareil est plus compliquée et le frottement de l'eau contre les parois est augmenté.

122. M. Callon emploie une disposition qui consiste à rendre indépendante chacune des vannes, de sorte que, pour modérer la dépense, il suffit d'abaisser un certain nombre de vannes bouchant un même nombre d'orifices. Ce système a encore un inconvénient : c'est que lorsqu'un des canaux mobiles s'est rempli en passant devant un orifice ouvert et qu'il passe ensuite devant un orifice fermé, il se produit une non-permanence dans le mouvement, et, par suite, une perte de puissance vive.

123. Turbine Fontaine. — Dans la turbine Fontaine, les molécules liquides ne se déplacent pas dans des plans horizontaux comme dans la turbine Fourneyron ; mais elles agissent de haut

en bas, suivant des lignes appartenant à des surfaces cylindriques de même axe que la roue.

Une turbine Fontaine se compose d'un arbre cylindrique en fer G (*fig.* 45), solidement fixé à sa partie inférieure dans le bief

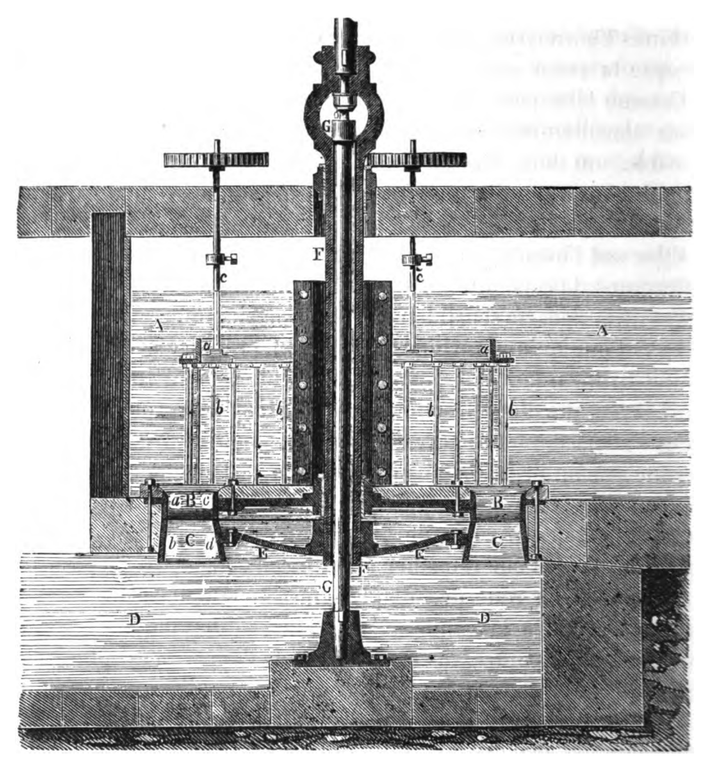


Fig. 45.

d'aval; il supporte à sa partie supérieure une pièce évidée faisant corps avec un tuyau creux F qui l'entoure sur une grande partie de sa hauteur. A ce cylindre creux est fixé un arbre reposant sur le pivot O et qui est destiné à transmettre le mouvement. Une vis et un écrou permettent de régler facilement la position de cet arbre. La calotte en fonte E, fixée au cylindre creux, supporte la roue C maintenue au même niveau que le bief d'aval et quelquefois un peu au-dessous. Cette roue, sur laquelle l'eau vient exer-

cer son action, se compose de deux surfaces de révolution ayant pour axe celui de la roue et pour méridiennes *ab* et *cd*; dans l'intervalle séparant les deux couronnes, on dispose des aubes en tôle analogues à celle de la turbine Fourneyron. Immédiatement au-dessus se trouvent les canaux directeurs emboîtés dans un tourteau qui remplit, en laissant le jeu nécessaire, tout l'intervalle compris entre ces canaux directeurs et l'arbre tournant. Les aubes disposées sur cette couronne sont appelées *directrices* et sont inclinées en sens inverse de celles de la roue.

124. Afin de faire connaître la forme des aubes et celles des directrices, supposons que l'on fasse une coupe concentrique à l'arbre et passant à égale distance des méridiennes *ab* et *cd*, puis que l'on développe cette coupe sur un plan; les courbes développées donneront des profils tels que *abc*, *a'b'c'* (*fig.* 46), et si nous concevons des surfaces gauches engendrées par une droite

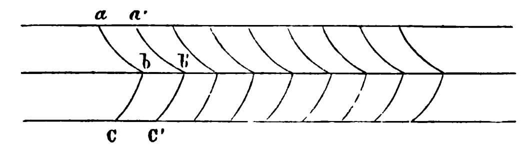


Fig. 46.

horizontale qui glisserait constamment sur ces profils en s'appuyant sur l'axe, nous aurons déterminé les surfaces des aubes et des directrices.

L'eau, arrivant du bief supérieur, pénètre dans les canaux directeurs formés par les directrices et sort avec la direction du dernier élément; puis, rencontrant les aubes mobiles, elle exerce des pressions qui les forcent à reculer, et en vertu de sa vitesse relative, se rend dans les canaux formés par ces aubes en imprimant à la roue un mouvement de rotation; elle s'écoule alors dans le bief d'aval avec une faible vitesse.

125. Dans les turbines Fontaine, pour régler la dépense, on se sert de vannes servant à augmenter ou à diminuer la section des orifices d'écoulement en les enfonçant plus ou moins dans l'intervalle compris entre *e* (*fig.* 47) et la directrice suivante. Ces vannes présentent une surface plane du côté où elles s'appuient sur les directrices qui servent à les guider, et de l'autre une sur-

face courbe formant avec *e* un orifice évasé, afin d'éviter autant que possible les effets de la contraction. On peut donc rétrécir l'orifice des canaux directeurs et par suite régler la dépense, car on agit sur toutes les vannes d'une manière identique.

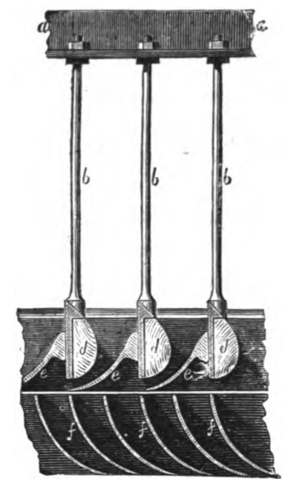


Fig. 47.

Ces vannes sont fixées à des tiges verticales *b* assemblées à une couronne métallique à laquelle sont fixées trois autres tiges verticales, filetées à leur partie supérieure, et qui reçoivent chacune un engrenage faisant office d'écrou et assujetti à tourner sur place. Au moyen d'un dispositif particulier, en communiquant le mouvement à l'un quelconque des engrenages que l'on rend solidaire des deux autres au moyen d'une chaîne métallique sans fin, les tiges, et par suite les vannes, seront toutes également soulevées ou abaissées de la même quantité.

126. L'inconvénient dont nous avons parlé dans la turbine Fourneyron existe toujours dans la turbine Fontaine, c'est-à-dire que le changement brusque de section, lorsque les vannes ne sont pas entièrement levées, produit une perte de puissance vive ; mais cette perte est sensiblement diminuée.

Un avantage assez notable, c'est que le pivot, étant à la partie supérieure, peut être visité et graissé aussi souvent qu'on le désire.

127. Il résulte des expériences du général Morin que, les vannes étant levées de manière à démasquer complétement les orifices formés par les directrices, le rendement s'élève à 0,68 ou 0,70; si les vannes sont abaissées de façon à réduire la dépense dans le rapport de 4 à 3, le rendement descend à 0,575.

La vitesse de la roue peut s'écarter sensiblement de celle qui correspond au maximum d'effet, sans que le travail utile s'abaisse d'une manière notable.

Lorsque le cours d'eau est sujet à des crues assez fréquentes, on peut disposer la turbine à double système de couronnes et

de vannes, pouvant dépenser des quantités d'eau très-variables; au moyen de cette disposition le rendement s'élève ordinairement à 0,70; dans ce cas, il est préférable de ne pas noyer la turbine, à moins de diminuer le travail utile.

128. Pour une turbine devant marcher avec un volume d'eau variable, le vannage se pratique fréquemment au moyen d'une disposition particulière appelée vannage à *papillons*. Les orifices d'entrée des canaux directeurs occupant une surface horizontale comprise entre deux cercles concentriques à la roue, on dispose deux rouleaux R et R′ (*fig.* 48) pouvant rouler sur cette surface; ces rouleaux ont la forme de troncs de cône et sont assemblés à un moyeu K relié à l'arbre H concentrique à celui de la roue. Ils portent chacun une bande de cuir de même largeur que la couronne, et dont l'une des extrémités est fixée au rouleau correspondant, l'autre est maintenue sur la surface horizontale aux points A et A′. En faisant tourner l'arbre dans un sens, on déroule les bandes de cuir qui ferment un certain nombre d'orifices, l'autre partie restant ouverte en donnant un libre passage à l'eau. Quand il marche en sens inverse, le contraire a lieu, c'est-à-dire que les rouleaux débouchent les ouvertures en enroulant les bandes de cuir. Sur la figure, la moitié environ des orifices sont fermées.

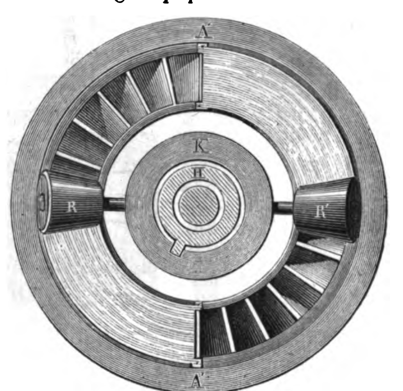


Fig. 48.

129. Turbine Kœcklin. — Cette turbine, dont l'idée première est due à M. Jonval, a été ensuite modifiée par M. Kœcklin de Mulhouse. Elle offre, quant à la disposition des aubes et des directrices, une grande analogie avec la turbine Fontaine; la différence la plus remarquable consiste en ce qu'elle est située au-dessus du bief d'aval et ordinairement plus près du bief supérieur que du bief inférieur. Par cette disposition, on perd une grande partie de la hauteur de chute; mais cette perte est exactement

compensée par l'aspiration qui se produit dans la partie du puits située au-dessous de la roue.

120. L'arbre vertical A (*fig.* 49), auquel est fixée la roue au moyen de tourteaux en fonte, repose sur un pivot P solidement

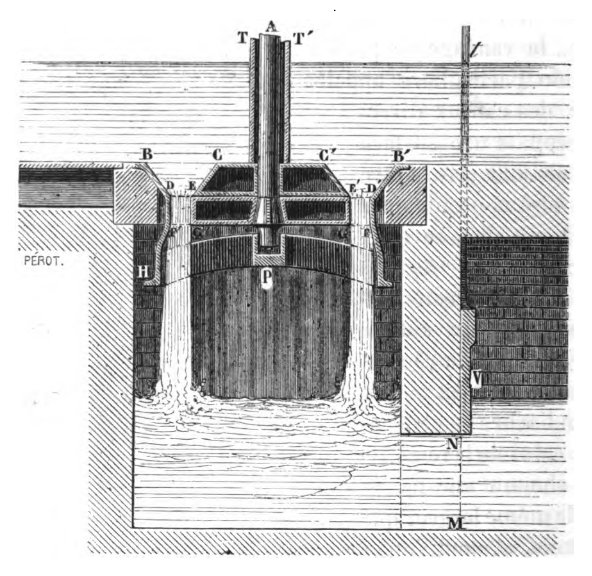


Fig. 49.

relié par des bras de même métal au bas d'une surface de révolution de même axe que la roue et dont la méridienne est BDFH. Cette cuve est scellée au bord d'un puits en maçonnerie qui fait communiquer le bief supérieur avec le bief d'aval, et limite extérieurement les cloisons directrices établies dans un espace annulaire dont le trapèze BCDE est la section verticale ; elles sont reliées à un tourteau en fonte embrassant l'arbre et ne lui laissant que le jeu nécessaire. Un cylindre creux TT' reposant par sa partie inférieure sur le tourteau CC', entoure l'arbre moteur de façon à empêcher le contact de celui-ci avec le liquide du bassin d'amont.

La roue est placée immédiatement au-dessous des canaux directeurs. On a supprimé la surface latérale qui, dans la turbine Fontaine, limite extérieurement les aubes mobiles. Celles-ci sont formées par des surfaces hélicoïdes dont la génératrice est hori-

zontale et elles ne laissent entre elles et la partie DF de la cuve qu'un jeu de 1 ou 2 millimètres.

Une vanne V, manœuvrée au moyen d'une tige *t* et placée à la partie inférieure du puits, sert à régler la dépense en augmentant ou en diminuant l'ouverture MN.

131. Pour la mise en train de l'appareil, on abaisse complétement la vanne V et on permet à l'eau du bassin d'amont d'arriver sur la turbine, de façon à remplir le puits; ensuite, on soulève cette vanne très-lentement de manière à ce que l'écoulement du liquide s'établisse depuis la sortie de la turbine jusqu'au biet d'aval, et que le liquide forme une colonne continue animée d'une faible vitesse [1].

132. Il résulte des expériences du général Morin que les turbines Kœcklin donnent un rendement de 0,72. Lorsque la dépense diminue d'une manière notable, on rétrécit la section des canaux formés par deux aubes consécutives en y plaçant des coins obturateurs; quand la moitié des canaux sont ainsi rétrécis, le rendement est de 0,70, et il s'abaisse à 0,65 et même à 0,63, lorsque tous les obturateurs sont placés.

Si la vanne n'est que partiellement levée, le rendement diminue d'une manière sensible.

La situation de la turbine entre les deux niveaux d'amont et d'aval permet de la mettre facilement à sec; pour cela, il suffit de laisser ouverte la vanne du canal de fuite et fermer celle du canal d'arrivée. Le pivot peut être aisément visité et les réparations sont faciles à faire.

133. Turbine hydropneumatique. — La turbine hydropneumatique, due à MM. Callon et Girard, a été imaginée dans le but de remédier à la diminution de rendement qui se produit dans la turbine Fontaine quand elle est noyée, c'est-à-dire quand l'eau d'aval s'élève au-dessus de la couronne mobile, et également de remédier à l'inconvénient de la turbine Fourneyron, lorsque la vanne n'est pas complétement levée, c'est-à-dire de pouvoir régler la dépense sans occasionner de perte sensible dans le rendement.

Le moyen employé pour éviter l'élévation du niveau d'aval, et

[1] Afin de mieux faire voir la disposition de ce moteur, la figure représente la turbine au moment de la levée de vanne dans le canal d'amont, c'est-à-dire au moment où l'eau commence à agir.

qui a donné jusqu'à présent d'excellents résultats, consiste à entourer la turbine d'une grande cloche en tôle dont les bords se trouvent à quelques centimètres au-dessous de la couronne inférieure de la roue. Au moyen d'une pompe mise en mouvement par la machine elle-même, on comprime l'air sous cette cloche; le niveau du liquide à l'intérieur s'abaisse alors jusqu'aux bords de la cloche et ne peut descendre plus bas, car l'air s'échappe et retourne dans l'atmosphère en traversant l'eau du bief d'aval.

Si l'on suppose, dans une turbine Fourneyron, la vanne cylindrique soulevée seulement d'une portion de la hauteur de la roue, la veine liquide aura une hauteur moindre que la distance verticale comprise entre les deux couronnes ; mais il n'en résulte pas pour cela un changement brusque de section, car la turbine se mouvant dans l'air comprimé et n'étant pas noyée dans le bief d'aval, la veine fluide conserve la même épaisseur depuis sa sortie au-dessous de la vanne jusqu'à ce qu'elle quitte la roue, et elle ne mouille pas la couronne supérieure qui ne sert plus alors qu'à relier les aubes entre elles; aussi l'évide-t-on, de manière à mettre plus directement en communication l'eau avec l'air comprimé qui l'entoure.

L'expérience prouve que ces turbines donnent un rendement moyen de 0,70 à 0,75, quelle que soit la levée de vanne.

CHAPITRE V

MACHINES A VAPEUR

§ 1. — HISTORIQUE

134. L'emploi de la vapeur comme moteur est une des plus grandes inventions des temps modernes.

Qu'y a-t-il de plus imposant qu'une de ces admirables et puissantes machines marines, telles que celle du *Friedland*, de la force de 950 chevaux nominaux, figurant à l'Exposition universelle de 1867? Au moyen de ces gigantesques appareils, les navires, qui étaient autrefois exposés à de très-longues traversées, fendent aujourd'hui les flots avec rapidité, malgré les vents contraires qui s'opposent à leur marche.

Quoi de plus surprenant que la vue d'une locomotive roulant avec rapidité sur deux rails, lançant des torrents de vapeur et de fumée, traînant après elle, et avec facilité, de lourds convois chargés de marchandises! Qui aurait voulu croire, il y a une centaine d'années, que le génie de l'homme serait assez puissant pour créer ces sortes de machines au moyen desquelles on franchit l'espace, on traverse les plaines et les montagnes comme par enchantement?

Mais, le point essentiel et celui qui doit captiver l'attention, c'est le changement survenu dans les ateliers. Un moteur unique transmet, au moyen des organes nécessaires, sa force motrice aux machines-outils qui accomplissent bien plus rapidement et à meilleur marché les différents travaux qui exigeaient naguère un temps considérable et une habileté consommée de la part de l'ouvrier.

Avant de commencer l'étude des machines à vapeur, nous croyons devoir donner un rapide exposé historique.

135. L'idée première de l'emploi de la vapeur remonte à Héron, philosophe d'Alexandrie, qui vivait vers l'an 120 avant Jésus-

Christ. L'appareil dont il se servit, et qu'on appelle *éolypile*, consiste en une sphère creuse en métal, mobile autour d'un diamètre OO′ (*fig.* 50), et qui reçoit de la vapeur d'*eau* par l'un des supports c. Elle porte en outre, dans un plan perpendiculaire à OO′, deux tubes *tt′* coudés en sens inverse, et diamétralement opposés. La vapeur, s'échappant par les orifices *t* et *t′*, produit le même effet que le liquide sortant par un tourniquet hydraulique; elle détermine, par réaction, le mouvement de rotation de la sphère.

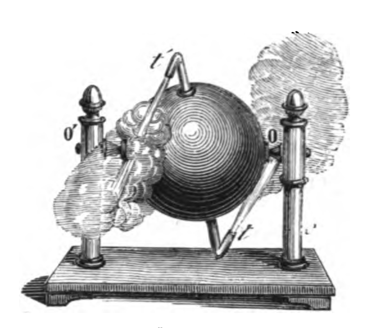


Fig. 50.

136. En 1615, un Français, Salomon de Caus, eut l'idée d'employer la force motrice de la vapeur pour produire l'élévation de l'eau. Il prit à cet effet un ballon de cuivre A (*fig.* 51) contenant de l'eau, et muni de deux tubes, dont l'un B, portant un robinet E, sert à l'introduction du liquide, et l'autre, CF, ouvert à ses deux extrémités, plonge jusque près du fond du vase. L'eau étant échauffée par un moyen quelconque, il se forme de la vapeur qui ne peut évidemment pas s'échapper, et, lorsque la tension de cette vapeur est devenue suffisante pour vaincre la pression atmosphérique, elle presse sur la surface du liquide et le force à monter dans le tube C, d'où il sort sous la forme d'un jet continu.

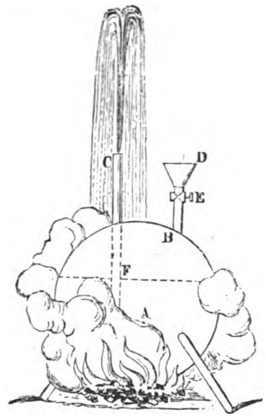


Fig. 51.

137. En Angleterre, le marquis de Worcester publia, en 1663, la description d'un appareil analogue au précédent, et qui, du reste, n'en est qu'un perfectionnement. Cet appareil est formé de deux chaudières A et A′ (*fig.* 52), disposées sur un fourneau à côté l'une de l'autre. Les tuyaux B, communiquant au moyen de robinets *r* et *r′* avec un troisième tube E, ont l'extrémité inférieure près du fond des chaudières. Le tube E vient déboucher dans un réservoir D destiné à contenir l'eau qui est

élevée. Deux autres tubes C, munis également de robinets *s* et *s'*, servent également à l'introduction de l'eau dans les chaudières qui agissent alternativement. Si l'on remplit une des chaudières et qu'on fasse du feu au-dessous, après avoir fermé les robinets *s'* et *r*, la pression de la vapeur sur la surface du liquide forcera celui-c à s'élever dans le tube E, et à se déverser dans le réservoir D. Lorsque la plus grande partie de l'eau contenue dans la chaudière se sera élevée par le tuyau E, on fermera les robinets *s* et *r'*, et on ouvrira les robinets *s'* et *r*; la chaudière A' fonctionnera. Pendant ce temps, on remplira la chaudière A, et on portera le liquide à l'ébullition de manière à ce qu'il n'y ait aucune perte de temps.

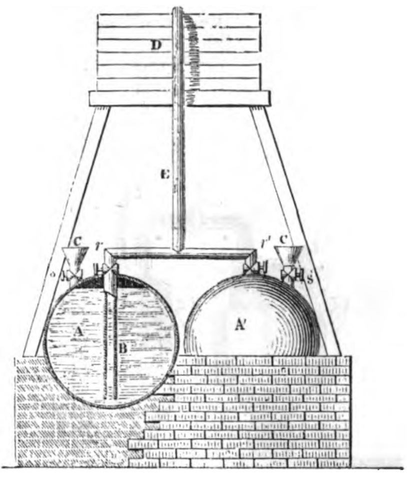


Fig. 52.

138. En 1689, le capitaine Savery, ancien mineur, fit construire une machine destinée à retirer l'eau qui envahissait les houillères. Elle diffère des précédentes en ce que la vapeur n'est pas produite par une partie de l'eau à élever, mais par une masse de liquide séparée, et qui est seule soumise à l'action de la chaleur. Voici le principe de son appareil : un tuyau T (*fig.* 53), muni d'un robinet R, relie deux récipients A et B, dont le premier seul se place sur un fourneau, et est destiné à la production de la vapeur. Le fond du récipient B est muni d'un tuyau K se bifurquant en deux branches verticales H et H', dont la première plonge dans l'eau à élever, et dont la seconde débouche dans un réservoir supérieur M. Deux soupapes, l'une S d'ascension, et l'autre S' de refoulement, sont disposées dans les deux branches de ce tuyau. En ouvrant le robinet R, la vapeur entre dans le récipient B, et le remplit en chassant l'air qu'il contient. On ferme ensuite le robinet R, et, à l'aide d'un autre robinet R', on fait couler de l'eau froide prove-

nant du réservoir supérieur M, sur la surface extérieure du récipient; la vapeur se condense, et le vide ainsi formé détermine l'ascension de l'eau qui s'élève en soulevant le clapet S. On ouvre de nouveau le robinet R, la vapeur vient échauffer par condensation le liquide contenu dans le vase B, et elle exerce une pression croissante sur la surface; puis, lorsque cette pression est devenue suffisante, l'eau s'élève dans la branche H′ en soulevant le clapet S′ jusqu'au réservoir M.

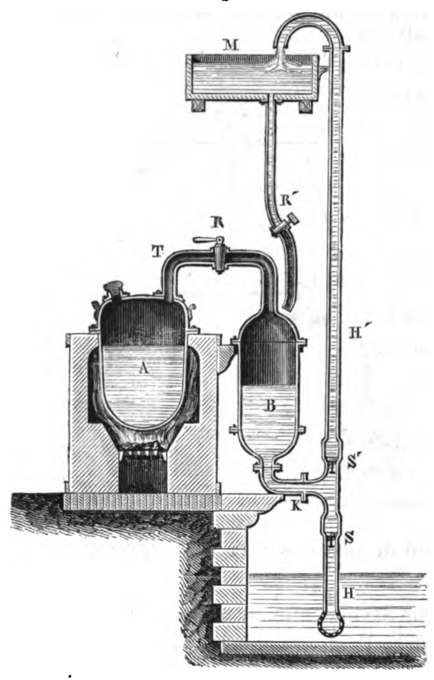


Fig. 53.

Pour éviter la perte de temps, Savery employait deux récipients égaux au récipient B, qu'il mettait alternativement en communication avec la chaudière, de façon que la vapeur passât dans l'un de ces vases, pendant que l'autre se refroidissait.

139. Dès que les expériences d'Otto de Guéricke et de Pascal eurent établi l'effet puissant que la pression atmosphérique exerce sur tous les corps, Denis Papin, né à Blois en 1647, chercha les moyens d'utiliser cette pression en se servant des procédés nouveaux. En 1690, il reconnut que le meilleur moyen consistait à profiter de la propriété que possède la vapeur d'eau de se liquéfier par le refroidissement, et de laisser presque vide l'espace qu'elle occupait primitivement.

Il prit un cylindre C (*fig.* 54,) ouvert à sa partie supérieure, recevant un piston P, muni d'un orifice O. On introduit une petite quantité d'eau dans le cylindre, et on abaisse le piston jus-

qu'à ce qu'il se trouve en contact avec le liquide, l'air s'échappant par l'orifice O, que l'on ferme alors. Si l'on fait du feu sous le cylindre, l'eau se vaporisera, et lorsque la tension de la vapeur dépassera la pression atmosphérique, la différence de pression sur les deux faces opposées du piston fera monter celui-ci. A l'instant où il arrive à la partie supérieure de sa course, il se trouve arrêté par les taquets *a* diamétralement opposés; on laisse alors tomber le feu, et au bout d'un certain temps, la vapeur n'ayant plus qu'une faible tension, la pression atmosphérique agira seule et fera descendre le piston, en soulevant un poids P, dont l'élévation constitue un travail.

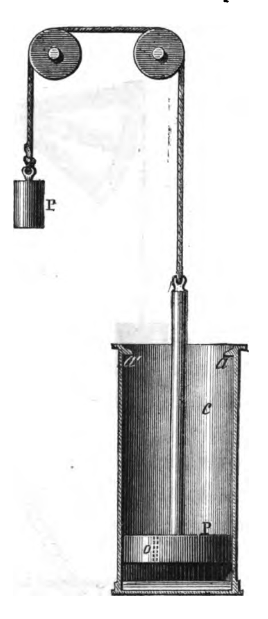


Fig. 54.

Avec la même quantité d'eau qu'on a introduite dans le cylindre, on pourra recommencer l'opération autant de fois qu'on le voudra.

Il est à remarquer que le travail total de la machine est dû complétement à la vapeur, car la pression atmosphérique a un double emploi : elle est force motrice lorsque le piston descend, et force retardatrice lorsqu'il monte.

140. Cette machine est restée sans emploi dans la pratique jusqu'en 1705, époque à laquelle Cawley et Newcomen, artisans de Darmouth, s'associant avec Savery, l'appliquèrent avec succès à la distribution des eaux de Londres et à l'épuisement des mines. La principale modification qu'ils apportèrent à l'appareil de Papin, fut d'échauffer l'eau d'une manière continue, en séparant la chaudière du corps de pompe, de façon à faire arriver la vapeur dans le cylindre à un instant quelconque; on économisait ainsi le temps nécessaire à la vaporisation de l'eau, à chaque coup de piston.

La vapeur qui se forme dans la chaudière A (*fig.* 55) est introduite dans un cylindre vertical B, ouvert à sa partie supérieure.

dans lequel se meut un piston C. La tige de ce piston s'adapte, au moyen d'une chaîne, à l'extrémité d'un balancier D, mobile au-

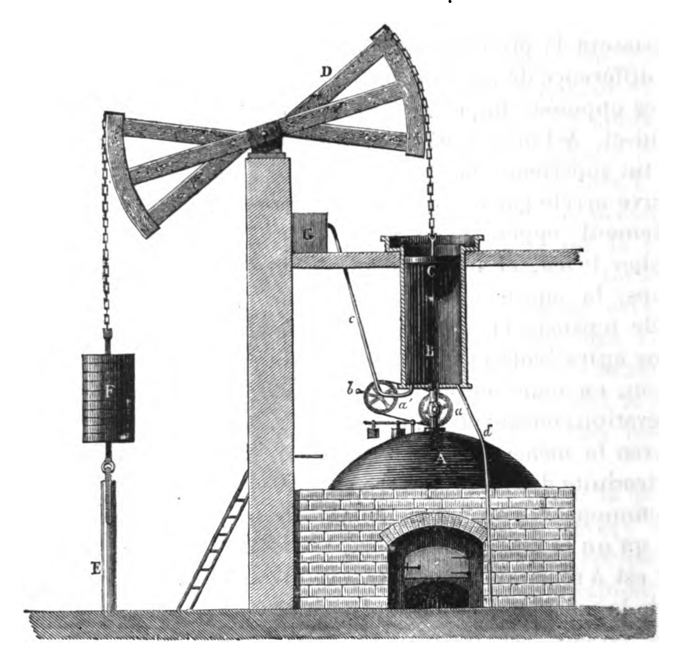


Fig. 55.

tour de son centre. A l'extrémité opposée, s'adapte également une autre chaîne et un contre-poids F, auquel est fixée la tige E d'une pompe destinée à l'épuisement. Si on établit la communication entre le cylindre et la chaudière, au moyen du robinet *a*, au moment où le piston est au bas de sa course, la vapeur agira par sa force élastique, pour contre-balancer la pression atmosphérique, et fera monter le piston. Celui-ci étant arrivé au haut de sa course, on ferme le robinet d'admission *a*, et on fait arriver de l'eau dans le cylindre, afin de produire la condensation, au moyen d'un tube c, communiquant avec un réservoir supérieur G. La pression de la vapeur devenant alors très-faible, l'excès de la pression atmosphérique sur cette tension suffira pour faire descendre le piston qui, en entraînant le balancier D, soulèvera la tige E de la

pompe. Un tube *d* permet de temps à autre de purger le cylindre, c'est-à-dire d'en laisser écouler l'eau qu'il contient.

Lors du premier fonctionnement de la machine, on opérait la condensation de la vapeur en projetant de l'eau sur la surface extérieure du cylindre, et cette condensation s'opérait lentement. En observant un jour la machine, Savery s'aperçut qu'une petite quantité de liquide étant entrée dans le cylindre, la condensation s'opérait plus rapidement. Il eut alors l'ingénieuse idée, comme nous l'avons vu plus haut, d'injecter l'eau dans l'intérieur du cylindre, et à partir de ce moment la machine donna 8 à 10 coups de piston par minute.

141. Par un heureux hasard, une modification importante y fut encore apportée par un jeune enfant, Henri Potter, qui était chargé accidentellement de la conduite des robinets. Voyant ses camarades jouer près de lui, la passion du jeu l'éclaira d'un trait de génie; il attacha à chacun des robinets une ficelle qu'il relia au balancier, et il le fit d'une manière si habile, qu'ils furent ouverts ou fermés en temps convenable. Pour la première fois, on vit une machine à vapeur fonctionner seule; des tiges articulées remplacèrent les ficelles et ces machines furent dès lors acquises à l'industrie.

142. James Watt, né en 1736, à Greenock (Écosse), devait encore accomplir d'importants perfectionnements, et ses nombreuses découvertes devaient rendre son nom à jamais mémorable. Attaché à l'université de Glascow, comme conservateur des instruments de physique, il eut, en 1769, à réparer une machine atmosphérique de Newcomen, qui n'avait jamais pu fonctionner. Il fut frappé du mode de condensation de la vapeur par l'injection de l'eau dans le cylindre, qui en refroidissait les parois. De plus, lorsque le piston était au bas de sa course et qu'on ouvrait le robinet d'admission, une partie de la vapeur se condensait, d'où il résultait une perte considérable de chaleur et par suite de combustible. Il chercha à liquéfier la vapeur dans un vase séparé, qu'il nomma *condenseur*, dans lequel on faisait arriver, à cet effet, la quantité d'eau nécessaire; de cette façon, toute la chaleur qui était destinée à réchauffer le cylindre était économisée; et comme conséquence immédiate, il imagina la *pompe à air*, destinée à retirer l'eau du condenseur.

143. Quelque temps après, il résolut de faire agir la vapeur successivement sur chacune des faces du piston, et il obtint la machine à *double effet*.

144. Pour transmettre le mouvement au balancier, Watt imagina le *parallélogramme articulé*, qui porte son nom ; il transforma ainsi le mouvement rectiligne alternatif de la tige du piston, en un mouvement circulaire alternatif du balancier. Ensuite, à l'aide d'une *bielle* et d'une *manivelle*, il transforma encore ce mouvement circulaire alternatif en un mouvement circulaire continu de l'arbre moteur, auquel il adapta un *volant* pour faciliter le passage de la manivelle aux points morts.

145. Il remarqua encore que, si la tension s'élevait ou s'abaissait dans la chaudière, il se produisait des variations de vitesse dans la marche des machines ; il se proposa de faire régler les machines d'elles-mêmes, et il inventa le *régulateur à force centrifuge*.

146. Enfin, il couronna ses nombreuses et importantes découvertes par l'emploi de la *détente*, qui consiste à intercepter l'introduction de la vapeur avant que le piston ait terminé sa course dans un sens.

Par toutes ces créations successives, le célèbre mécanicien anglais amena les machines à vapeur à un tel point de perfection qu'on peut dire que c'est la seule invention sortie parfaite des mains de l'inventeur.

147. Watt employait dans ses machines la vapeur à basse pression, c'est-à-dire que la tension dans la chaudière était égale à celle de l'atmosphère. En 1797, Olivier Evans construisit les premières machines *à haute pression*, dans lesquelles la tension de la vapeur était égale à celle de plusieurs atmosphères.

148. Enfin, l'invention des *chaudières tubulaires*, en 1827, par Séguin aîné, et celle de la *coulisse*, pour le changement de marche, par Stephenson, permirent de résoudre le problème de la locomotion à vapeur, dont l'idée paraît remonter au milieu du siècle dernier.

§ 2. — CLASSIFICATION ET TRAVAIL DANS LES MACHINES A VAPEUR.

149. Classification des machines à vapeur. — D'après la ension à laquelle elles fonctionnent, on divise les machines à va-

peur en trois classes : 1° machines *à basse pression;* 2° machines *à moyenne pression;* 3° machines *à haute pression.*

On dit qu'une machine est *à basse pression,* lorsque la tension de la vapeur dans la chaudière ne dépasse pas une atmosphère et demie ; lorsque cette tension est de trois à quatre atmosphères, elles sont dites *à moyenne pression,* et enfin, elles sont *à haute pression,* si la tension dans le générateur dépasse quatre atmosphères.

150. La vapeur, après avoir agi sur le piston, dans les machines à haute pression, se répand ordinairement dans l'atmosphère, tandis que dans les machines à basse et à moyenne pression, cette vapeur va se liquéfier dans un condenseur; dans ce dernier cas, les machines sont dites *à condensation.*

151. Lorsque le cylindre est constamment en communication avec le générateur, la machine est dite *à pleine pression,* mais très-souvent le cylindre ne communique avec la chaudière que pendant une portion de la course du piston ; on dit alors que la machine est à *détente.*

En combinant la condensation et la détente, on peut classer les machines à vapeur en :

1° Machines *à condensation* sans *détente;*

2° Machines sans *condensation* et sans *détente;*

3° Machines *à condensation* et *à détente;*

4° Machines sans *condensation* et *à détente.*

152. D'après leur destination, les machines à vapeur peuvent encore se diviser en trois classes :

1° Machines de *manufacture,* comprenant les machines *fixes, demi-fixes* et *locomobiles;*

2° Machines *locomotives;*

3° Machines *marines.*

Dans la première classe, on dit que la machine est *fixe,* lorsque le générateur est séparé de la machine proprement dite, et quelquefois à une assez grande distance, quoiqu'il convienne de les rapprocher autant que possible l'une de l'autre pour éviter, comme nous le verrons plus loin, les pertes de chaleur.

La machine est *demi-fixe,* lorsque la chaudière fait corps avec la machine, et qu'elles sont facilement transportables. Dans les machine *locomobiles*, la chaudière fait aussi corps avec la ma-

chine, et elles sont munies d'un train de roues et de brancards, de manière à pouvoir y atteler des chevaux.

Les machines de *manufacture* fonctionnent généralement avec une vitesse constante, tandis que dans celles de la deuxième et de la troisième classe, la vitesse change à chaque instant.

153. Conditions auxquelles doit satisfaire une bonne machine à vapeur. — 1° Elle doit produire le maximum de vapeur avec un poids donné de combustible ;

2° Avec un poids donné de vapeur, elle doit fournir le maximum de travail.

Ces deux conditions peuvent se résumer en celle-ci :

Brûler le minimum de combustible pour produire un travail donné.

3° Toutes les pièces doivent être bien ajustées, et la machine doit offrir peu de chances de dérangement ou d'arrêt.

4° Elle doit permettre d'appliquer sa puissance le plus directement possible aux différents appareils ou outils qu'elle doit mettre en mouvement.

5° La machine doit développer sa force avec la régularité nécessaire aux différentes applications.

154. Détermination du travail dans les machines à vapeur. 1° Machines à condensation sans détente. — Proposons-nous de déterminer le travail produit par une machine sans détente et à condensation pendant une course de piston.

Soient H la longueur totale de la course du piston dont l'aire est ω, P la pression de la vapeur par unité de surface et P' celle exercée sur la face opposée du piston, qui est égale à la tension dans le condenseur et qu'on appelle *contre-pression*.

Le travail effectif T se compose du travail exercé par la pression P, qui est égal au produit de l'effort $P\omega$ multiplié par le chemin parcouru H dans le sens de l'effort, diminué de celui $P'\omega H$ exercé en sens contraire par la contre-pression P'. On aura donc

$$T = P\omega H - P'\omega H ;$$

et mettant ωH en facteur commun,

$$T = \omega H(P-P').$$

Or ωH est égal au volume décrit par le piston, c'est-à-dire au

volume de vapeur introduite; si nous le désignons par V, nous aurons

$$T = V(P-P') \quad (a).$$

Connaissant le travail développé à chaque course de piston, on en déduira le travail par minute en multipliant le résultat obtenu par le nombre n de coups de piston que la machine donne pendant ce temps, et le travail par seconde s'obtiendra en divisant ce nouveau résultat par 60. Le travail effectif exprimé en chevaux-vapeur sera par suite de

$$N = \frac{nV(P-P')}{60 \times 75} = \frac{nV(P-P')}{4500}.$$

155. On peut obtenir graphiquement l'expression de ce travail. Pour cela, portons sur une ligne d'abscisses OX (*fig.* 56) une longueur OA égale ou proportionnelle à la course du piston; sur

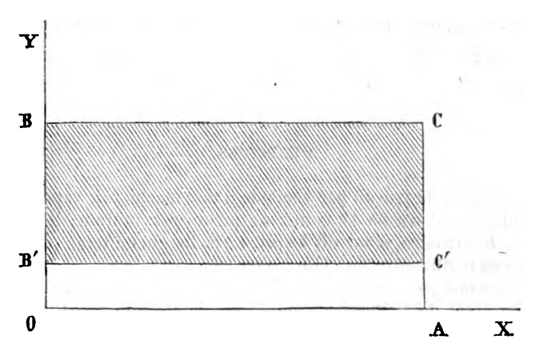


Fig. 56.

l'axe des ordonnées OY, et à la même échelle, une quantité OB représentant l'effort exercé $P\omega$. L'aire du rectangle OBCA construit sur ces deux droites donne le travail de la pression P, duquel il faut déduire celui de la contre-pression P', qui est représenté par l'aire du rectangle OB'C'A ayant même base que le précédent et pour hauteur $P'\omega$. La différence BB'CC' des aires représente le travail effectif de la machine.

EXERCICES.

I. — Quel est le travail par seconde d'une machine à vapeur à condensation sans détente, qui donne 54 coups de piston par minute, la pression dans le

cylindre étant de 3 atmosphères 7, celle dans le condenseur 0 atm. 17, la longueur totale de la course du piston 0m, 94 et le diamètre du cylindre 0m,65 ?

II. — Quel est le diamètre du cylindre d'une machine à condensation sans détente, qui donne un travail de 2912 kilogrammètres par seconde, sachant qu'elle donne 43 coups de piston par minute, la tension dans le cylindre étant 3 atm, 5, celle dans le condenseur 0 atm. 19 et la longueur totale de la course du piston 0m,74 ?

III. — Le travail par seconde fourni par une machine à condensation sans détente étant de 3600 kilogrammètres, la longueur totale de la course du piston 1m,05, le diamètre du cylindre 0m,65 et la tension dans le condenseur 0 atm. 19, on demande quelle est la tension à laquelle agit la vapeur dans le cylindre.

156. 2° Machines sans détente et sans condensation. — Pour obtenir l'équation et la représentation graphique du travail dans cette classe de machines, il suffit de remplacer, dans la formule précédente (*a*) la valeur de la contre-pression *P'* par celle P_a de la pression atmosphérique ; car dès que la communication sera établie entre l'air libre et le cylindre, la vapeur ne conservera, à l'intérieur de celui-ci, qu'une tension égale à celle qui s'exerce à l'extérieur.

EXERCICES.

I. — Déterminer le travail par seconde d'une machine à vapeur sans détente ni condensation, qui donne 47 coups de piston par minute ; la tension de la vapeur dans le cylindre étant de 4 atm. 8, la longueur totale de la course du piston 0m,86 et le diamètre du cylindre 0m,68.

II. — Le travail par seconde fourni par une machine sans détente et sans condensation étant de 1770 kilogrammètres, la tension de la vapeur dans le cylindre 4 atm. 6, le diamètre du cylindre 0m,56 et le nombre de coups de piston par minute 54, on demande la longueur totale de la course du piston.

III. — Déterminer le diamètre du cylindre d'une machine à vapeur sans détente et sans condensation qui fournit un travail de 2017 kilogrammètres par seconde, la tension de la vapeur dans le cylindre est 4 atm. 5, la longueur totale de la course du piston 0m,62 et le nombre de coups de piston par minute 43.

157. 3° Machines à détente et à condensation. — Pour obtenir le travail dans les machines à détente et à condensation, nous supposerons que la pression de la vapeur, en se détendant, varie suivant la loi de Mariotte, c'est-à-dire que les volumes sont en raison inverse des pressions.

Le travail effectif de la machine se compose de 3 parties : 1° du travail développé pendant la période d'admission, c'est-à-dire pendant la marche à pleine pression ; 2° du travail de la détente ;

3° du travail négatif exercé par la contre-pression sur la face opposée du piston.

Soient H la course totale du piston, P la pression de la vapeur pendant la période d'admission qui a lieu pendant une fraction h de la course, P' celle résultant de la contre-pression et ω l'aire du piston.

1° Le travail développé pendant la marche à pleine pression est

$$T' = P\omega h.$$

2° Supposons que le piston, à partir du moment où la détente commence, parcourt des éléments très-petits $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$; si nous appelons $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ les pressions correspondantes, le travail sera exprimé par

$$T_d = P_1\omega e_1 + P_2\omega e_2 + P_3\omega e_3 + \ldots + P_n \omega e_n \quad (1).$$

Si $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ représentent les longueurs totales de courses respectivement parcourues, nous aurons, d'après la loi de Mariotte,

$$Ph = P_1 h_1 = P_2 h_2 = P_3 h_3 = \ldots = P_n H.$$

D'où l'on tire

$$P_1 = \frac{Ph}{h_1}, \quad P_2 = \frac{Ph}{h_2}. \quad P_3 = \frac{Ph}{h_3} \ldots \quad P_n = \frac{Ph}{H}$$

Et, en remplaçant ces valeurs dans l'équation (1), on a

$$T_d = P\omega h\left(\frac{e_1}{h_1} + \frac{e_2}{h_2} + \frac{e_3}{h_3} + \ldots \frac{e_n}{H}\right).$$

Or, la parenthèse est égale au logarithme hyperbolique de $\frac{H}{h}$ dont la base est 2,7182818...

Pour transformer ce logarithme en logarithme décimal ordinaire, on sait que le logarithme d'un nombre dans un système dont la base est quelconque, est égal au logarithme décimal de ce nombre, divisé par le logarithme décimal de la base de ce système. On a donc

$$\text{log. hyp} \frac{H}{h} = \frac{\log \frac{H}{h}}{\log 2{,}7182818} = \frac{\log \frac{H}{h}}{0{,}434294482} = 2{,}3026 \log \frac{H}{h}$$

Et l'on a enfin

$$T_d = P\omega h\left(2{,}3026 \log \frac{H}{h}\right).$$

3° Le travail négatif de la contre-pression développée en sens contraire du mouvement est

$$T'' = P'\omega H;$$

donc le travail effectif sera

$$T = P\omega h + P\omega h\left(2{,}3026 \log \frac{H}{h}\right) - P'\omega H.$$

Et en mettant Pωh en facteurs communs, il vient

$$T = P\omega h\left(1 + 2{,}3026 \log \frac{H}{h} - \frac{P'H}{Ph}\right).$$

Mais ωh représente le volume V' de vapeur introduite; on a donc en remplaçant

$$T = PV'\left(1 + 2{,}3026 \log \frac{H}{h} - \frac{P'H}{Ph}\right).$$

Si nous désignons par V le volume du cylindre, on aura avec V' le rapport suivant :

$$\frac{V}{V'} = \frac{H}{h}$$

d'où

$$V' = \frac{Vh}{H}$$

et par suite

$$T = \frac{PVh}{H}\left(1 + 2{,}3026 \log \frac{H}{h} - \frac{P'H}{Ph}\right).$$

Le rapport $\frac{H}{h}$ entre la course totale et celle parcourue à pleine pression est toujours connu ; nous pouvons donc le représenter par m, et en remplaçant, nous aurons

$$T = \frac{PV}{m}\left(1 + 2{,}3026 \log m - \frac{P'm}{P}\right).$$

Si n représente le nombre de coups de piston par minute, le travail par seconde aura pour expression

$$T_s = \frac{PV\,n}{60\,m}\left(1 + 2{,}3026 \log m \quad \frac{P'm}{P}\right),$$

et ce travail exprimé en chevaux-vapeur sera

$$N = \frac{PVn}{4500m}\left(1 + 2,3026 \log m - \frac{p'm}{P}\right).$$

158. Pour obtenir graphiquement l'expression de ce travail, portons sur l'axe des abscisses OX (*fig.* 57) une longueur OB égale ou proportionnelle à la portion *h* de la course pendant laquelle la

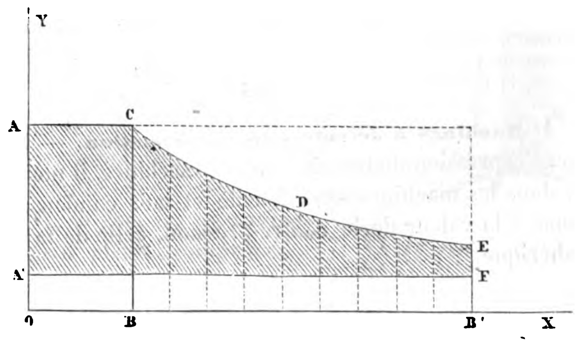


Fig. 57.

vapeur agit à pleine pression, et, sur l'axe OY des ordonnées, prenons à la même échelle, une longueur OA représentant l'effort $P\omega$. L'aire du rectangle AOBC exprimera le travail de la pleine pression. Pour trouver le travail de la détente, prenons sur OX une longueur OB' égale ou proportionnelle à la course totale du piston; divisons BB' en éléments très-petits, et sur l'ordonnée de chacun des points de division, portons des longueurs représentant les efforts correspondants. En unissant tous les points ainsi obtenus par un trait continu, on obtient une courbe qui diffère très-peu de l'hyperbole équilatère, et l'aire de la figure BCDEB' donne le travail cherché. Enfin, le travail négatif de la contre-pression sera représenté par l'aire du rectangle OA'FB' ayant H pour base et pour hauteur $P'\omega$.

Donc le travail effectif de la machine sera représenté par l'aire A'ACDEF, marquée par des hachures dans notre figure.

EXERCICES.

I. — Déterminer le travail par seconde d'une machine à vapeur à détente et à condensation qui fait 48 tours par minute, la tension de la vapeur dans le cylindre étant de 4 atm. 55, celle dans le condenseur 0 atm. 15, la longueur

totale de la course du piston $0^m,86$, le diamètre du cylindre $0^m,62$ et la détente commençant au 1/5 de la course.

II. — Le travail par seconde d'une machine à détente et à condensation étant de 2290 kilogrammètres, la tension dans le cylindre 5 atmosphères 2, celle dans le condenseur 0 atmosphère 16, le diamètre du cylindre $0^m,40$, la longueur totale de la course du piston $0^m,65$, et la détente commençant au 1/4 de la course, on demande quel est le nombre de tours par minute qu'effectue cette machine.

III. — Déterminer le diamètre du cylindre d'une machine à détente et à condensation qui fait 56 tours par minute ; la tension dans le cylindre est de 6 atmosphères 3, celle dans le condenseur 0 atmosphère 18, la longueur totale de la course du piston $0^m,85$, le travail de la machine par seconde 9249 kilogrammètres, et la détente commence au 1/3 de la course.

159. 4° Machines à détente sans condensation. — Pour déterminer l'expression du travail dans ces machines, il nous suffira, comme dans les machines sans détente et sans condensation, de substituer à la valeur de la contre-pression, celle de la pression atmosphérique.

EXERCICES.

I. — Quelle est la tension à laquelle agit la vapeur dans une machine à détente et sans condensation, qui fournit un travail de 6063 kilogrammètres par seconde, le diamètre du cylindre étant de $0^m,95$, la longueur totale de la course du piston $0^m,70$, le nombre de tours par minute 45, et la détente commençant au 1/5 de la course ?

II. — Le travail par seconde fourni par une machine à détente et sans condensation étant de 5945 kilogrammètres, la tension dans le cylindre 3 atmosphères 6, le diamètre du cylindre $0^m,85$, et le nombre de tours par minute 51 ; on demande quelle est la longueur totale de la course du piston.

160. Indicateur de Watt. — Cet appareil, imaginé par Watt, fait connaître la pression de la vapeur à l'intérieur du cylindre, constate sa variation pendant la période de détente, et sert à déterminer directement le travail pour une double course du piston.

L'indicateur se compose d'un tube creux en cuivre A (*fig.* 58), que l'on adapte, au moyen d'une partie filetée, sur le cylindre de la machine, et dans lequel se meut un petit piston dont la tige B, qu'on aperçoit par la fente longitudinale C, est entourée d'un ressort à boudin. Sur un support M, fixé au tube, est monté un tambour E mobile autour de son axe et qui est mis en mouvement au moyen d'une corde passant sur une poulie de renvoi O, et attachée à la tête de la tige du piston ; un ressort en spirale, fixé intérieurement, d'une part à un point fixe, et de l'autre à la paroi

du tambour, sert à ramener celui-ci à sa position primitive pendant la course rétrograde du piston de la machine. Un style D porte un crayon qui s'appuie constamment sur une feuille de papier entourant le tambour E.

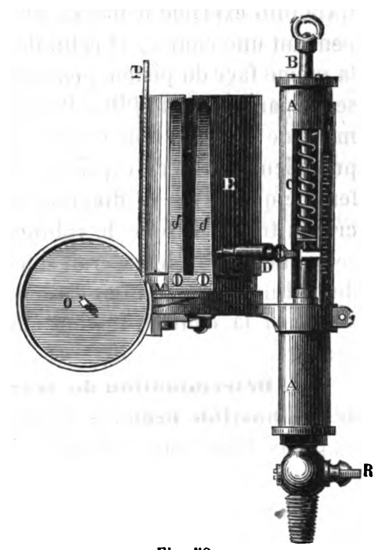


Fig. 58.

Cet appareil étant monté sur le cylindre de la machine et le robinet R qui introduit la vapeur étant fermé, le crayon trace sur le papier une ligne droite correspondant à une pression nulle. Si on ouvre le robinet R, la vapeur, agissant sur le petit piston, comprime le ressort à boudin, et le style marque la pression sur une échelle placée en regard, pendant que le crayon trace sur le papier une courbe dont les ordonnées sont proportionnelles aux pressions et les abscisses aux chemins parcourus.

161. Si, après l'expérience, on déroule la feuille de papier sur laquelle est tracé le diagramme (*fig.* 59), il est facile de se rendre compte des diverses phases de la marche. Ainsi, la portion AB correspond à la marche à pleine pression, c'est-à-dire pendant laquelle l'admission a lieu; de B en D, les ordonnées diminuent progressivement, et la portion BCD correspond à la période de détente; la partie DEF correspond a la période d'émission pendant laquelle la partie du cylindre à laquelle est adapté l'indicateur communique avec le condenseur; la pression est constante jusque vers la fin de la course où elle augmente à cause de la compression.

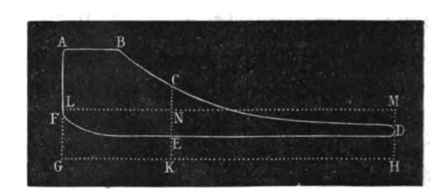


Fig. 59.

Si donc, une ordonnée quelconque KC représente la pression ou l'effort exercé, et l'abcisse GK le chemin parcouru, l'aire GABCDHG exprime le travail développé par la vapeur sur le piston pendant une course, et celui développé par la contre-pression sur la même face du piston, pendant la course rétrograde, sera représenté par l'aire GFEDHG. Par conséquent le travail effectif de la machine pour un tour sera la différence entre les deux travaux précédents, et sera exprimé par l'aire comprise dans la courbe fermée qui forme le diagramme. La droite LM est celle que le crayon trace, lorsque le robinet R est fermé, et la droite GH est celle que le crayon tracerait si le vide parfait existait dans la partie du cylindre qui est en communication avec l'indicateur, c'est-à-dire si la contre-pression était nulle pendant la course rétrograde.

162. Détermination du travail développé par kilogramme de combustible brûlé. — Le volume de vapeur dépensé étant égal au poids divisé par la densité, on a

$$V = \frac{P}{D}.$$

Or il résulte des expériences de M. Regnault, que, pour convertir 1 kilogramme d'eau à Δ degrés en vapeur à t degrés, le nombre de calories nécessaires est de

$$606,5 + 0,305\,t - \Delta;$$

donc, pour convertir un poids P d'eau en vapeur, le nombre de calories qu'il faut est de

$$P(606,5 + 0,305\,t - \Delta).$$

Si M représente le nombre de calories fournies par 1 kilogramme de combustible, le poids p de combustible nécessaire pour convertir en vapeur le poids P d'eau est

$$p = \frac{P(606,5 + 0,305\,t - \Delta)}{M};$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{pM}{606,5 + 0,305\,t - \Delta}.$$

163. Cherchons maintenant à déterminer D. D'après les lois sur

les mélanges des gaz et des vapeurs à diverses pressions et à diverses températures, on a

$$\frac{D}{D_a} = \frac{1 + kt_a}{1 + kt} \times \frac{P_0}{P_a}.$$

D_a étant le poids de l'unité de volume de vapeur à 100°, qui est de 0^k, 589 sous la pression atmosphérique P_a dont la valeur est de 10334 kilogrammes par mètre carré, D représentant le poids de l'unité de volume de vapeur à t degrés sous la pression P_0.

Le coefficient k de dilatation de la vapeur d'eau étant 0,00366, nous pouvons écrire

$$\frac{D}{0{,}589} = \frac{1 + 0{,}00366 \times 100}{1 + 0{,}00366 \times t} \times \frac{P_0}{10334};$$

d'où l'on tire la valeur de D

$$D = \frac{0{,}589 \times 1{,}366\, P_0}{(1 + 0{,}00366\, t)10334}.$$

Remplaçant P et D par leurs valeurs dans l'expression de V, on a

$$V = \frac{pM(1 + 0{,}00366\, t)10334}{(606{,}5 + 0{,}305\, t - \Delta)0{,}589 \times 1{,}366\, P_0}.$$

Effectuant le calcul des quantités constantes

$$V = 12844\, pM \frac{1 + 0{,}00366\, t}{(606{,}5 + 305\, t - \Delta)\, P}.$$

Introduisant cette valeur de V dans la formule du travail pour les machines sans détente, on a

$$T = 12844\, pM \frac{1 + 0{,}00366\, t}{(606{,}5 + 0{,}305\, t - \Delta) P_0} (P\text{-}P'); \qquad (1)$$

et pour les machines à détente ,

$$T = 12844\, pM \frac{1 + 0{,}00366\, t \times P}{(606{,}5 + 0{,}305\, t - \Delta) P_0} \left(1 + 2{,}3026 \log \frac{H}{h} - \frac{P'H}{Ph}\right). \quad (2)$$

En faisant dans les équations (1) et (2) $p = 1$, on aura le travail développé par kilogramme de combustible brûlé.

164. Les valeurs de M pour les combustibles les plus employés dans l'industrie sont données par le tableau suivant :

DÉSIGNATION DES COMBUSTIBLES.	M OU POUVOIR CALORIFIQUE.
Houille.	8000 calories.
Coke.	7000 id.
Tourbe.	5000 id.
Bois sec.	4000 id.
Bois à 20 p. 100 d'eau.	3000 id.

En pratique, on ne peut guère compter que sur la moitié de ces différentes valeurs.

EXERCICES.

I. — Quel est le travail développé par kilogramme de houille brûlée dans une machine sans détente à condensation, la tension P_0 de la vapeur dans la chaudière étant de 4 atmosphères 2, celle P' dans le condenseur 0 atmosphère 17, la température t de la vapeur dans la chaudière, 146°, et celle Δ de l'eau d'alimentation 38°; le rapport entre la pression initiale dans le cylindre et la pression dans la chaudière étant pris égal à 0,80?

Résoudre le même problème, la machine étant supposée sans condensation, la température de l'eau d'alimentation étant 18°.

II. — Quel est le travail développé par kilogramme de coke brûlé dans une machine à détente et à condensation, la tension P_0 de la vapeur dans la chaudière étant 5 atmosphères 815, celle P' dans le condenseur 0 atmosphère 15, la température t de la vapeur dans la chaudière 158°, celle Δ de l'eau d'alimentation 41°, la détente commençant au 1/6 de la course; le rapport entre la pression initiale dans le cylindre et la pression dans la chaudière étant pris égal à 0,80?

Résoudre le même problème, la machine étant supposée sans condensation, la température de l'eau d'alimentation étant de 15°.

165. Détermination du travail fourni par la vaporisation de 1 kilogramme d'eau. — Nous avons trouvé (**163**) que le poids de l'unité de volume de vapeur à t degrés est

$$D = \frac{0{,}589 \times 1{,}366\, P_0}{(1 + 0{,}00366\,t)10334}.$$

Le volume étant égal au poids divisé par la densité, nous aurons

$$V = \frac{P}{D}.$$

Mais P est dans ce cas égal à l'unité, donc

$$V = \frac{1}{D};$$

et, par suite, le volume occupé par 1 kilogramme de vapeur dans ces conditions est

$$V = \frac{(1 + 0{,}00366\,t)10334}{0{,}589 \times 1{,}366\,P_0}.$$

Effectuant le calcul des quantités constantes, il vient

$$V = \frac{12844(1 + 0{,}00366\,t)}{P_0}.$$

Et en introduisant cette valeur de V dans la formule du travail, on a :

1° Pour les machines sans détente,

$$T = \frac{12844(1 + 0{,}00366\,t)}{P_0}(P\text{-}P');$$

2° Pour les machines à détente,

$$T = \frac{12844(1 + 0{,}00366\,t)P}{P_0}\left(1 + 2{,}3026 \log \frac{H}{h} - \frac{P'H}{Ph}\right).$$

EXERCICES.

I. — Quel est le travail fourni par la vaporisation de 1 kilogramme d'eau dans une machine sans détente à condensation, la tension de la vapeur dans la chaudière étant de 7 atmosphères 8, qui correspond à une température de 170°, et la tension dans le condenseur 0 atmosphère 19; le rapport entre la pression initiale dans le cylindre et la tension dans la chaudière étant égal à 0,80?

Résoudre le même problème, la machine étant supposée sans condensation.

II. — Quel est le travail fourni par la vaporisation de 1 kilogramme d'eau dans une machine à détente et à condensation, la tension de la vapeur dans la chaudière étant 4 atmosphères 97, qui correspond à une température de 150°, la tension dans le condenseur 0 atmosphère 17, et la détente commençant au 1/4 de la course; le rapport entre la pression initiale dans le cylindre et la pression dans la chaudière étant égal à 0,80?

Résoudre le même problème, la machine étant supposée sans condensation.

166. Comparaison des différentes classes de machines entre elles. — Calculons la quantité de travail effectif fourni par 1 kilogramme de combustible dans chacune des quatre classes de machines, et pour différentes pressions, de 1 à 20 atmosphères par

exemple. Portons sur l'axe des abscisses OX, (*fig.* 60), des longueurs 01, 02, 03,... proportionnelles à ces pressions, et prenons sur les ordonnées de ces différents points et à la même échelle des hau-

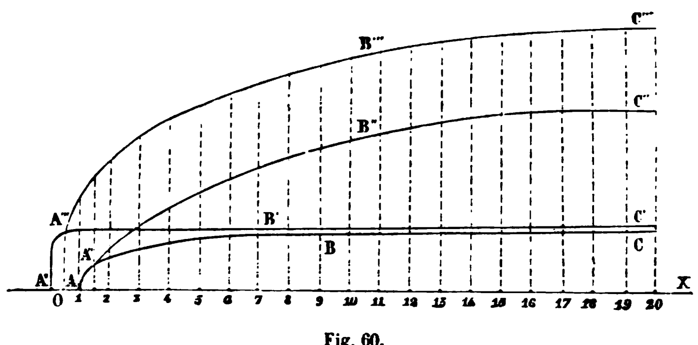


Fig. 60.

teurs représentant les travaux correspondants. On obtiendra ainsi les courbes :

ABC, pour les machines sans détente et sans condensation ;
A'B'C', pour les machines sans détente et à condensation ;
A"B"C", pour les machines à détente sans condensation ;
A'''B'''C''', pour les machines à détente et à condensation.

En examinant ces quatre courbes, on arrive aux conclusions suivantes :

1° Dans les machines à détente et à condensation, l'effet utile croît beaucoup moins rapidement que la pression, les ordonnées croissent d'une manière régulière, jusqu'à 8 atmosphères environ.

2° Dans les machines à détente sans condensation, l'effet utile croît plus régulièrement que dans le cas précédent, et à partir de 8 atmosphères, la courbe A"B"C" est à peu près parallèle à la première.

3° Dans les machines sans détente et à condensation, l'effet utile croît très-rapidement, jusqu'à 1 atmosphère 1/4 ou 1 atmosphère 1/2 ; mais au delà, cet effet utile reste stationnaire, bien que la pression augmente ; on voit par là qu'il convient, dans ce genre de machines, de ne pas employer des pressions supérieures à 1 atmosphère 1/2.

4° Enfin, dans les machines sans détente et sans condensation,

l'effet utile croît assez régulièrement, jusqu'à 8 ou 10 atmosphères, puis, comme dans le cas précédent, il reste stationnaire malgré l'augmentation de pression. Pour une même pression, cet effet utile est inférieur à celui fourni par les machines sans détente à condensation.

L'emploi des pressions élevées et des grandes détentes offre donc plus d'avantages théoriques; mais en pratique, les hautes pressions ne dépassent guère 7 à 8 atmosphères, à cause des dangers et des inconvénients qui peuvent en résulter.

167. Différentes causes de pertes de chaleur. — La tension de la vapeur dans le cylindre, surtout au moment de la mise en train, n'est pas la même que dans la chaudière, car, soit dans le parcours du générateur au récepteur, soit dans le cylindre lui-même, il se produit des pertes de chaleur, dont les principales causes sont : l'eau entraînée par la vapeur, le refroidissement dans les tuyaux de conduite et la condensation dans l'intérieur du cylindre.

168. Pour atténuer les effets de la première, on munit les chaudières d'un dôme, afin d'augmenter l'espace occupé par la vapeur, et c'est dans ce dôme qu'on fait toujours la prise de vapeur. Malgré cette précaution, l'eau entraînée représente, dans les bonnes chaudières, les 2 p. 100 du poids de la vapeur.

169. Pour diminuer la condensation dans les tuyaux de conduite, on rapproche le plus possible la chaudière de la machine, et on entoure les tuyaux de substances mauvaises conductrices de la chaleur, telles que des tresses en paille ou des bandes de feutre, préparées à cet usage. Quelquefois même, les tuyaux sont enterrés ; dans ce cas, on les entoure d'une couche d'escarbilles, et on les revêt avec autant de soin que s'ils étaient à l'air libre.

170. Quant à la condensation à l'intérieur du cylindre, on la diminue en recouvrant celui-ci de douves en bois, ordinairement en acajou, maintenues par des frêtes en fer ou en laiton ; entre les douves et les parois métalliques, on interpose des substances non conductrices, généralement du coton.

Très-souvent on emploie des cylindres dits *à enveloppe de vapeur,* dans lesquels on fait circuler, tout autour, la vapeur arrivant de la chaudière, avant d'agir sur le piston. Par ce moyen, on porte rapidement les parois du cylindre à la température de

la vapeur, et la condensation est presque complétement évitée.

171. Rendement d'une machine à vapeur. — Les différentes causes de pertes de chaleur que nous venons d'énumérer, et d'autres moins importantes, ainsi que le travail absorbé par les résistances passives, font que si l'on compare le travail transmis par la machine, obtenu à l'aide du frein de Prony (5) à celui que pourrait fournir la vapeur employée, on trouve que le rapport du second au premier varie de 0,50 à 0,80, suivant le genre de récepteur, les conditions dans lesquelles il fonctionne et son état d'entretien.

§ 3. — GÉNÉRATEURS A VAPEUR

172. Tout générateur se compose : 1° de l'appareil de chauffage ; 2° de la chaudière proprement dite, qui contient l'eau et la vapeur produite ; 3° de plusieurs appareils de sûreté exigés par la loi.

173. L'appareil de chauffage se compose du *foyer* où s'opère la combustion, de la *galerie* ou *carneau* servant à refroidir les produits de la combustion, et de la *cheminée d'appel*.

La figure 61 donne l'ensemble d'un appareil de chauffage ; F est le foyer, G la galerie et C la cheminée.

Le foyer est séparé de la galerie par une partie en maçonnerie

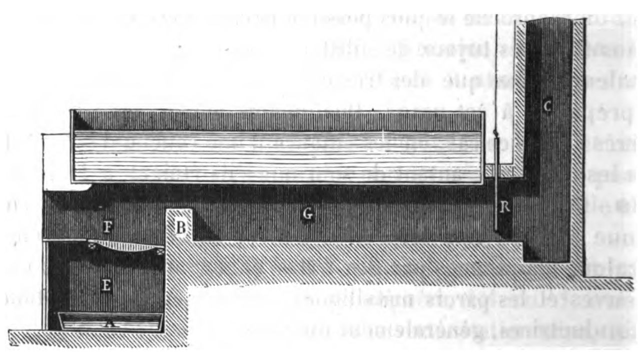


Fig. 61.

B, nommée *autel*, qui sert à faire circuler la flamme et les produits de la combustion le plus près possible de la chaudière.

Pour régler le tirage, on place entre la galerie et la cheminée une plaque métallique R, appelée *registre*, et qu'on peut abaisser plus ou moins, de manière à faire varier la section de la cheminée. Au-dessous de la grille se trouve un espace E, nommé *cendrier*, ouvert à sa partie antérieure, et c'est par là que l'air nécessaire à la combustion arrive sur la grille. Le cendrier doit être muni d'une porte fermant hermétiquement, de manière à ce que, le travail venant à cesser, en abaissant complétement le registre R et fermant cette porte, la chaleur du foyer ne se dissipe pas, et l'eau se conserve chaude jusqu'au moment où le travail recommence.

Quelquefois la prise d'air est extérieure à l'usine ; dans l'un ou dans l'autre cas, sa section doit être au moins égale à celle de la cheminée.

Ordinairement on place dans le cendrier une caisse A en tôle, contenant quelques centimètres d'eau. Par ce moyen, les petites parties de charbon qui tombent à travers la grille s'éteignent et peuvent être utilisées de nouveau. D'autre part, la vapeur d'eau qui se produit est décomposée par le charbon incandescent, donne plus de longueur à la flamme, et la maintient lorsque le charbon, réduit en coke, n'en donne plus. Un autre avantage, c'est que le chauffeur voit par réflexion ce qui se passe sous la grille.

174. Disposition des grilles. — La grille est composée de barreaux en fer, posés simplement sur des barres transversales scellées dans la maçonnerie. Pour éviter autant que possible la défor-

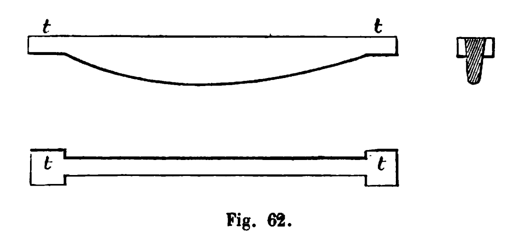


Fig. 62.

mation, on donne aux barreaux la forme d'égale résistance, représentée par la figure 62. Ils sont terminés à leurs extrémités par des talons *t* dont la saillie de chaque côté est égale à la moitié de la distance entre deux barreaux consécutifs, et ils sont plus

minces en bas qu'en haut, pour que les scories tombent facilement, et pour qu'on puisse ringarder en dessous. L'écartement entre deux barreaux varie, suivant les combustibles, entre $0^m,006$ et $0^m,02$: le rapport entre le vide et le plein varie entre 1/2 et 1/3.

175. Lorsque la grille a une grande longueur, on forge les barreaux par couples, comme on le voit sur la figure 63.

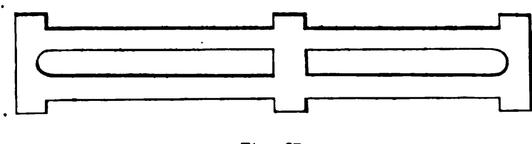


Fig. 63.

On incline ordinairement la grille de $\frac{1}{10}$ de sa longueur, afin de permettre au chauffeur de mieux voir et de mieux disposer la charge.

176. Surface à donner aux grilles pour brûler un poids connu de combustible. — La surface des grilles varie d'après la nature du combustible employé. Pour brûler 100 kilogrammes de houille grasse par heure, on donne à la grille $1^m,20$ à $1^m,30$; pour les houilles maigres, 1 mètre carré suffit. Pour le coke, on compte de $0^m,40$ à $0^m,50$ pour brûler 100 kilogrammes par heure, et pour les bois, tourbes et mottes, il faut de $0^m,30$ à $0^m,40$.

177. L'épaisseur de la couche de combustible à placer sur la grille varie aussi pour chacun d'eux. Cette épaisseur doit être d'environ :

$0^m,10$ à $0^m,15$ pour les houilles grasses ;
$0^m,12$ à $0^m,20$ pour les houilles sèches ;
$0^m,20$ à $0^m,25$ pour le coke ;
$0^m,30$ à $0^m,35$ pour bois et tourbes.

178. Porte des foyers. — La porte du foyer est ordinairement séparée de la grille par une plaque en fonte de $0^m,30$ à $0^m,40$ de largeur. Cette porte doit avoir les dimensions strictement nécessaires pour la charge du combustible, et on doit l'ouvrir le moins souvent possible, car à chaque fois il pénètre dans le foyer une grande quantité d'air froid, inutile à la combustion, et qui produit un refroidissement considérable. Une bonne précaution à prendre, c'est de fermer le registre de la cheminée au moment de la

charge de la grille, pour faire cesser le tirage pendant que la porte du foyer est ouverte. Généralement, on donne à celle-ci de 0m,25 à 0m,30 de hauteur ; la largeur dépend de la grille. Cette porte qui est toujours en fonte, bien ajustée, est protégée par une plaque en fer, placée à une distance d'environ 0m,03 à 0m,04 et qui reçoit directement l'action du feu.

179. Refroidissement des produits de la combustion. — Les gaz rayonnent très-peu. Il faut donc, pour utiliser toute la chaleur que les produits de la combustion sont susceptibles de céder, disposer la galerie et les carneaux de manière à ce que toutes les molécules de gaz viennent se mettre en contact immédiat avec le corps à échauffer. On y arrive au moyen des deux dispositions suivantes :

1° On donne à la galerie une très-petite section et on emploie un tirage très-actif, de façon à ce que les gaz aient une vitesse de 4 mètres au minimum.

2° On fait des galeries très-larges avec un assez faible tirage, pour que la vitesse des produits de la combustion ne soit pas supérieure à 1 mètre.

Pour mieux refroidir les produits de la combustion, on les fait circuler souvent par plusieurs conduits à la fois. Dans ce cas, il faut les diviser le plus possible, car si on ne les dirige qu'en deux ou trois conduits, il arrivera, si la fumée monte, qu'elle passera toujours par un seul tuyau. Cette disposition ne sera bonne que si l'on fait mouvoir la fumée de haut en bas ; alors la répartition se fera parfaitement et à coup sûr.

Si les gaz doivent se mouvoir horizontalement à travers les carneaux, il convient de multiplier le plus possible leur nombre en diminuant leur section. La répartition se fait alors également, car si un excès de vitesse tend à se produire dans l'un des tuyaux, le frottement augmente en raison directe du carré de cette vitesse et l'équilibre est bientôt rétabli.

La quantité de chaleur cédée étant proportionnelle à la différence de température, il convient de faire circuler le corps à échauffer en sens inverse des produits de la combustion. C'est ce qu'on appelle le *chauffage méthodique*, dont nous verrons les meilleures dispositions en étudiant les chaudières.

Enfin, il faut que les carneaux soient facilement visitables pour

enlever la suie qui se dépose sur la surface de chauffe et qui empêche la transmission de la chaleur.

180. Cheminées. — Malgré tout ce que nous venons de dire on ne peut, en pratique, refroidir les produits de la combustion au-dessous de 100° à 150° La quantité de chaleur qu'ils conservent à cette température, quoique ne servant pas à produire de la vapeur, n'est pas tout à fait perdue et voici à quoi on l'utilise. Les gaz chauds étant plus légers que l'air (car 1 mètre cube à la température de 100 degrés ne pèse que 980 grammes, tandis qu'un mètre cube d'air pèse environ de 1200 à 1250 grammes), ils tendent à s'élever par la cheminée qui communique par sa partie supérieure avec l'atmosphère et par sa partie inférieure avec la prise d'air, et par suite, avec l'atmosphère aussi. Mais en s'élevant, ils provoquent un appel d'air dans le foyer pour remplir le vide qui tend à se faire derrière eux : c'est cet appel d'air qu'on appelle le *tirage*. La chaleur conservée par les produits de la combustion, en s'échappant par la cheminée, sert donc à faire affluer l'air nécessaire à la combustion.

Le meilleur tirage est celui qui fait affluer sous la grille le minimum d'air pour que la combustion soit complète, sans production d'oxyde de carbone, et qui donne aux produits, s'échappant par la cheminée, une vitesse suffisante pour qu'ils ne soient pas influencés par les vents. Théoriquement, il faut 8 mètres cubes d'air pour la combustion complète de 1 kilogramme de charbon; mais en pratique, il faut compter sur 12 à 13 mètres cubes. Il faudra donc faire arriver dans le foyer de 12 à 13 mètres cubes d'air pour chaque kilogramme de combustible à brûler; or la quantité d'air qui traverse la grille, est proportionnelle à la vitesse que les gaz possèdent dans la cheminée et à la section de celle-ci. La vitesse dans la cheminée varie approximativement comme la racine carrée de sa hauteur; mais c'est plutôt par la section que par la hauteur qu'on cherche à obtenir le débit de la quantité d'air nécessaire : 10 à 15 mètres de hauteur suffisent à une cheminée pour le tirage, et si on leur donne des hauteurs de 25 à 30 mètres et quelquefois même davantage, c'est tout simplement pour faire évacuer les gaz afin de ne pas gêner le voisinage.

Dans la pratique, la section minimum de la cheminée doit être

d'un décimètre carré pour 4 à 5 kilogrammes de charbon à brûler par heure.

Les cheminées se font en briques ou en tôle. Les secondes s'emploient lorsqu'elles ne doivent pas durer très-longtemps, et surtout, à cause de leur légèreté, lorsque le sol est mauvais.

181. Anciennement, on faisait les cheminées en briques à section carrée; mais on a reconnu que pour les hautes cheminées, la forme conique à section circulaire (*fig.* 64) était préférable; elles résistent mieux à l'action du vent. L'inclinaison des cheminées en briques est de 25 à 30 millimètres par mètre. La partie conique C de la cheminée repose sur une espèce de piédestal A dont la section extérieure est presque toujours carrée. Le conduit intérieur B est d'un diamètre sensiblement uniforme sur toute la longueur, et on opère généralement le retrait des briques à l'intérieur. L'épaisseur de la cheminée à sa partie supérieure est ordinairement égale à la largeur d'une brique, c'est-à-dire 11 centimètre. D'après cela, voici comment on peut opérer pour trouver la section longitudinale de la cheminée et son diamètre extérieur à la partie inférieure. Ayant déterminé le diamètre d du conduit et la hauteur H du fût conique, on construit le rectangle abAB (*fig.* 65), ayant ces deux dimensions pour côtés; sur le même axe de ce rectangle, on construit le trapèze $a'b'$A'B' ayant pour petite base

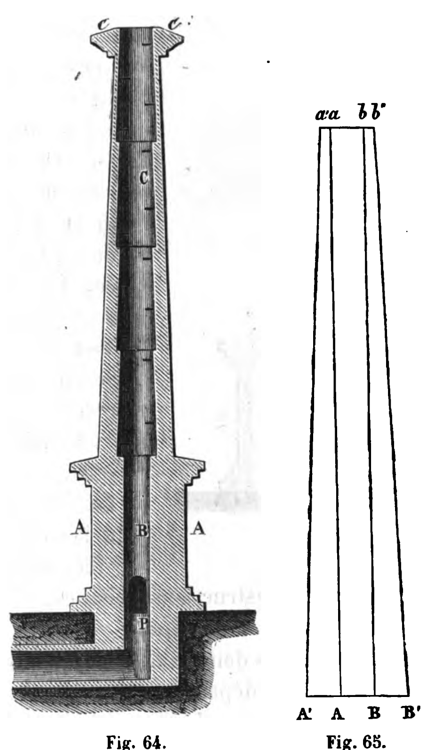


Fig. 64. Fig. 65.

$d + 0,22$ et pour grande base $d \times 2n\mathrm{H}$, n étant l'inclinaison par mètre.

Jusqu'à une hauteur de 2 à 3 mètres, l'intérieur de la cheminée doit être fait en briques réfractaires. A la partie inférieure se trouve une porte P, mûrée avec du mortier et des briques, qu'on démolit de temps à autre pour le nettoyage. Pour cette opération, des crampons en fer sont scellés de $0^m,50$ en $0^m,50$ à l'intérieur de la cheminée, et le ramoneur monte sur ces crampons comme sur une échelle.

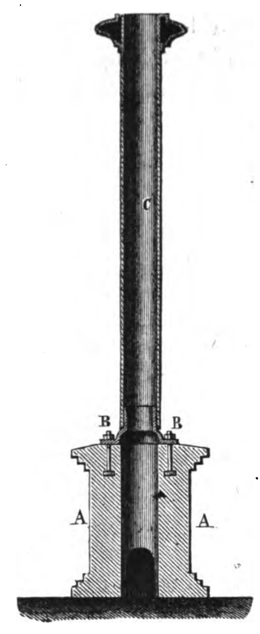


Fig. 66.

On termine les cheminées en briques par un chapiteau C qui sert de décoration et qui est recouvert par un chapeau en tôle ou en fonte mince. Cette précaution sert à empêcher que les eaux des pluies ne dégradent pas les joints.

181. Les cheminées en tôle (*fig.* 66) reposent sur un socle en maçonnerie A sur lequel est boulonné un chapeau en tôle BB, qui s'emmanche dans le tuyau C.

Lorsque la cheminée est isolée, il faut la soutenir par des haubans en fil de fer, solidement fixés dans le sol ou dans les constructions voisines.

182. Chaudières à vapeur. — Dans les premières machines à vapeur employés dans l'industrie, celles de Newcomen, la tension de la vapeur ne dépassait pas celle de l'atmosphère. Leur chaudière consistait simplement, comme on le voit dans la figure 55 (**140**), en un vase cylindrique terminé à la partie supérieure par une calotte sphérique. Ce vase était entouré par une maçonnerie de forme circulaire ou carrée, et on faisait le feu sur une grille placée directement au-dessous de la chaudière.

183. Chaudière de Watt. — Plus tard, connaissant déjà les conditions calorifiques de la chaleur, Watt construisit la chaudière dite en *tombeau* ou en *chariot*. Le corps de cette chaudière se

compose d'une caisse prismatique en tôle A, dont la section transversale (*fig*. 67) présente un fond et deux parois concaves. Cette caisse est engagée dans un fourneau en briques, à l'intérieur duquel elle repose par ses arêtes *a* et *a'*, et qui laisse tout autour de ses parois latérales un espace vide ou carneau C. Directement au-dessous de la chaudière se trouve la grille G, de manière que l'action du feu se produit par rayonnement sur la partie antérieure du fond, et les gaz chauds, après avoir parcouru toute la longueur de ce fond, se rendent dans le carneau qui fait tout le tour du générateur, échauffent les parois latérales en leur cédant la chaleur qu'ils possèdent et s'échappent dans la cheminée.

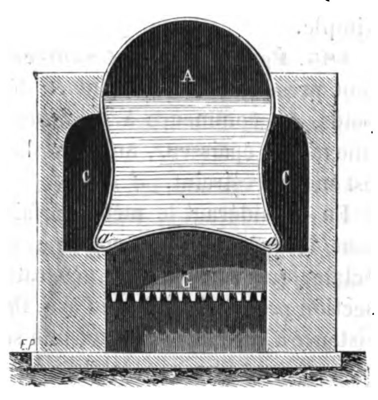


Fig. 67.

La surface de la chaudière qui est échauffée par le foyer et par les produits de la combustion est appelée *surface de chauffe;* elle est *directe*, lorsqu'elle est exposée directement au rayonnement du foyer, et elle est *indirecte*, lorsqu'elle n'est exposée qu'au simple passage des produits de la combustion.

Dans la plupart des chaudières, on obtient, pour chaque mètre carré de surface de chauffe, une vaporisation de 25 kilogrammes d'eau par heure.

La chaudière doit être remplie d'eau jusqu'aux points les plus élevés des carneaux pour utiliser toute la chaleur et pour éviter que le métal, n'étant pas mouillé par le liquide, ne soit porté à une température trop élevée qui pourrait diminuer sa force de résistance. La capacité non remplie par le liquide est destinée à contenir la vapeur produite et s'appelle, pour cette raison, *chambre de vapeur*.

184. La chaudière de Watt était d'une construction difficile et parfois la dilatation déchirait les angles; en outre, elles ne pourraient pas résister aux hautes pressions employées aujourd'hui sans

se déformer. Pour remédier aux inconvénients des chaudières en tombeau, Woolf leur donna la forme d'un cylindre à base circulaire, terminé par deux hémisphères que l'on a remplacés plus tard par deux calottes sphériques dont la construction est plus simple.

185. Épaisseur des chaudières. — Les chaudières à vapeur se font presque exclusivement en tôle de fer. Pour diminuer leur poids, on commence à employer les tôles d'acier qui sont, sous une même épaisseur, un tiers plus résistantes; mais leur emploi est encore restreint.

En considérant le métal parfaitement homogène et ayant partout la même épaisseur, une chaudière ne peut évidemment éclater que suivant deux génératrices opposées ou suivant une section perpendiculaire à l'axe. Or, le calcul démontre que la résistance à la rupture suivant une section transversale est double de celle suivant une génératrice; si donc nous donnons aux parois une épaisseur capable de résister à la tension qui s'exerce suivant deux génératrices opposées, nous serons sûrs que la chaudière résistera.

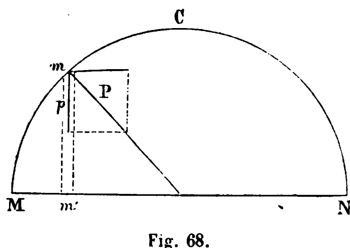


Fig. 68.

Cherchons d'abord quelle est la pression supportée par une chaudière et tendant à la faire éclater suivant un plan quelconque MN (*fig.* 68), passant par l'axe O; tout étant symétrique par rapport à ce plan, il suffit de considérer la partie supérieure MCN de la chaudière.

Prenons un élément superficiel *m*, la pression *P* qu'il supporte étant normale à sa surface, peut se décomposer en deux, dont la composante verticale *p* agira seule pour séparer les deux moitiés de la chaudière suivant le plan considéré. Or les triangles semblables donnent :

$$\frac{P}{p} = \frac{m}{m'}$$

m' étant la projection de l'élément *m* sur le plan MN. De cette égalité on tire :

$$Pm' = pm$$

Il en serait de même pour tout autre élément superficiel, et par suite la pression totale sera représentée par P, multiplié par la somme des projections de tous les éléments superficiels, c'est-à-dire par la surface de la section longitudinale de la chaudière. L'effort total pourra donc être exprimé par

$$Pdl$$

en désignant par d le diamètre de la chaudière et par l sa longueur.

Si n représente la pression intérieure en atmosphères, nous aurons $P = n - 1$, puisque la pression atmosphérique s'exerce à l'extérieur, et comme une atmosphère représente une pression équivalente à 10334 kilogrammes par mètre carré, nous aurons :

$$P = 10334(n-1).$$

D'un autre côté, e désignant l'épaisseur de la tôle, la surface totale des sections suivant deux génératrices opposées sera $2el$, et si K représente la pression en kilogrammes que l'on peut faire supporter sans danger au fer par mètre carré, nous aurons :

$$2elK = 10334(n-1)dl,$$

d'où l'on tire :

$$e = \frac{10334(n-1)d}{2K}.$$

Or, pour le fer, on admet K = 5500000 kilogrammes, et si on prend la moitié de ce nombre pour limite maximum des pressions à faire supporter à la tôle, on aura :

$$e = \frac{10334(n-1)d}{2 \times 2750000} = 0^{m},0018(n-1)d.$$

Et en exprimant e en millimètres :

$$e = 1,8(n-1)d.$$

186. A cause des chocs et de l'usure, on ajoute 3 millimètres à l'épaisseur fournie par la formule ci-dessus, et on a ainsi la formule exigée par la loi de 1828.

$$e = 1,8(n-1)d + 3.$$

EXERCICES.

I. — Quelle est l'épaisseur à donner aux plaques de tôle d'une chaudière à vapeur de $1^{m}.15$ de diamètre, devant fonctionner à une pression intérieure de 6 atmosphères 5.

II. — Quel est le diamètre d'une chaudière à vapeur, l'épaisseur de la tôle étant de $8^{mm}.67$, et la tension de la vapeur 5 atmosphères 2.

III. — L'épaisseur de la tôle d'une chaudière étant de $13^{mm},8$, le diamètre de cette chaudière $0^{m},93$, déterminer la tension de la vapeur qu'elle pourra supporter.

187. Chaudière à bouilleurs. — On appelle *bouilleurs* des cylindres en tôle, de $0^{m},40$ à $0^{m},45$ placés au-dessous d'une chaudière, et qui reçoivent le coup de feu du foyer. Ils sont reliés au corps principal de la chaudière, par des cylindres nommés *cuissards* ou *communications*. Les figures 69 et 70 représentent les coupes longi-

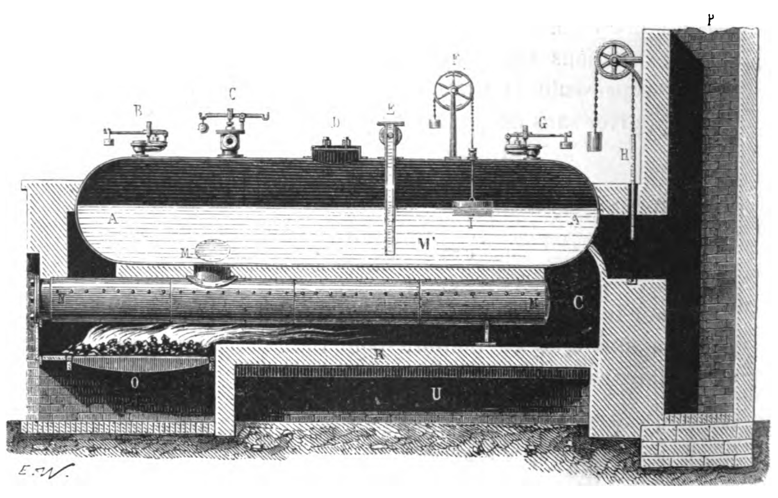


Fig. 69.

tudinale et transversale d'une chaudière à deux bouilleurs; AA' est la chaudière, NN' les bouilleurs, MM' les cuissards.

La flamme et les produits de la combustion ont trois circulations. Le fourneau est divisé dans sa hauteur, en deux parties par une cloison horizontale située un peu au-dessus de l'axe des bouilleurs, et la partie supérieure est elle-même divisée en deux

carneaux par un petit mur vertical placé entre les deux bouilleurs. Ces deux carneaux communiquent entre eux à la partie antérieure du fourneau, tandis qu'à la partie postérieure, l'un d'eux communique avec la galerie inférieure et l'autre avec la cheminée, de sorte que les trois compartiments forment un conduit continu qui amène les gaz du foyer à la cheminée. Les produits de la combustion passent par-dessous le corps des bouilleurs, reviennent en avant par C, retournent en arrière par D et s'échappent dans la cheminée.

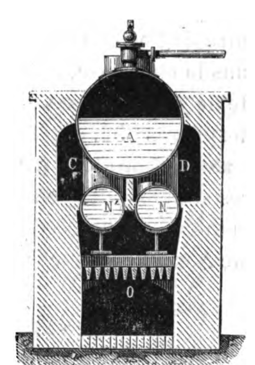


Fig. 70.

Les carneaux C et D s'élèvent jusqu'à la hauteur de l'axe de la chaudière, de manière que l'action directe des produits de la combustion s'exerce sur la moitié de sa circonférence, et sur plus des 3/4 de la surface extérieure des bouilleurs. On voit donc le grand avantage des générateurs à bouilleurs, qui ont la propriété de présenter le plus de surface possible à l'action directe des gaz chauds pour un volume donné de l'appareil, et d'offrir à ces gaz un parcours assez grand pour les refroidir suffisamment et utiliser la plus grande partie du calorique qu'ils possèdent. Un autre avantage de ces générateurs, c'est que la chaudière n'étant pas exposée aux coups de feu, s'use bien moins et peut faire un plus long service. Il est vrai qu'il faudra renouveler les bouilleurs, mais ceux-ci coûtent moins cher que la chaudière.

188. Chauffage méthodique. — Malgré la triple circulation, les produits de la combustion se rendent à la cheminée en emportant avec eux une grande quantité de chaleur, qu'on utiliserait au profit du générateur si on pouvait les refroidir davantage. On y parvient comme nous l'avons dit (**179**), en faisant circuler le liquide à échauffer en sens inverse des produits de la combustion. Un exemple fera mieux comprendre l'avantage de cette disposition.

Supposons, ce qui est irréalisable en pratique, que les gaz se refroidissent jusqu'à ne conserver, en s'échappant, qu'une température égale à celle du corps qu'ils échauffent, et considérons une chaudière à 7 atmosphères, dont la température correspondante

est de 166°. Si les gaz se rendent dans la cheminée après avoir circulé autour de la chaudière, ils s'échapperont à 166°, tandis que, si par une disposition quelconque, ils rencontrent sur leur passage l'eau d'alimentation à 35°, qui est la température ordinaire de l'eau de condensation, ils ne conserveront, à leur entrée dans la cheminée, que cette dernière température, et on aura profité de la différence, c'est-à-dire de 131°, qui correspond à 2 atmosphères 752.

189. Chaudière à bouilleur réchauffeur. — Une disposition très-simple et très-employée en Belgique, pour le chauffage méthodique, est représentée par la figure 71. Une chaudière cylindrique A est directement exposée à l'action du feu, et les gaz, après

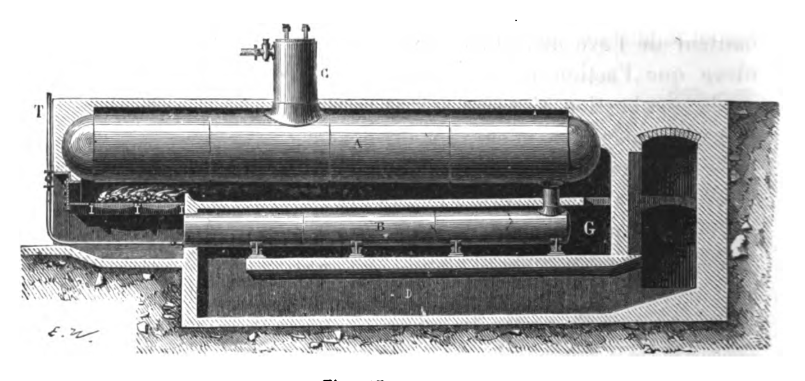


Fig. 17.

avoir circulé tout le long de cette chaudière, se rendent par l'arrière dans une galerie G où se trouve un bouilleur B qu'ils échauffent, et de là à la cheminée par une galerie souterraine D. L'eau d'alimentation arrive par le tube T dans le bouilleur par son extrémité antérieure, et communique avec la chaudière par son autre extrémité, au moyen d'un cuissard. On arrive, avec ces générateurs, à vaporiser 8 kilogrammes d'eau par kilogramme de combustible, et de plus, au moment où l'eau commence à s'échauffer, elle se débarrasse de l'acide carbonique qui tient en dissolution les sels calcaires; ceux-ci se déposent dans le bouilleur qui ne peut pas brûler, et la chaudière, restant toujours propre, est moins exposée aux coups de feu, et par suite aux explosions.

190. Une autre disposition est celle de la chaudière Farcot dont la figure 72 représente une coupe transversale.

Cette chaudière se compose d'un corps cylindrique A placé directement sur le foyer, et de 3 ou 4 bouilleurs B, B′, B″ communiquant entre eux à la manière d'un serpentin à l'aide de cuissards, et disposés les uns au-dessus des autres dans des carneaux C construits à côté de la chaudière. Le bouilleur supérieur communique avec le générateur, et le carneau inférieur avec la cheminée.

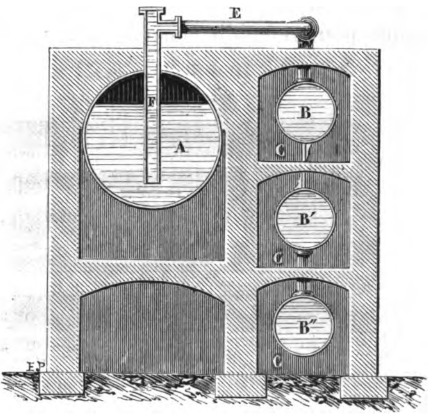


Fig. 72.

Les produits de la combustion, après avoir circulé au-dessous de la chaudière, viennent passer successivement dans les carneaux où sont les bouilleurs, et s'échappent par le plus bas de ceux-ci. L'eau circule en sens inverse; amenée dans le bouilleur inférieur B″, elle s'élève peu à peu jusqu'au bouilleur supérieur par la pression qu'elle éprouve de la part de la pompe d'alimentation, qui enfin la force à traverser le siphon EF qui plonge dans la chaudière, au-dessous de la surface du liquide.

191. Le corps cylindrique A n'est pas, comme dans les générateurs ordinaires, terminé par deux calottes sphériques. L'extrémité du côté du foyer traverse la maçonnerie et est fermée par un bouchon en fonte. A son autre extrémité, elle est soutenue par des oreilles scellées dans la maçonnerie du foyer.

192. Chaudières à foyer intérieur.— Si on place le foyer à l'intérieur même d'une chaudière à vapeur, on utilisera la quantité de chaleur dépensée inutilement dans les générateurs à foyer extérieur pour échauffer la maçonnerie qui entoure le foyer. De plus, les parois étant toutes métalliques, il suffit d'entourer le foyer d'eau de toutes parts pour remplacer la surface absorbante des briques par une surface de chauffe vraiment utile.

193. Depuis longtemps, on a imaginé des chaudières cylindriques à fonds plats, dans lesquelles le foyer est formé par un tube intérieur portant la grille à sa partie antérieure, et relié solidement aux fonds plats de la chaudière qu'il consolide ainsi. Ce même tuyau forme toute la surface de chauffe, et elle est insuffisante pour refroidir convenablement les produits de la combustion.

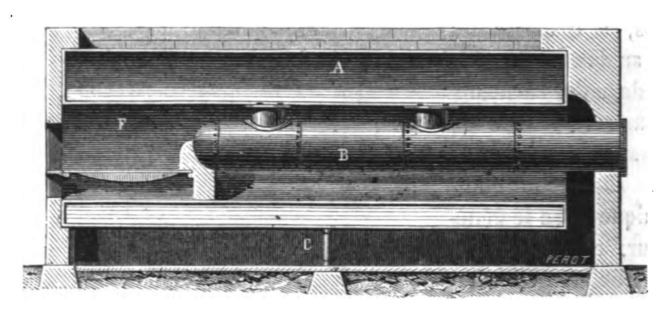


Fig. 73.

En Angleterre, on l'a augmentée dans les chaudières dites de Cornouailles (*fig.* 73), en plaçant dans l'intérieur du tube F, à la suite de la grille, un bouilleur B s'appuyant sur l'autel et encastré par l'autre extrémité dans la maçonnerie du fourneau. La fumée, après avoir traversé le tube en entourant le bouilleur, revient par un carneau C ménagé sous la chaudière et se rend dans la cheminée.

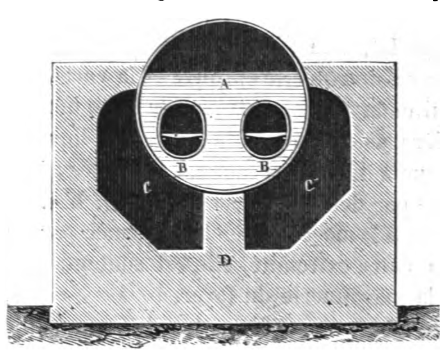


Fig. 74.

194. La figure 74 représente la coupe transversale du générateur de M. Fairbain, très-employé en Angleterre, et dont la disposition est plus avantageuse que la précédente.

Le corps principal A de la chaudière a 2 mètres de diamètre, et il est traversé par deux tubes-foyers BB, de 0^{m},25 de diamètre. Cette

chaudière est placée dans un fourneau D en maçonnerie portant deux carneaux CC′ pour profiter de la surface extérieure du générateur comme surface de chauffe. La fumée a trois circulations : elle va d'avant en arrière par les deux foyers, revient en avant par C et se rend à la cheminée par C′. Les deux tubes-foyers étant rivés aux fonds plats de la chaudière, augmentent considérablement la résistance de ces faces et donnent une parfaite sécurité.

195. Ce système de générateur est peu employé en France ; on préfère les anciennes chaudières à bouilleurs. Leur inconvénient est que la chambre de combustion et les cendriers n'ont généralement pas des dimensions suffisantes pour la libre circulation de l'air et la combustion s'y fait mal. On leur reproche plus de chances d'explosion qu'aux générateurs à foyer extérieur. Une des principale causes d'accident, c'est que les côtés du foyer peuvent s'user très-rapidement si une accumulation de cendres, à l'extérieur, empêche l'accès de l'air en ces points du foyer, et si des incrustations au dedans s'opposent à la transmission de la chaleur à travers les dépôts formés.

196. Chaudières tubulaires. — On appelle *chaudières tubulaires* celles dans lesquelles les produits de la combustion sont obligés de passer par une multitude de petits tubes entourés de l'eau à vaporiser pour se rendre à la cheminée. Ces chaudières présentent une grande surface de chauffe qui permet de réduire considérablement le volume des appareils de vaporisation.

Les tubes conducteurs de la fumée se font en cuivre rouge, en laiton ou en fer. Les premiers sont de beaucoup préférables, mais leur prix est plus élevé.

197. La première idée des chaudières tubulaires est due à Joël Barlow ; mais elle resta sans application jusqu'au moment où Séguin en France, et Stephenson en Angleterre, l'appliquèrent aux locomotives. C'est pour cette raison qu'ils sont considérés comme les inventeurs de ces générateurs.

198. On a cherché à utiliser ces chaudières comme générateurs fixes et leur emploi augmente de plus en plus ; l'expérience a du reste justifié la faveur qu'on leur accorde par le bon rendement qu'elles fournissent. Différentes formes ont été données à ces générateurs ; mais les meilleures sont celles qui approchent le plus

de la forme généralement adoptée pour les chaudières des machines locomotives et locomobiles.

199. Chaudière de locomotive. — Une chaudière de locomotive peut être considérée comme formée de trois parties : 1° une partie rectangulaire F (*fig.* 75) surmontée d'un dôme D de vapeur; 2° du corps cylindrique C de la chaudière où se trouvent les tubes; 3° du compartiment H formant le bas de la cheminée.

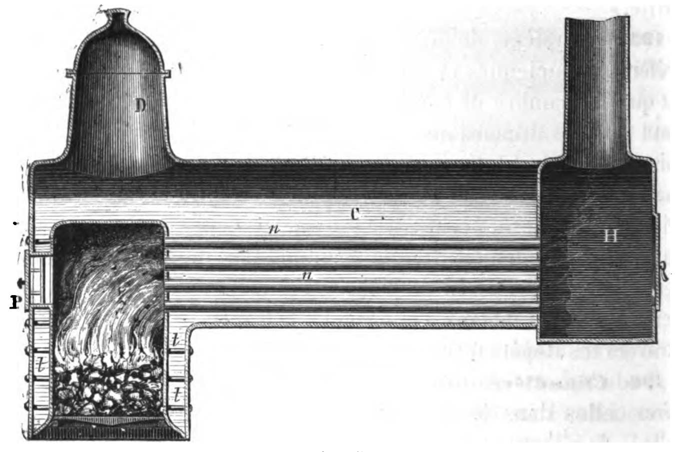


Fig. 75.

Le foyer est situé à l'intérieur de la partie rectangulaire dont nous venons de parler et est entouré d'eau; c'est donc un foyer intérieur; il ne présente d'autre ouverture extérieure qu'une porte P pour l'introduction du combustible.

Les produits de la combustion, au sortir du foyer, traversent le corps de la chaudière par 120 à 150 tubes, de $0^m,04$ à $0^m,05$ de diamètre, disposés horizontalement dans toute la longueur de la chaudière et ajustés à leurs extrémités sur deux fortes plaques percées de trous, appelées *plaques tubulaires*, qui forment les fonds de la partie cylindrique. Dans le compartiment H, appelé *boîte à fumée*, les gaz se réunissent et s'échappent par la cheminée. Dans les locomotives, cette cheminée serait insuffisante pour produire l'énorme tirage dont on a besoin, si on ne l'activait pas en lançant dans la cheminée la vapeur après qu'elle a agi sur le piston. Cette vapeur, animée d'une grande vitesse, entraîne avec

elle les gaz chauds et détermine un appel considérable qui fournit au foyer la quantité d'air nécessaire à la combustion de 450 à 500 kilogrammes de combustible par heure.

Pour donner de la résistance aux parois planes de la partie rectangulaire contenant le foyer, on les consolide à l'aide de puissantes armatures en fer et on les réunit en outre par de nombreuses traverses *t* appelées *entretoises*.

200. Ces générateurs, fonctionnant dans de bonnes conditions, offrent de grands avantages ; mais ils ne sont pas exempts d'inconvénients. Le foyer étant disposé pour recevoir une couche très-épaisse de combustible, la porte P est très-élevée, ce qui rend le nettoyage de la grille presque impossible sans retirer les barreaux. Ces chaudières sont coûteuses et exigent un entretien et des soins minutieux sans lesquels elles s'usent vite, et les réparations sont difficiles à faire. Les tubes, étant entourés d'eau de tous côtés, rendent les incrustations fort à craindre autour de leur surface extérieure, et la grande difficulté d'enlever ces dépôts font rejeter l'emploi des chaudières tubulaires partout où les eaux donnent des dépôts abondants, à moins d'épurer préalablement le liquide.

201. Chaudières marines. — L'emploi des chaudières tubulaires a seul permis la construction des locomotives, ainsi que celle de ces puissantes machines dont on voit chaque jour accroître la force, tout en conservant des dimensions relativement restreintes.

Dans les navires, une des conditions essentielles d'un bon générateur est d'occuper le moins de place possible. Aussi les chaudières dites *à retour de flamme* sont les plus généralement employées dans la marine.

202. Chaudière à retour de flamme. — Chaque chaudière A (*fig.* 76) porte 4 ou 5 foyers F qui se prolongent au delà de l'autel jusqu'à une chambre C, appelée *boîte à combustion*, où la combustion s'achève. De là, les gaz reviennent en avant par une multitude de tubes *n* et se réunissent dans la boîte à fumée D pour se rendre à la cheminée. Le corps A de la chaudière a la forme d'un parallélipipède rectangle dont les arêtes et les angles ont été arrondis en tous sens. La boîte à combustion C et la boîte à fumée D sont, en quelque sorte, des appendices accolés au corps principal de la chaudière. La face antérieure de celle-ci se trouve percée

d'un certain nombre de trous fermés par des portes correspondant aux foyers. Des tirants T et des entretoises *e* donnent à la chaudière la sécurité désirable pour résister aux pressions. Le

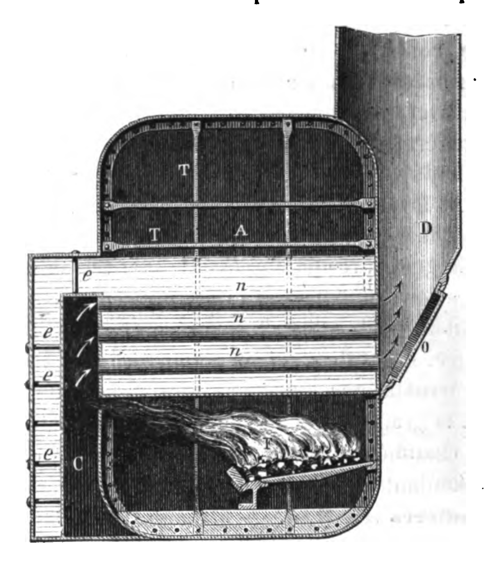


Fig. 76.

grand volume de ces chaudières permet de pratiquer, dans la boîte à fumée, de nombreuses ouvertures *o* pour le nettoyage des tubes.

203. Des navires ont jusqu'à 8 chaudières comprenant chacune 5 foyers, et la plupart du temps, une seule cheminée est commune à tous les générateurs; ses dimensions sont alors calculées d'après le volume total des gaz qui doivent la traverser.

204. Incrustation des chaudières.—Les dépôts qui se forment dans les générateurs proviennent des matières étrangères que l'eau contient toujours en dissolution et qui ne s'évaporent pas avec elle; ils constituent une croûte solide adhérente aux parois, et qui acquiert parfois une telle consistance, qu'on ne peut l'enlever qu'à l'aide du burin. La présence de ces corps mauvais conducteurs, modifie d'une manière sensible la transmission de la chaleur; la vaporisation devient difficile par la diminution de conductibilité des parois. Il résulte des expériences de M. Graham

que la perte provenant des dépôts calcaires, sur les parois intérieures d'un générateur, sous une épaisseur qui n'excède pas 1 millimètre et demi, s'élève à 14,7 p. 100. Il est donc de la plus haute importance d'empêcher la solidification de ces dépôts si cela est possible, ou du moins d'éviter qu'ils n'atteignent une trop grande épaisseur. En outre, si quelque fissure vient à se produire dans la croûte calcinée, l'eau pénètre dans cette cavité, et au contact des parois presque rouges, elle se vaporise instantanément. Cette production subite de vapeur détache la croûte solide sur une assez grande étendue, et le liquide, venant au contact de la surface ainsi découverte, il se forme une énorme quantité de vapeur et il peut y avoir explosion.

205. Pour éviter d'aussi graves inconvénients, il faut nettoyer le générateur à des intervalles de temps nécessités par la formation plus ou moins rapide des dépôts, tous les huit ou quinze jours par exemple. A la fabrique de céruse de Clichy, après 3 semaines de travail à 10 heures par jour, les dépôts formés atteignaient jusqu'à 5 centimètres d'épaisseur. Dans les chaudières tubulaires, comme celles des locomotives, où les dépôts, en se formant sur la surface extérieure des tubes, deviendraient très-difficiles à enlever, le chauffeur doit, à chaque retour de la machine, nettoyer l'intérieur.

206. On empêche la production de cette croûte solide par un moyen que le hasard fit découvrir ; des ouvriers ayant placé dans une chaudière que l'on venait de vider des pommes de terre afin de les faire cuire, ils les oublièrent, et, lorsqu'après un certain temps, on voulut opérer le nettoyage du générateur, on reconnut avec étonnement qu'il ne s'était formé aucun dépôt adhérent aux parois, et que le dépôt était simplement pulvérulent. La fécule des pommes de terre s'étant mélangée aux produits calcaires, les avait empêchés de former une croûte solide et résistante sur les parois; 10 litres environ de ces tubercules suffisent pour une machine de la force de 15 chevaux, nettoyée une fois par mois.

207. On emploie aussi, à cet effet, l'argile ou des bois de teinture, en fragments ou en copeaux. Quelquefois, on introduit dans le générateur, des matières telles que le carbonate de soude, l'acide chlorhydrique, le protochlorure d'étain, ayant pour but de transformer les sels calcaires en d'autres sels dont la fixité est

moins grande. Les résultats auxquels on est arrivé dépendent de la nature des eaux. Le meilleur procédé et le plus simple, est encore d'opérer très-souvent le nettoyage de la chaudière, et surtout avec le soin de ne la vider que lorsque l'eau est à une basse température.

208. Explosion des chaudières. — Les explosions des générateurs, dont nous avons malheureusement trop d'exemples si terribles, proviennent le plus ordinairement du défaut de surveillance. Le manque d'eau ou le défaut d'alimentation est un des cas les plus fréquents, malgré les appareils si simples et en même temps si ingénieux que nous allons étudier, et qui sont placés à la portée du chauffeur, qui, d'un simple coup d'œil, peut se rendre un compte exact de tout ce qui le concerne, mettre à couvert sa responsabilité, et sauvegarder sa vie et celle de ses semblables.

209. Le niveau de l'eau venant à s'abaisser, les parois non mouillées de la chaudière étant toujours soumises à l'action des gaz chauds, se trouvent portées à une température très-élevée, ce qui diminue énormément la force de résistance du fer; alors, suivant les génératrices de niveau, l'état moléculaire change brusquement des parois mouillées à celles non mouillées, et facilite leur déchirure sous l'action de la pression intérieure. Si l'on vient alors à alimenter, il se produit instantanément une énorme quantité de vapeur qui, par sa tension, déchire la chaudière et en projette les débris à des distances considérables.

210. Il se produit aussi des explosions d'une violence extrême au moment même de la mise en train de la machine; si l'on ouvre brusquement le robinet de prise de vapeur, la tension diminuant subitement dans le générateur, il se produit une ébullition tumultueuse; l'eau se trouve projetée avec force contre les parois et peut faire éclater la chaudière.

211. Nous ne parlerons pas des accidents qui peuvent provenir du défaut de solidité des parois, car à moins de dépasser la tension extrême marquée par le timbre apposé par le garde-mines sur la chaudière, après un essai qui consiste à lui faire supporter une pression double, il est très-rare, si le générateur est dans un bon état d'entretien, d'enregistrer des explosions causées par le manque de résistance de la tôle.

212. Les incrustations des chaudières sont une des causes fréquentes d'accidents; mais nous avons fait connaître (**206**) les moyens de les éviter.

213. Quelquefois le chauffeur imprudent, pour accélérer la marche, surcharge les soupapes de sûreté d'un poids additionnel, de façon à obtenir par là une plus grande pression; il peut ainsi dépasser la tension qu'on peut faire supporter sans danger à la chaudière, et une explosion peut en résulter.

214. Appareils de sûreté. — D'après une ordonnance de police, afin d'éviter les dangers d'explosion, toute chaudière doit être munie des appareils suivants: un manomètre, deux indicateurs de niveau, dont un à flotteur, et deux soupapes de sûreté. En outre, elles doivent avoir un ou deux trous d'homme pour le nettoyage intérieur.

215. Manomètres. Les *manomètres* sont des appareils destinés à mesurer la force élastique des gaz, et principalement celle de la vapeur dans les chaudières. Les manomètres les plus employés et les meilleurs sont : les manomètres métalliques de Bourdon et de Ducomet.

216. Manomètre de Bourdon. Le manomètre de Bourdon se compose d'un tube métallique B, contourné en spirale (*fig.* 77), dont la section est une ellipse très-aplatie. Son extrémité inférieure est fixée au point où aboutit le tuyau A qui communique avec l'intérieur de la chaudière; l'autre extrémité, qui est libre et fermée, porte une tige CD articulée au talon d'une aiguille mobile autour du point E, et dont la pointe parcourt les divisions d'un cadran F qui indique la pression en atmosphères. L'appareil est enfermé dans une boîte ronde portant une glace pour laisser apercevoir les mouvements de l'aiguille, de sorte que d'un seul coup d'œil, le chauffeur peut voir la pression et modérer ou accélérer le feu suivant les besoins.



Fig. 77.

Le robinet R, qui établit la communication entre le générateur et le manomètre, étant ouvert, la vapeur agit à l'intérieur du tube A, et par sa pression, tend à rendre sa section circulaire, et par suite, force le tube à se développer suivant une circonférence d'un plus grand rayon. Il résulte de là que la tige CD, portée par l'extrémité libre du tube, tire l'aiguille qui se déplace sur le cadran, et indique, par sa position, la tension dans le générateur. Si l'on ferme le robinet, le tube revient à sa forme primitive, et l'aiguille à sa position initiale correspondant à la division marquée 1.

On a reproché aux manomètres Bourdon de manquer de précision après un certain temps de service; mais il n'en est rien, et s'ils sont construits dans des proportions convenables, ils gardent parfaitement leur élasticité, malgré un travail constant et prolongé.

217. Manomètre de Ducomet. — Ce manomètre, d'une invention récente et très-répandu déjà, se compose d'une capsule creuse

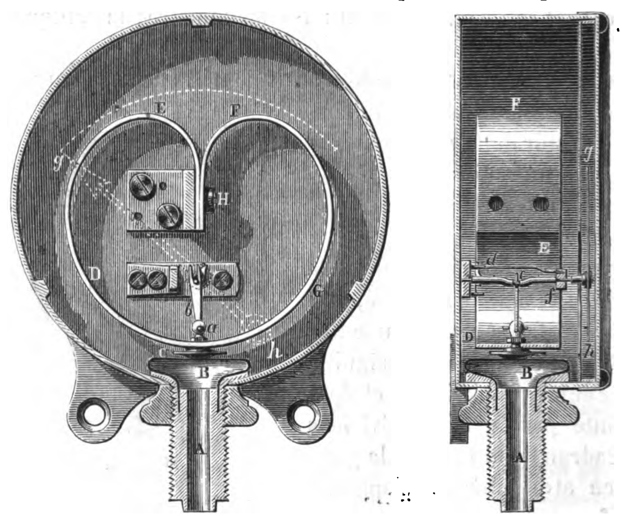


Fig. 78.

B (*fig.* 78), formée d'une feuille mince de cuivre pur, entourée de chaque côté d'une feuille d'argent vierge. L'argent a pour but d'éviter toute altération possible de la capsule. Ces trois feuilles

sont unies à chaud et laminées plusieurs fois de manière à ne former qu'une seule et unique lame très-élastique. Sur cette capsule repose un bouton C soudé à un ressort en acier DEFG n'ayant qu'un point fixe H, ce qui lui permet de se mouvoir sans frottement. Le bouton C porte une petite sphère *a*, à laquelle vient s'articuler une bielle à fourche *bc*. Cette bielle s'engage dans la gorge d'un vilebrequin *def* qui porte l'aiguille indicatrice *gh*. Tout le mécanisme est enfermé dans un boîtier circulaire en fonte vernie ou en cuivre poli.

La vapeur arrive par A, et exerce sa pression à l'intérieur de la capsule B : celle-ci se gonfle, soulève le bouton C qui s'appuie sur elle, et le ressort DEFG fléchit. Alors, la bielle *bc* fait fonctionner le vilebrequin *def*, et l'aiguille *gh* se déplace d'une quantité proportionnelle à la pression. Lorsque cette pression diminue, le ressort se détend vers le bas en refoulant la capsule, et l'aiguille suit d'elle-même cette variation ; sa pointe parcourt les divisions d'un cadran porté par la face antérieure de la boîte.

218. Indicateurs de niveau.— Le manque d'eau dans la chaudière étant, comme nous l'avons vu (**208**), une des principales causes d'explosion, il est de première nécessité de disposer, sur le générateur, des appareils qui permettent de reconnaître le niveau du liquide à l'intérieur.

219. Primitivement, on employait un flotteur fixé à une tige déliée qui sortait de la chaudière, et à l'extrémité de laquelle était fixée une corde qui passait sur une poulie et supportait un contre-poids. Les indications du niveau étaient fournies soit par la position du contre-poids, soit par une aiguille montée sur l'axe de la poulie. Mais l'impossibilité d'éviter les fuites par la garniture du presse-étoupes qui entourait la tige, à moins d'altérer la sensibilité de l'appareil, fait qu'on l'emploie très-rarement.

220. Tube indicateur de niveau. — Le plus simple des indicateurs se compose d'un tube en cristal T (*fig.* 79), retenu solidement entre deux tubulures *a* et *a'* qui communiquent avec le générateur, au-dessus et au-dessous du niveau d'eau normal, par deux conduits latéraux *t*, *t'*, munis chacun d'un robinet *r* et *r'*. Deux bouchons à vis *v* et *v'* permettent, en les retirant, de déboucher les conduits *t* et *t'*, si par une cause quelconque des dépôts s'y étaient formés. Le raccordement du tube avec les pièces *a* et *a'*

est obtenu au moyen d'une garniture d'étoupes, maintenue en place par des écrous *e*, *e'* vissés sur les parties intérieures des tubulures. La pièce *a'* porte, en outre, un autre robinet R, destiné à reconnaître si l'indicateur fonctionne. Les robinets *r* et *r'* étant ouverts, la communication a lieu avec le générateur, et le niveau de l'eau dans le tube doit correspondre à la hauteur de la surface de l'eau dans l'intérieur, puisque la pression est la même. On s'arrange de manière que le niveau normal corresponde au milieu du tube.

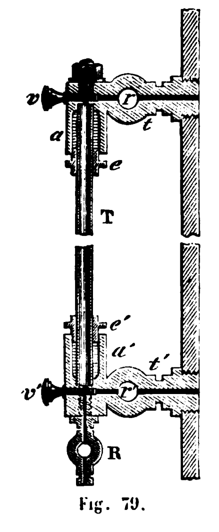


Fig. 79.

221. L'inconvénient de ce système est la rupture du tube de cristal, qui se produit quelquefois, et qui peut amener des accidents graves, par suite de l'eau bouillante qui s'échappe par les deux tubulures. Il faut fermer rapidement les robinets, ce qui n'est pas facile, et est au contraire très-dangereux. Malgré cela, la simplicité de l'appareil fait que toutes les chaudières en sont munies. Elles portent en outre deux robinets disposés un peu au-dessus et au-dessous du niveau normal de l'eau, de sorte qu'en ouvrant lentement ces robinets, le premier doit donner constament de la vapeur et le deuxième de l'eau. Ces deux robinets servent principalement dans le cas de rupture du tube.

222. Flotteur à sifflet. — Les appareils que nous venons de décrire exigent tous une certaine attention de la part du chauffeur qui, à chaque instant, doit examiner si l'eau conserve toujours un niveau convenable. On a cherché à placer des appareils automatiques qui avertissent d'eux-mêmes le chauffeur lorsque l'abaissement devient trop considérable. Le flotteur à sifflet, imaginé par M. Sorel, remplit parfaitement ce but. Ce flotteur se compose d'un flotteur sphérique A (*fig.* 80), fixé à l'extrémité d'un levier du premier genre A B C mobile autour d'un axe B, et qui porte à son autre extrémité un contre-poids C. Le bras de levier du flotteur porte une pièce *a* terminée par une partie conique qui vient boucher un canal vertical *b*, très-étroit. Tant que le niveau reste assez élevé dans la chaudière, le flotteur maintient l'orifice

fermé ; mais si le niveau vient à s'abaisser, le flotteur qui suit les variations de l'eau s'abaisse aussi, l'appendice ne ferme plus l'orifice et la vapeur, s'échappant par le canal, vient rencontrer un sifflet qui se compose de deux hémisphères creux *c* et *d* laissant entre eux un petit intervalle ; l'hémisphère inférieur est fermé

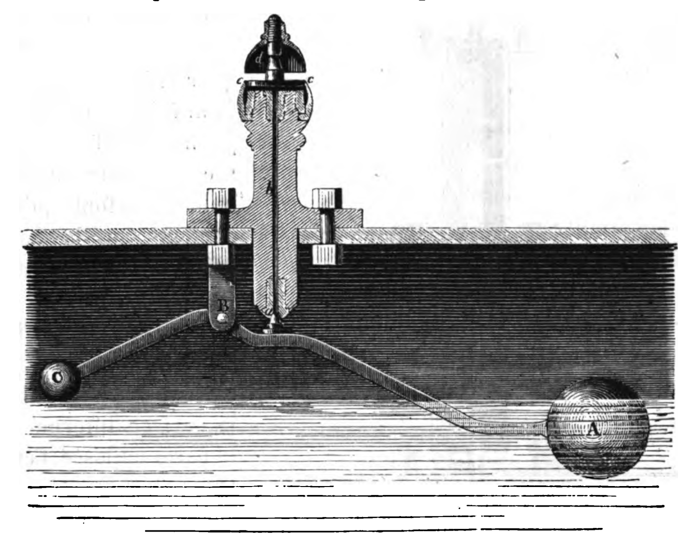


Fig. 80.

par une lame mince qui laisse, entre sa circonférence et la cloche, un espace annulaire très-étroit par lequel passe la vapeur qui vient faire vibrer l'hémisphère supérieur, et produit un sifflement aigu, indice certain de l'abaissement du niveau dans la chaudière.

223. Flotteur magnétique.—Ce flotteur, imaginé par M. Lethuillier-Pinel est fondé sur la propriété que possède une barre d'acier aimantée d'attirer, à travers une paroi métallique, une autre barre en fer. Si on fixe à la tige d'un flotteur un aimant permanent qui vienne influencer, au travers des parois d'une boîte entièrement close, une aiguille en fer, celle-ci suivra les fluctuations du flotteur, et ses diverses positions pourront indiquer, sur une face graduée, la situation du niveau de l'eau dans la chaudière.

Le flotteur F (*fig.* 81) est formé par une lentille creuse en cuivre rouge, dont la pesanteur spécifique est assez faible pour surnager, tout en portant le poids de la tige E et de l'aimant D

qui la surmonte. Cet aimant, qui est une barre d'acier contournée en U, est placé entre deux armatures en fer doux de même forme, et ses deux bouts, qui constituent les pôles, sont recourbés d'équerre. Il peut glisser à l'intérieur d'une boîte prismatique B en cuivre, fixée sur une tubulure A en fonte qu'on boulonne sur la chaudière. Une pièce p, s'appuyant sur la face B de la boîte, maintient les pôles de l'aimant toujours en contact avec la surface interne de la paroi opposée. Cette face présente extérieurement un élégissement pour recevoir une glace qui enferme une petite aiguille d complétement libre, qui suit les mouvements de l'aimant en vertu de l'attraction que celui-ci exerce à travers la paroi de cuivre.

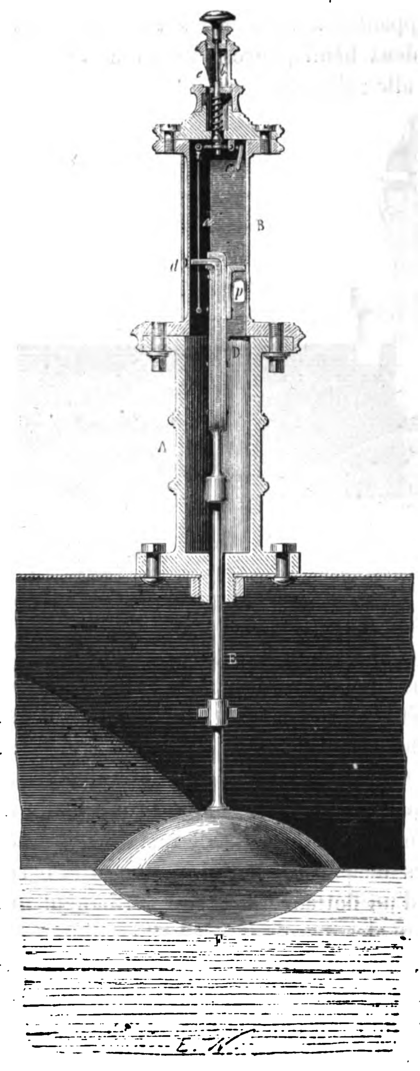


Fig. 81.

224. Cet appareil, outre les indications données par l'index, prévient le chauffeur du trop ou du manque d'eau, au moyen d'un sifflet d'alarme placé à la partie supérieure. Pour cela, on a

disposé une petite soupape traversée par un levier mobile autour du point *o*, qu'un ressort à boudin maintient ordinairement fermée. Le levier porte, à l'une de ses extrémités, un taquet *c* et à l'autre une tringle *a* traversant librement la partie horizontale de l'aimant, et terminée inférieurement par un bouton. Quand le niveau de l'eau s'abaisse trop, l'aimant vient tirer sur ce bouton, la soupape s'ouvre, et la vapeur en s'échappant vient faire jouer le sifflet. Si au contraire le niveau s'élève trop, c'est la pièce *p* qui, poussant le taquet *c*, fait ouvrir la soupape.

225. Soupapes de sûreté. — Les soupapes de sûreté sont des appareils fort simples adaptés aux chaudières à vapeur pour empêcher que la tension intérieure ne dépasse pas une limite déterminée d'avance, et marquée par le timbre apposé par l'administration.

Ces soupapes A (*fig.* 82) sont en bronze ; elles reposent par une partie plane sur un siége taillé en biseau ; la largeur des

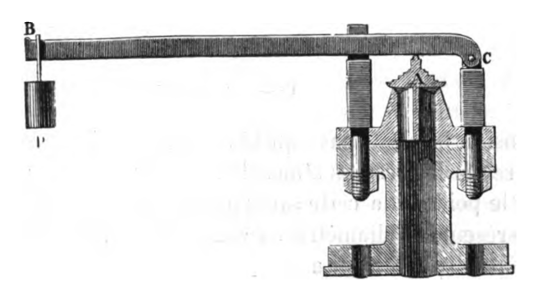


Fig. 82.

bords de ce siége ne doit jamais dépasser 2 millimètres. Afin de les guider dans leur mouvement, elles sont munies, à leur partie inférieure, de 3 ou 4 ailettes dont le diamètre extérieur doit être égal à celui de l'orifice. Elles sont surmontées d'une petite partie cylindro-conique sur laquelle s'appuie un levier CB mobile autour du point C. A l'extrémité B de ce levier est suspendu un poids P déterminé de façon à ce que la soupape se soulève pour donner issue à la vapeur, lorsque la tension intérieure dépasse la limite voulue.

226. Pour qu'une soupape de sûreté remplisse les conditions

relatives à l'usage auquel on la destine, il faut que la section de l'orifice soit assez grande pour livrer passage au maximum de vapeur qui peut être produite avec le feu le plus actif, et qu'elle se soulève en temps convenable.

227. La formule pratique servant à déterminer le diamètre en centimètres d'une soupape de sûreté, en fonction de la surface de chauffe S et de la tension maximum n de la vapeur est :

$$D = 2{,}6\sqrt{\frac{S}{n - 0{,}412}}.$$

228. Pour déterminer le poids à placer à l'extrémité du levier, remarquons que, si ce poids agissait seul pour retenir la soupape sur son siége, nous aurions, d'après la figure 83, en vertu du théorème des moments :

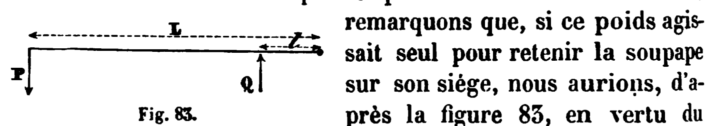


Fig. 83.

$$PL = Ql,$$

d'où

$$P = \frac{Ql}{L}.$$

Or la tension Q n'est pas équilibrée par le poids P seulement, mais encore par la pression atmosphérique qui s'exerce sur la soupape, par le poids q de cette soupape et par le poids q' du levier.

Si D représente le diamètre en centimètres de l'orifice, et n le nombre d'atmosphères, on a

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} 1{,}0334 n = 0{,}812 n D^2.$$

La pression atmosphérique P_a agit de haut en bas sur un cercle dont le diamètre est de 4 millimètres supérieur à celui de l'orifice; sa valeur est, en posant $D' = D + 0{,}4$,

$$P_a = 0{,}812 D'^2.$$

Donc, on a finalement

$$P = [0\ 812 n D^2 - (0{,}812 D'^2 + q + q')] \frac{l}{L}.$$

omme nous l'avons déjà dit, tout générateur doit être muni de deux soupapes de sûreté.

229. Dans les locomotives, l'extrémité du levier, au lieu d'être chargée d'un poids, est maintenue par un ressort à boudin enfermé dans un cylindre fixé par son extrémité inférieure vers la partie antérieure de la boîte à feu.

EXERCICES.

I. — Déterminer le diamètre à donner aux soupapes de sûreté d'une chaudière à vapeur de 65 mètres carrés de surface de chauffe et qui doit fonctionner à une pression de 7 atm. 1/2.

II. — Déterminer le poids à placer à l'extrémité du levier d'une soupape de sûreté placée sur une chaudière à vapeur de 86 mètres carrés de surface de chauffe et devant fonctionner à une tension de 6 atm. 2, sachant que le poids du levier est $0^{kil},820$, celui de la soupape $0^{kil},750$, et le rapport des bras de levier $\frac{1}{10}$.

§ 4. — DIVERS ORGANES DES MACHINES A VAPEUR

230. Toute machine à vapeur comprend :

1° Un *récepteur* consistant en un piston se mouvant d'un mouvement de va-et-vient dans l'intérieur d'un cylindre, et recevant alternativement, sur ses deux faces opposées, l'action du moteur.

2° Un *appareil de distribution* ou *distributeur*, destiné à répartir, en temps opportun, la vapeur sur l'une ou l'autre face du piston, et à permettre son évacuation après qu'elle a produit son effet.

3° Un *mécanisme* servant à transformer le mouvement rectiligne alternatif du piston en un mouvement circulaire continu de l'arbre moteur, et qui varie suivant les divers types de machines.

4° Un ou plusieurs appareils appelés *volants* et *régulateurs* ou *modérateurs de vitesse*, servant à régulariser la marche de la machine.

En outre, la plupart des machines portent des appareils destinés à l'alimentation et appelés *pompes alimentaires*, et d'autres servant à la condensation de la vapeur, qui comprennent : un *condenseur* proprement dit, et un système de pompes désignées sous le nom de *pompe à eau* et *pompe à air*.

Nous allons examiner successivement, et dans l'ordre indiqué, ces divers organes et leurs accessoires.

231. Cylindre. — Le principal organe d'une machine à vapeur est le cylindre. Il est toujours en fonte grise et alésé avec le plus

grand soin, c'est-à-dire qu'il doit avoir partout exactement le même diamètre. A ses deux extrémités, il porte des parties élargies appelées *brides*, auxquelles sont adaptées des plaques circulaires également en fonte, réunies par l'intermédiaire de boulons disposés symétriquement sur une même circonférence. L'une de ces plaques A (*fig.* 84) est nommée *fond*, et l'autre B, qui est percée d'un trou surmonté d'une boîte à étoupes donnant passage à la tige du piston, prend le nom de *couvercle*.

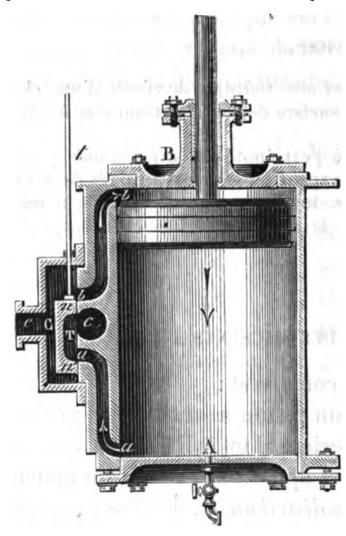


Fig. 84.

Afin d'éviter les fuites de vapeur, on interpose, avant le montage, une légère couche de mastic de minium entre les brides, le fond et le couvercle du cylindre. Deux orifices rectangulaires *a* et *b* communiquant avec chaque extrémité du cylindre, et un troisième *c* destiné à établir la communication avec le condenseur, viennent aboutir sur une surface plane parfaitement dressée appelée *glace* du cylindre, et sur laquelle glisse une boîte prismatique T, ouverte sur une seule de ses faces, nommée *tiroir*, destinée à ouvrir et à fermer les orifices *a* et *b* en temps convenable, c'est-à-dire à produire la distribution de la vapeur. Le tiroir T est assemblé à une tige *t* à laquelle le mouvement rectiligne alternatif est transmis au moyen d'un excentrique calé sur l'arbre de la machine.

232. Une capacité rectangulaire *C*, appelée *boîte à vapeur*, sert à recevoir la vapeur arrivant de la chaudière par le tuyau *e*, avant qu'elle n'agisse sur le piston, en traversant les orifices *a* et *b* appelés *lumières*.

233. L'emploi d'une chemise ou enveloppe de vapeur, imaginé par le célèbre ingénieur James Watt, a été successivement repris et abandonné plusieurs fois ; mais depuis les nombreuses expériences de M. Hirn, qui ont démontré d'une manière positive et

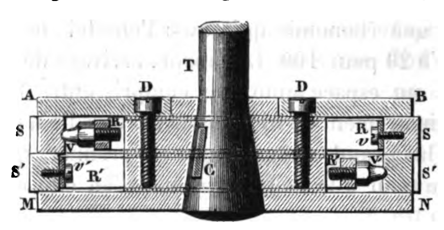
concluante le bon effet de cette disposition, les machines construites avec soin ont presque toutes des cylindres à enveloppe de vapeur. On réalise ainsi une économie qui, avec l'emploi de la détente, peut aller jusqu'à 20 pour 100. La vapeur, arrivant de la chaudière, circule dans un espace annulaire compris entre les parois d'un cylindre ordinairement en fonte blanche, et celle d'un autre cylindre un peu plus grand, concentrique au premier, qui est en fonte grise, et se rend à la boîte à vapeur d'où elle est distribuée par le tiroir.

234. Afin de pouvoir retirer l'eau provenant de la condensation à l'intérieur du cylindre, on munit celui-ci de robinets appelés *purgeurs* et qui sont manœuvrés facilement par le chauffeur au moyen de leviers.

235. **Piston.** — Un piston se compose de deux plateaux circulaires en fonte et quelquefois en fer forgé, dont l'un est fixé à la tige qui est en acier et traverse le couvercle du cylindre, et dont l'autre est relié au premier au moyen de boulons. Lorsque ces deux plateaux sont en place, il existe entre eux une gorge dans laquelle on disposait, dans les premières machines à vapeur, une garniture de tresses de chanvre graissées, qui faisait appliquer exactement le piston sur la surface intérieure du cylindre, et empêchait toute fuite de vapeur; mais l'usure de ces garnitures était très-rapide, et il fallait les remplacer souvent, ce qui occasionnait une perte de temps pendant lequel le travail était arrêté. Aujourd'hui, les garnitures métalliques sont exclusivement employées.

236. Un des pistons les plus employés est représenté en coupe et en plan par la figure 85. Il se compose d'un disque en fonte MN dont le diamètre est un peu plus petit que celui du cylindre et dans lequel s'emmanche la tige T, terminée par une partie légèrement conique et quelquefois filetée, retenue au moyen de la clavette C. Au-dessus de ce disque se place un plateau de même diamètre AB, réuni au premier par quatre vis ou boulons D. Ces deux blocs de fonte constituent les couvercles du piston. La garniture se compose de deux pièces en fonte et quelquefois en acier S et S′ appelées *segments*, placées l'une au-dessus de l'autre, dans le vide compris entre les deux couvercles, et dont l'épaisseur diminue d'un côté. Ces segments portent, à la partie la plus mince,

une fente suivant la hauteur, suivie intérieurement d'une partie triangulaire dans laquelle vient se loger un coin E qui sert à



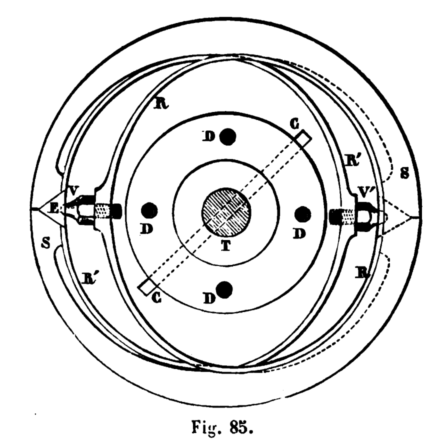


Fig. 85.

écarter les deux parties du segment et à les faire appliquer exactement contre la paroi intérieure du cylindre. Pour que le coin E agisse constamment, chaque segment porte à son intérieur un ressort R qui chasse ce coin vers l'extérieur au moyen du boulon V. Ce ressort, dont la hauteur est égale à celle du segment, est fixé à celui-ci à l'aide d'une vis *v*. On dispose les deux segments de manière que les deux fentes soient diamétralement opposées, pour que chacun d'eux porte au moins sur une demi-circonférence. Cette garniture est excellente.

237. Dans les locomotives, on emploie le *piston suédois*, d'une

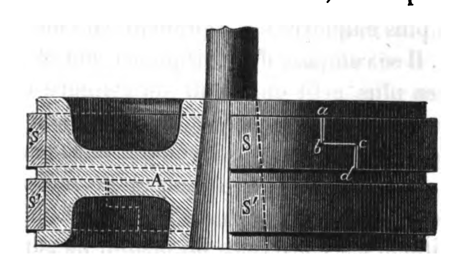


Fig. 86.

exécution simple et peu coûteuse. Ce piston se compose d'une pièce en fonte ou en fer forgé A (*fig.* 86), portant deux gorges très-rapprochées destinées à recevoir des segments S et S' formés par des anneaux en fonte très-douce qu'on martèle à froid à l'intérieur ; après les avoir tournés exactement au diamètre intérieur du cylindre, on les fend suivant

une ligne brisée *abcd*, et par l'effet du martelage, ils tendent à s'ouvrir. Leur élasticité est suffisante pour les appliquer constamment contre les parois du cylindre.

Les deux segments sont disposés comme dans le cas précédent, c'est-à-dire que les fentes correspondent aux extrémités opposées d'un même diamètre.

238. Vitesse du piston. — Cette vitesse dépend du degré de régularité qu'on veut obtenir. Dans les machines de manufacture, on ne dépasse guère $1^m,50$; mais dans les locomotives, où le principal but est d'avoir une grande vitesse, on atteint 3 mètres et même $3^m,50$.

La puissance d'une machine ne dépend pas seulement du volume du cylindre, mais aussi de la vitesse moyenne du piston, car si de deux machines, l'une avait un cylindre double de l'autre, leur travail effectif pourrait être le même, à la condition que celle qui aura le plus petit cylindre donne juste un nombre double de coups de piston.

Pouvant donc avoir des machines lentes et des machines rapides, il restait à savoir lesquelles sont les plus avantageuses. Mais il faut distinguer, au point de vue de la rapidité, le nombre de coups par minute et la vitesse moyenne du piston, car une machine peut, tout en ayant une vitesse relativement faible, donner un grand nombre de coups de piston par minute. Ainsi, une machine dont la longueur de la course serait de $0^m,20$, donnerait 450 coups de piston par minute avec une vitesse moyenne de $1^m,50$.

239. On tend beaucoup de nos jours à augmenter la vitesse moyenne du piston, car naturellement, pour obtenir un même travail effectif, en augmentant le nombre de coups de piston, on diminue le volume à donner au cylindre et par suite la machine devient moins lourde et moins coûteuse. Mais ces machines présentent l'inconvénient de s'user très-rapidement, et le graissage des différentes articulations se fait difficilement sans arrêter la machine et devient très-dispendieux.

240. Distribution de la vapeur. — Dès l'origine, la distribution de la vapeur s'effectuait par des robinets au moyen desquels on mettait alternativement la chaudière en communication avec chaque lumière du cylindre, et celui-ci avec le condenseur ou

avec l'atmosphère. Mais l'impossibilité d'ouvrir et de fermer ces robinets en temps convenable, l'usure rapide et inégale donnant lieu à des fuites, et les grippements qui se produisaient, firent rejeter ce mode de distribution, et il est complétement abandonné aujourd'hui.

241. Tiroir à coquille. — Ce tiroir, imaginé par Murray en 1801, se compose d'un prisme rectangulaire en fonte T (*fig.* 87), portant sur l'une de ses faces une cavité demi-cylindrique qui est constamment en communication avec le condenseur ou avec l'atmosphère par l'orifice d'échappement *c* situé entre les deux lumières. Le mouvement rectiligne alternatif est communiqué à ce tiroir à l'aide d'un excentrique calé sur l'arbre de la machine, dont la tige *t*, qui traverse la boite à vapeur, est terminée par un cadre métallique qui entoure le tiroir. La longueur totale de celui-ci est égale à la distance extérieure des orifices *a* et *b*, et la largeur des bandes *n* et *n'* est égale à celle de ces mêmes orifices; la partie comprise entre les bandes *n* et *n'* est égale à la distance intérieure qui sépare les lumières *a* et *b*.

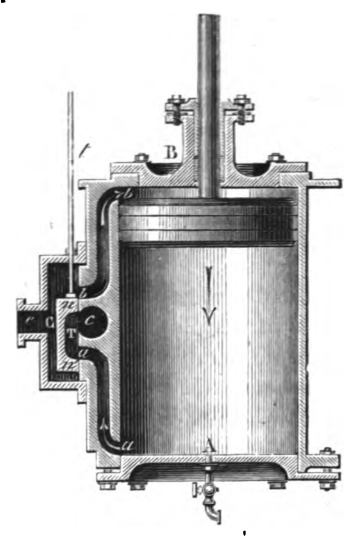


Fig. 87.

242. Lorsque le tiroir est arrivé dans sa position moyenne qui correspond à l'extrémité de la course du piston, les lumières d'admission *a* et *b* sont complétement fermées. Le tiroir continuant toujours sa course descendante, la vapeur qui arrive constamment dans la boite de distribution va pénétrer par la lumière *b* et agir pour faire descendre le piston; pendant ce temps, la vapeur qui se trouve dans le cylindre, de l'autre côté du piston, se rend dans le condenseur par la lumière *a*. Le tiroir arrivant à la fin de sa course, le piston étant au milieu de la sienne, abstraction faite des obliquités de la bielle, remonte pour reprendre sa

position moyenne au moment où le piston arrive au bas de sa course. Le tiroir continuant à monter, découvre la lumière *a*, la vapeur s'introduit par là pour faire monter le piston, et les mêmes phases se reproduisent pour chacune des courses ascendante et descendante.

243. Angle de calage. — Pour que les positions relatives du tiroir et du piston, que nous venons d'indiquer, aient lieu, il faut que le rayon de la manivelle et celui de l'excentrique fassent un angle de 90° qu'on nomme *angle de calage*. Or, dans ces conditions, la vapeur qui remplit le cylindre lorsque le piston achève sa course dans un sens pour recommencer son mouvement en sens contraire, ne peut s'échapper instantanément dans le condenseur ou dans l'atmosphère, la lumière ne livrant passage à la vapeur qu'à mesure que l'espace occupé par celle-ci diminue, c'est-à-dire que le piston avance; il en résulte une contre-pression qui absorbe une partie du travail moteur, et qu'il faut diminuer le plus possible.

244. Avance à l'échappement. — Pour cela, on a été conduit à opérer le calage de la manivelle et de l'excentrique sous un angle différent du premier, en le rendant supérieur à 90°; on a ainsi obtenu l'*avance à l'échappement* ou à l'*émission*, qui consiste à ouvrir la lumière d'échappement un peu avant que le piston ait terminé sa course. Il est vrai qu'on diminue le travail de la vapeur qui n'agit plus vers la fin de sa course, mais la contre-pression étant aussi diminuée, une plus grande somme de travail sera produite, et comme cette augmentation est en excès sur la partie perdue, l'avance à l'échappement constitue un avantage.

245. Avance à l'admission. — D'un autre côté on a obtenu, par cette disposition, l'*avance à l'admission*, qui consiste à ouvrir la lumière d'introduction de la vapeur qui doit faire mouvoir le piston dans un sens, un peu avant que celui-ci ait terminé sa course en sens contraire, de façon que la vapeur qui subit une compression plus ou moins grande lorsqu'elle commence à entrer dans le cylindre, peut atteindre sa tension maximum à l'instant où le piston recommence sa course.

246. L'avance à l'admission doit toujours être très-faible; dans les locomotives, elle est de 4 à 5 millimètres, et dans les machines qui ont une petite vitesse, cette avance est presque nulle: elle ne dépasse guère 1 millimètre 1/2 à 2 millimètres.

247. L'avance à l'échappement peut être d'autant plus considérable que la vitesse du piston est plus grande, car il y a toujours avantage, quel que soit le type de machine, de diminuer la contre-pression.

Dans les locomotives, l'avance à l'émission est très-considérable, et c'est là une nécessité, car la vapeur devant se rendre dans la cheminée pour y produire un tirage énergique, elle doit s'échapper du cylindre avec une tension assez forte pour conserver la vitesse convenable.

248. Recouvrement extérieur. — Le *recouvrement extérieur* consiste à faire les bandes du tiroir plus larges que les orifices d'admission. On obtient ainsi la *détente* dont nous allons étudier les effets importants.

249. Recouvrement intérieur. — Il arrive souvent, dans l'emploi des tiroirs à recouvrement extérieur, surtout pour les machines à petite vitesse, que l'avance à l'échappement devient trop considérable, même dans le cas où l'avance à l'admission est très-petite ou presque nulle. Pour éviter cet inconvénient, il faut donner à la bande du tiroir du *recouvrement intérieur*, c'est-à-dire que la largeur intérieure du tiroir (*fig.* 88, position 1), doit être plus petite que la distance comprise entre les bords intérieurs des lumières *a* et *b*. Ce recouvrement intérieur ne doit jamais être assez grand pour que la lumière d'admission *a*, se découvrant au commencement de la course (position 2), celle d'échappement *b* soit encore fermée à cet instant, car le piston refoulerait la vapeur qui n'a pas d'issue, et la contre-pression deviendrait très-grande pendant la première partie de la course.

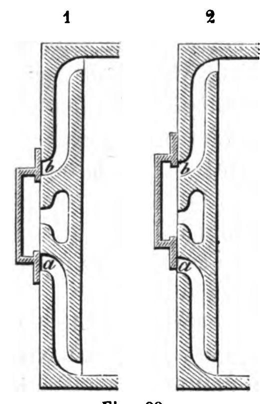


Fig. 88.

250. Tiroir à détente fixe ou à recouvrement. — Le tiroir à recouvrement a été construit afin de mettre à profit les avantages que nous venons de faire connaître, et principalement celui de la détente qui donne une grande économie de vapeur et par suite de combustible. Il suffit, pour cela, de faire les bandes du

tiroir plus larges que les lumières, de façon qu'à un moment donné de la course, la vapeur ne puisse ni entrer ni sortir, et d'opérer le calage de la manivelle et de l'excentrique de manière à obtenir l'avance voulue.

La course du tiroir doit être égale au double de la largeur des bandes; si cette course était plus petite, les lumières ne se découvriraient jamais entièrement pour l'admission ni pour l'échappement; une course plus grande aurait l'inconvénient de recouvrir plus ou moins la lumière d'échappement à la fin de chaque course.

251. comprendre les effets de la détente, examinons les positions simultanées du tiroir et du piston. Considérons le piston (*fig.* 89, position 1) au commencement de sa course

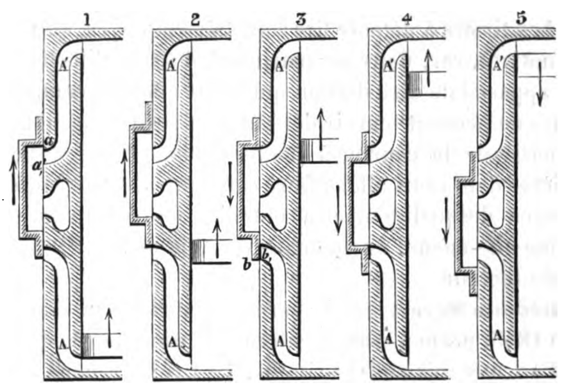


Fig. 89.

ascendante; à ce moment, le tiroir a dépassé sa position moyenne, et la lumière A se trouve découverte d'une quantité qui est égale à l'avance à l'admission, de sorte que la vapeur remplit l'espace nuisible, et elle a atteint sa tension maximum pour agir sur le piston; l'échappement a lieu depuis que le bord intérieur a du tiroir a dépassé le point a'_1.

Dans la position 2, le tiroir est arrivé à la fin de sa course ascendante et le piston continue à monter. La plus grande admission a lieu par la lumière A et l'échappement se fait toujours par l'orifice A'.

Le piston continue sa course, le tiroir descend, et lorsque dans

la position 3, le bord extérieur *b* vient coïncider avec le point b_1, l'admission cesse et la détente commence. L'échappement s'effectue encore sur la face opposée du piston qui refoule la vapeur à mesure qu'il se déplace.

Le tiroir continuant à descendre, lorsqu'il atteint la position 4, l'échappement cesse par la lumière A' et va commencer par l'orifice A. Le piston, continuant à monter, comprime la vapeur qui reste au haut du cylindre, de sorte que les deux organes mobiles ayant pris la position 5, symétrique de la position 1, et le piston se disposant à reprendre sa course en sens inverse, la vapeur qui pénètre déjà par la lumière A', à cause de l'avance à l'admission, rencontre plein l'espace nuisible et agit immédiatement avec sa tension maximum. Pour la course descendante du piston, les mêmes phases se reproduiront.

252. Les tiroirs à détente fixe sont très-employés, surtout dans les locomotives, car, dans ces machines, il serait difficile d'appliquer un appareil de distribution qui offrît quelque complication. Ces tiroirs ne peuvent fournir des détentes se prolongeant au delà de la moitié de la course, à moins d'adopter des dispositions particulières dont nous allons faire connaître les plus employées, et au moyen desquelles on peut obtenir, soit à la main, soit par la machine elle-même, une détente variable pendant le fonctionnement du moteur.

253. Détente Meyer. — Ce genre de distribution, imaginé par Meyer en 1843, permet d'augmenter ou de diminuer la détente au moyen d'un mécanisme très-simple. Le tiroir se compose d'un prisme rectangulaire en fonte, percé de deux lumières A' et B', (*fig.* 90), correspondant à celles A et B du cylindre, et d'une partie demi-cylindrique *C'* communiquant avec le condenseur. Ce tiroir est mis en mouvement par un excentrique circulaire calé sur l'arbre de la machine.

La largeur des lumières A' et B' est la même que celle des orifices de distribution, et leur écartement est juste égal à la dimension extérieure qu'il faudrait donner à un tiroir simple. Ces lumières viennent coïncider, à la fin de chaque course du tiroir, avec les orifices de distribution, de sorte que la communication entre la boîte à vapeur et le cylindre a lieu exactement comme si les bouts pleins qui déterminent ces lumières n'existaient pas.

La face supérieure du tiroir est parfaitement dressée, et sur elle glissent deux plaques en fonte P et P′ faisant corps avec des

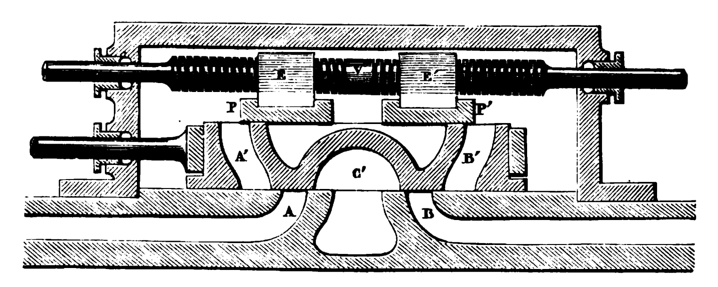


Fig. 90.

écrous en bronze E et E′ montés sur une vis V mise en mouvement par un second excentrique circulaire calé à côté de celui qui commande le tiroir.

On conçoit qu'en réglant convenablement la course et les dimensions de cette espèce de glissière formée par les plaques P et P′, on peut arriver à fermer les orifices A′ et B′ à un moment tel, que, par leur position relativement à ceux A et B du cylindre. ils laisseraient encore pénétrer la vapeur dans celui-ci s'ils étaient découverts : alors la détente se produit. On voit aussi que le moment où les orifices A′ et B′ se fermeront, dépend seulement, pour les mêmes courses de la glissière et du tiroir, de la position des plaques P et P′ ; de sorte qu'en les éloignant ou en les rapprochant l'une de l'autre, on variera le degré de détente. A cet effet, la vis V porte des filets inclinés en sens contraire, c'est-à-dire un pas à droite et un pas à gauche ; en faisant tourner la vis sur elle-même dans un sens ou dans l'autre, les écrous qui ne peuvent pas tourner, s'écartent ou se rapprochent, ainsi que les plaques P et P′ dont l'écartement extérieur est modifié, et par suite la détente l'est aussi.

254. Afin de changer le degré de détente pendant la marche même de la machine, la vis V doit pouvoir tourner sur elle-même à un instant quelconque, tout en suivant le mouvement de va-et-vient que lui communique l'excentrique. Pour arriver à ce résultat, la tige T de l'excentrique (*fig.* 91) est terminée par une chape évidée A à laquelle la tige T′, formant le prolongement de la vis,

vient se relier par un tourillon à écrou B qui établit le mouvement rectiligne alternatif sans empêcher cette tige de tourner.

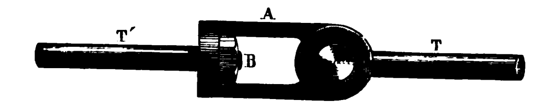


Fig. 91.

255. Pour agir de l'extérieur sur la tige filetée et la faire tourner quand on fait varier la détente, la maison Cail et C[ie] emploie le dispositif suivant (*fig.* 92). En dehors et à une certaine distance de la boîte à vapeur, la tige T est terminée par une partie carrée qui s'engage dans une douille F où elle glisse à frottement doux. Cette douille peut tourner librement à l'intérieur d'un cylindre D qui fait partie d'un support à deux branches fixé solidement à la machine, et porte, claveté avec elle, le volant-manivelle V à l'aide duquel on la fait tourner lorsqu'on veut changer

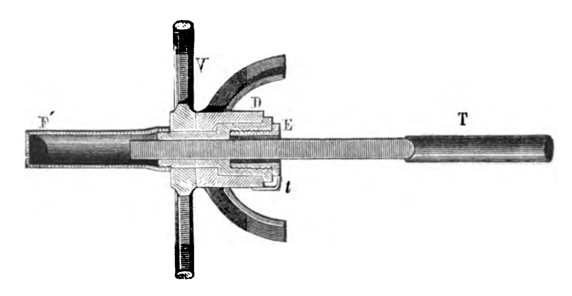


Fig. 92.

la détente. Cette douille porte un fourreau en bronze mince F′ destiné à enfermer la tige T, et du côté opposé elle est filetée intérieurement pour recevoir un écrou également en bronze E, percé d'un trou circulaire dont le diamètre est un peu supérieur à la diagonale de la partie carrée de la tige, pour permettre à celle-ci de s'y mouvoir librement. Cet écrou porte un index coudé *t* qui glisse sur une petite plaque vissée sur le cylindre D, et sur laquelle sont tracées des divisions marquant les différents degrés de la détente. Lorsqu'on fait tourner la douille F qui en-

traîne la tige T, l'écrou est empêché de tourner par l'index, et se déplace longitudinalement avec celui-ci, qui fait connaître alors, sur la plaque graduée, les variations de la détente.

256. Détente Farcot. — La disposition imaginée en 1838 par M. Farcot, constructeur à Paris, a pour but d'opérer plus rapidement la fermeture des orifices du tiroir, afin d'éviter la perte de pression qui se produit par suite de la diminution de section des orifices au moment de leur fermeture.

La surface du tiroir qui est en communication avec la glace du cylindre, est munie de lumières A_1 et B_1 (*fig.* 93), égales en largeur aux orifices A et B du cylindre, et d'une partie demi-cylindrique C,

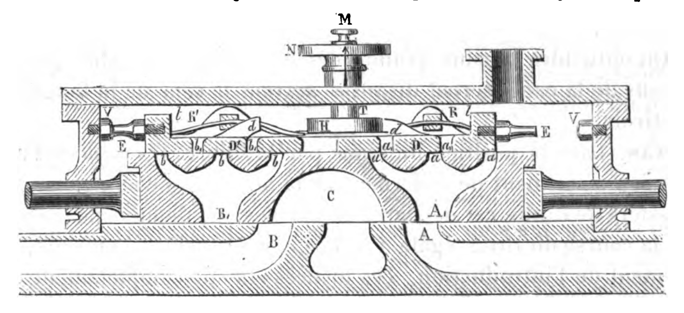


Fig. 93.

communiquant avec le condenseur. Sur la face opposée, les lumières, après s'être considérablement élargies, se divisent chacune en trois orifices *a* et *b*. La détente est produite au moyen de deux plaques D et D′ complétement indépendantes, munies chacune de deux ouvertures a_1 et b_1 dont les dimensions sont les mêmes que celles du tiroir, de sorte que, l'introduction de la vapeur se produisant, les parties pleines de ces plaques correspondent exactement à celles du tiroir, laissant complétement libres les orifices *a* et *b*. Des ressorts R et R′, ainsi que la pression de la vapeur, servent à appliquer exactement les glissières qui, par ce moyen, participent au mouvement de va-et-vient du distributeur.

Chacune de ces glissières porte un talon *t* dans lequel se trouve vissé un taquet E qui, à la fin de chaque course du tiroir, vient en butant contre la tête d'une vis V, faire coïncider les orifices *a* et a_1 ou *b* et b_1 suivant le sens, afin de permettre une nouvelle introduction.

257. Le degré de détente s'obtient au moyen d'une came H (*fig.* 94), qui ordinairement a pour profil deux développantes de cercle, et qui porte en son milieu une tige T qui permet d'agir extérieurement sur elle à l'aide du bouton M, pour la faire tourner. Une aiguille, fixée sur la boîte à vapeur, indique sur un cadran N, mobile avec le bouton, les différents degrés de la détente. Des talons saillants d et d', fixés sur les glissières, viennent buter contre la came H et arrêtent leur mouvement à un moment donné de la course du tiroir.

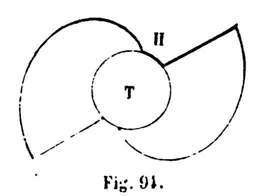


Fig. 94.

On obtiendra la plus grande détente lorsque les plus grands rayons de la came seront disposés suivant le sens de la longueur du tiroir.

258. Dans la position indiquée par la figure, les orifices d'admission a viennent de se fermer, et la détente va commencer. La glissière de droite est déjà arrêtée par la came depuis une portion de la course du tiroir égale à la largeur des orifices, puisque, au moment de l'introduction, ces orifices étaient complétement démasqués. Le tiroir continuant à marcher dans le même sens pour arriver à l'extrémité de sa course, et la glissière D restant arrêtée par la came, il ne se produit pas d'autre effet que le recouvrement de plus en plus grand des orifices a, et la détente se continue. Pendant ce temps, la vapeur qui avait agi dans la course précédente, se rend dans le condenseur ; de plus, la glissière de gauche qui masquait les orifices b depuis le moment de la détente du côté opposé du piston, a été entraînée par le tiroir. Elle se trouve maintenant arrêtée par la tête de vis V, qui va agir jusqu'à la fin de la course du tiroir, pour démasquer les orifices b et établir l'introduction de la vapeur par la lumière B. La vis V permet, en la tournant plus ou moins, de régler le moment d'arrêt de la plaque, de façon qu'à la fin de la course du tiroir les orifices b_1 coïncident exactement avec b.

259. Distribution dans les machines de Woolf. — Lorsque, dans une machine à un seul cylindre, on veut obtenir une détente assez prolongée, il se présente un grave inconvénient : c'est une grande irrégularité de pression sur le piston aux différents points

de sa course. Si dans un cylindre on détend par exemple la vapeur à 6 fois son volume primitif, l'effort développé sur le piston sera 6 fois plus grand au commencement de la course qu'à la fin, et plus la détente sera prolongée, plus le mal sera grand. Cet excès de pression agit sur le piston, lorsqu'il change le sens de son mouvement, pour lui donner une impulsion violente qui produit des chocs dans le mécanisme et amène une irrégularité dans la marche de la machine.

260. Pour éviter ce grave inconvénient, et continuer à profiter des avantages si considérables de la détente, Hornblower imagina, en 1776, la machine à deux cylindres; mais il ne publia son invention qu'en 1781. Woolf y appliqua les hautes pressions en 1804 et y introduisit de nombreux perfectionnements.

261. Dans les premières machines à deux cylindres, la vapeur, après avoir agi à pleine pression pendant toute la course du petit piston, se rendait sous le grand piston en agissant alors par sa détente. Plus tard, on reconnut qu'il était préférable de n'admettre la vapeur dans le petit cylindre que pendant une portion de la course de son piston. Sans entrer pour le moment dans de plus longs détails, nous allons faire connaître un des modes de distribution les plus simples et qui a conduit à de très-bons résultats. La disposition du tiroir, représentée par la figure 95, est telle, qu'il effectue la distribution dans les deux cylindres. Il se compose de quatre petits pistons *p*, disposés deux à deux aux extrémités d'un tuyau T, dont l'intérieur est destiné au passage de la vapeur qui se rend, d'un bout du petit cylindre, à l'extrémité opposée du grand.

L'espace annulaire O, compris entre la surface extérieure du tube et les pistons, est occupé par la vapeur qui vient du générateur, pour agir dans le petit cylindre. La communication du grand cylindre avec le condenseur a lieu au delà des extrémités supérieure et inférieure du tiroir. Celui-ci est manœuvré par des cames, et il parcourt sa course en deux fois, c'est-à-dire que son mouvement rectiligne alternatif est intermittent.

La position 1 représente les pistons au commencement de leur course ascendante et la position relative du tiroir, qui en ce moment parcourt la seconde portion de sa course descendante.

La vapeur, arrivant de la chaudière, remplit l'espace annu-

laire OO′ et pénètre dans le petit cylindre par la lumière A, où elle agit à pleine pression sur le piston P. La vapeur qui remplit le petit cylindre sort par B et passe, par l'intérieur du tube-tiroir, sous le piston P′ qu'elle fait monter en se détendant, et celle qui se trouvait dans le grand cylindre s'échappe par B′ dans le condenseur.

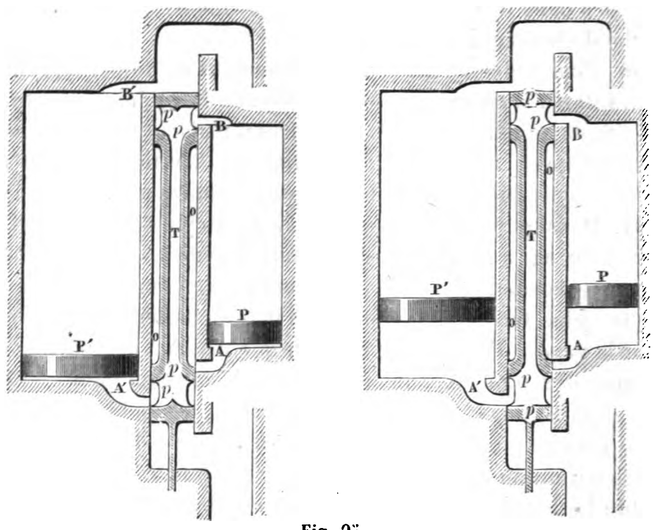


Fig. 95.

Dans la position 2, le tiroir, après avoir fini sa course descendante, a opéré la première partie de la course en sens inverse, et se trouve arrêté à cause de l'intermittence de son mouvement. L'introduction de la vapeur étant coupée dès cet instant, la détente commence dans le petit cylindre. Un peu avant que le piston P n'arrive à l'extrémité de sa course, le tiroir reprend sa marche pour opérer la seconde partie de la sienne. Pendant le passage de la partie pleine *p* devant la lumière B, l'échappement n'ayant plus lieu, la vapeur se trouve comprimée et reprend sa tension maximum qui lui permettra d'agir lorsque le piston P, étant arrivé à la partie supérieure de sa course, l'orifice B se découvrira à l'admission supérieure. Le tiroir se trouvant alors dans une position symétrique à la position 1, les mêmes circonstances auront lieu pour la course descendante des pistons.

262. Coulisse de Stephenson. — Ce mécanisme, employé principalement dans les locomotives et dans les machines marines, permet de renverser le sens de la marche et de faire varier le degré de détente.

Deux excentriques A et A′ (*fig.* 96), servant à commander chacun à son tour la tige du tiroir, sont calés presque en sens inverse sur l'arbre moteur O, et leurs barres sont articulées à chacune des

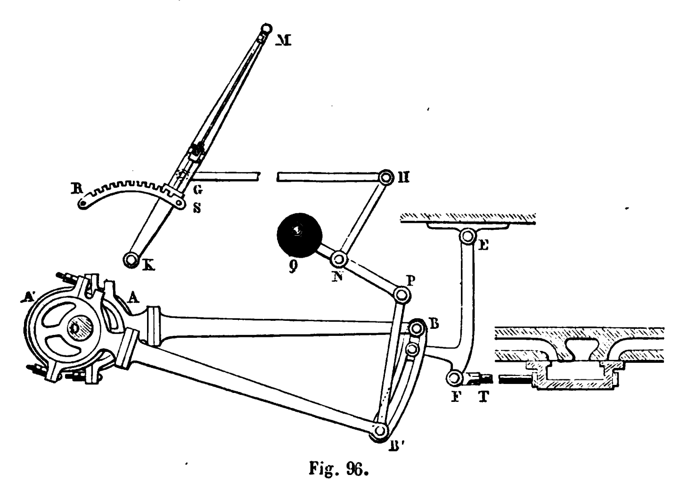


Fig. 96.

extrémités d'une coulisse BB′, en forme d'arc de cercle, dont le centre se trouve sur l'arbre O. Dans cette coulisse peut glisser un coulisseau, dont les extrémités sont articulées aux branches d'une fourche faisant partie d'un levier EF, appelé *bielle de suspension*, mobile autour du point E. L'extrémité inférieure F de ce levier est reliée à la tige du tiroir par l'intermédiaire d'une bielle T. Une barre GH est articulée, d'une part à un levier KM appelé levier de *changement de marche*, mobile autour du point K, et de l'autre à une manivelle HN montée sur un arbre horizontal N nommé *arbre de relevage*. Cet arbre porte une manivelle NP à laquelle sont articulées deux bielles PB′ situées de chaque côté de la coulisse, et reliées à l'extrémité inférieure de celle-ci. L'arbre N porte un contre-poids Q, destiné à équilibrer la coulisse et les barres d'excentrique, de manière à rendre la manœuvre de l'appareil plus facile.

263. Dans la position indiquée par la figure, c'est l'excentrique A qui commande le tiroir; cet excentrique est désigné sous le nom d'excentrique de *marche en avant.* Si l'on veut changer le sens de la marche, il faut, en premier lieu, fermer le régulateur de façon que la vapeur n'arrive plus dans le cylindre, puis on agit sur le levier MK en le ramenant vers R. Le coulisseau vient alors occuper l'extrémité inférieure de la coulisse, et le tiroir est commandé par l'excentrique A', qui prend le nom d'excentrique de *marche en arrière.* En ouvrant de nouveau le régulateur, la marche recommencera, mais en sens contraire.

264. La coulisse de Stephenson sert aussi, comme nous l'avons dit plus haut, à changer le degré de détente en faisant varier la course du tiroir. D'après le calage des excentriques sur l'arbre, qui, dans les locomotives, n'est autre chose que l'essieu moteur, les extrémités B et B' de la coulisse ont un mouvement directement opposé, c'est-à-dire que, quand l'une d'elles marche dans un sens, l'autre marche en sens contraire ; il résulte de là que la coulisse oscille autour de son milieu, et par suite le coulisseau prend un mouvement de va-et-vient dont l'amplitude est d'autant plus petite qu'il se rapproche plus du milieu de cette coulisse. Si donc, on fait occuper au coulisseau le milieu de la coulisse, le tiroir ne décrira qu'un chemin très-court, insuffisant pour le découvrement des orifices, tandis que s'il s'occupe une des extrémités, la course sera la plus grande possible.

On comprend qu'en faisant varier la course du tiroir, on fera varier le degré de détente, car si on diminue cette course, comme il emploie toujours le même temps pour parcourir un espace moindre, les lumières resteront plus longtemps fermées et la détente se prolongera.

Afin de faire occuper au coulisseau diverses positions, le levier KM porte un taquet qu'un ressort presse constamment et qui vient s'engager dans des échancrures pratiquées sur un arc RS.

265. Changement de marche à vis. — Le levier de changement de marche exige, pour son maniement, des efforts assez considérables, et la manœuvre un temps assez long, surtout à cause de la fermeture et de la réouverture du régulateur, condition indispensable pour diminuer l'effort à faire en diminuant la pression sur les tiroirs. Pour obvier à ces inconvénients, on com-

mence à employer, sur les locomotives, le *changement de marche à vis*, qui consiste à remplacer le levier par une vis V (*fig.* 97), sur laquelle est montée un petit volant manivelle C. Cette vis, qui est à filets très-inclinés, porte un écrou A, formant l'extrémité d'une

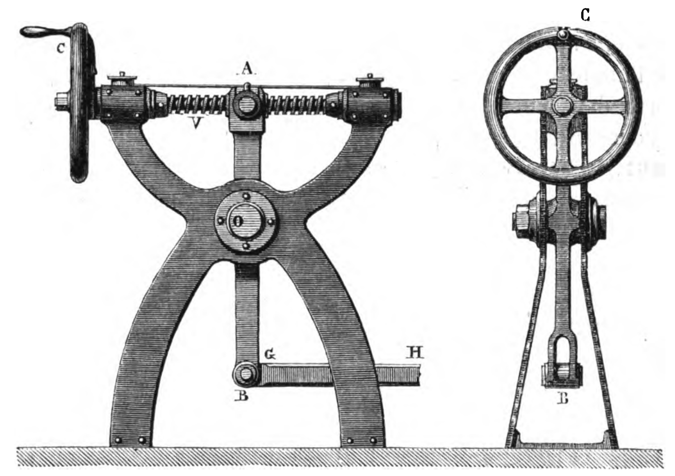


Fig. 97.

tige AB, mobile autour du point O. La barre HG, de la figure précédente, est alors articulée à la fourche qui termine la tige AB.

La manœuvre du changement de marche à vis n'exige pas la fermeture du régulateur; elle est plus rapide, plus facile, et ne demande qu'un très-faible effort.

266. Réglementation des tiroirs. — La réglementation a pour but de rendre compte des diverses phases de la distribution de la vapeur dans un cylindre, quel que soit le genre de distributeur, et de faire connaître si elle s'accomplit dans les conditions qu'on s'est imposées.

Pour arriver à ce résultat, il suffit de connaître, pour une position quelconque du piston, la position correspondante du tiroir. Or ces deux organes étant solidaires, nous aurons leurs déplacements simultanés en traçant une courbe à coordonnées rectangulaires ayant pour abscisses les chemins parcourus par le piston, et pour ordonnées les déplacements correspondants du tiroir; cette courbe, ou *loi de mouvement*, donnera à chaque instant la relation

cherchée. Nous allons construire, d'après la méthode imaginée par M. Fauveau, ingénieur de la marine, les courbes de réglementation : 1° pour un tiroir à coquille sans avance ; 2° pour un tiroir à recouvrements extérieur et intérieur avec avance. Nous supposerons, dans les deux cas, que les bielles du piston et du tiroir ont une très-grande longueur, de manière à pouvoir négliger l'influence de leur obliquité, par rapport à la ligne des points morts, dans leurs diverses positions. En suivant la même marche, on construirait l'épure pour tout autre genre de tiroir.

267. 1° Tiroir à coquille sans avance. — On commence par relever sur la machine : la longueur Oo de la manivelle (*fig.* 98),

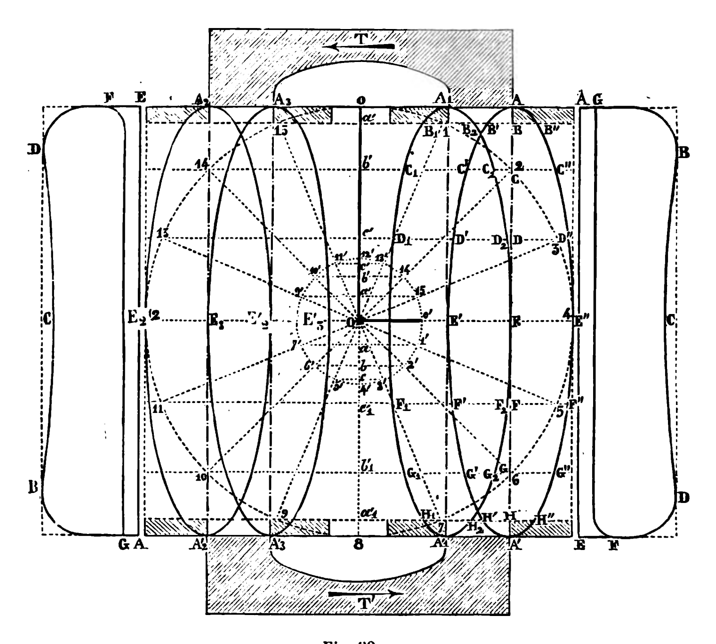


Fig. 98.

le rayon Oo' de l'excentrique, la largeur AA_1 des lumières, leur écartement intérieur A_1A_3, la largeur des bandes du tiroir, qui dans ce cas est égale à celle des lumières, et enfin l'écartement intérieur de ces bandes, qui est de même égal à celui des lumières.

Cela fait, traçons les circonférences Oo et Oo' décrites par le bouton de la manivelle et par le centre de l'excentrique qui commande le tiroir, et divisons ces deux circonférences en un même nombre de parties égales, en 16 parties par exemple.

Au commencement de la course du piston, la manivelle se trouvera au point mort ; l'angle de calage devant être de 90°.(244), le rayon de l'excentrique aura la position Oo', et le tiroir sera à sa position moyenne T. Pendant que le bouton de la manivelle parcourra les arcs $o.1$, 1.2, 2.3,..... le rayon de l'excentrique décrira les arcs $o'.1'$, $1'.2'$, $2'.3'$,..... et les projections de ces différents arcs sur la ligne des points morts 0,8 seront les chemins respectifs parcourus par le piston et par le tiroir.

Nous pourrions nous borner là s'il ne s'agissait que de connaître les positions relatives du piston et du tiroir ; mais il est plus commode, pour observer les différentes circonstances de la distribution, d'avoir directement la position du tiroir par rapport aux lumières, à un moment quelconque de la course du piston. Portons sur les lignes AA', $A_1A'_1$...... passant par les bords du tiroir à sa position moyenne, des abcisses AB, AC, AD... égales aux chemins oa', ob', oc'... parcourus par le piston, et des ordonnées BB', CC', DD'... égales aux espaces Oa, Ob, Oc... décrits par le tiroir. Nous obtenons ainsi, pour la course descendante du piston, les courbes AE'A', $A_1E_1A'_1$, $A_2E_2A'_2$ et $A_3E_3A'_3$ correspondant à chacun des bords du tiroir. A partir de cet instant, le piston va remonter : le tiroir occupe la position T', c'est-à-dire qu'il a repris sa position moyenne, et va finir sa course de gauche à droite pour revenir encore à sa position moyenne T, lorsque la manivelle aura fait une révolution entière et que le piston se disposera à redescendre. Pendant la course ascendante du piston, nous obtenons les courbes A'E''A, A'_1EA_1, $A'_2E'_2A_2$ et $A'_3E'_3A_3$, qui forment, avec celles obtenues précédemment, quatre courbes fermées qui ne sont autre chose que des ellipses. C'est en examinant simultanément ces quatre courbes, que nous verrons enfin comment la distribution s'opère.

La manivelle étant au point mort et le piston au commencement de sa course, le tiroir est à sa position moyenne et les lumières sont entièrement couvertes par les bandes du tiroir. Lorsque le piston est venu en a', le tiroir s'est déplacé de droite à gauche, et

les lumières sont ouvertes, celle de droite à l'admission, celle de gauche à l'échappement, d'une quantité égale à BB'. Le piston étant arrivé au point *O* milieu de sa course, le tiroir est à la fin de la sienne et les lumières sont entièrement ouvertes à l'admission et à l'échappement. A partir de ce point, le tiroir revient de gauche à droite, et ferme de plus en plus les lumières pour les couvrir entièrement lorsqu'il reprend sa position moyenne T', au moment où le piston arrive au bas de sa course. Le tiroir continuant sa course, la lumière $A'A'_1$ s'ouvre à l'échappement, tandis que la lumière $A'_2A'_3$ s'ouvre à l'admission, et le piston remonte. L'inspection des courbes fait voir que, pour la course ascendante, on a les mêmes circonstances que pour la course précédente. On voit en outre qu'à de faibles déplacements du piston correspondent de grands déplacements du tiroir, et réciproquement.

268. Nous avons tracé, sur le côté, les courbes du travail pour chacune des faces du piston ; à droite pour la face supérieure, à gauche pour la face inférieure. Au commencement de la course, la lumière d'admission ne s'ouvrant qu'à mesure que le tiroir avance, la pression ne peut s'établir instantanément, et la courbe est arrondie jusqu'en B; puis le piston avançant rapidement, la vapeur n'a pas le temps d'arriver, et la pression diminue jusqu'en C, puis reprend sa tension maximum vers D par suite du ralentissement de la marche du piston. Vers la fin de la course, la lumière d'admission n'étant plus guère ouverte, la courbe s'arrondit encore comme au commencement. Pendant cette même course, la contre-pression s'exerce sur la face inférieure du piston ; au commencement, elle a une valeur FE plus grande que pendant le reste de la course, car la lumière A_2A_3 étant à peine ouverte, la vapeur s'échappe difficilement.

Pendant la course ascendante du piston, la pression fournira la courbe ABCDE de gauche, et la contre-pression donnera la courbe EFGA de droite. La différence des aires entre les courbes ABCDE et EFGA, représente le travail effectif de la machine sur chacune des faces du piston. Ces deux travaux seront égaux si on ne tient pas compte de l'espace occupé par la tige du piston, qui, en réalité, diminue un peu le travail développé par la vapeur sur la face supérieure.

269. 2° **Tiroir à recouvrements extérieur et intérieur avec**

avance. — Supposons que l'on ait relevé, sur la machine, les mêmes quantités que dans le cas précédent, et qu'on ait tracé les circonférences Oo' et Oo (*fig.* 99), décrites par le bouton de la manivelle et par le centre de figure de l'excentrique. La distri-

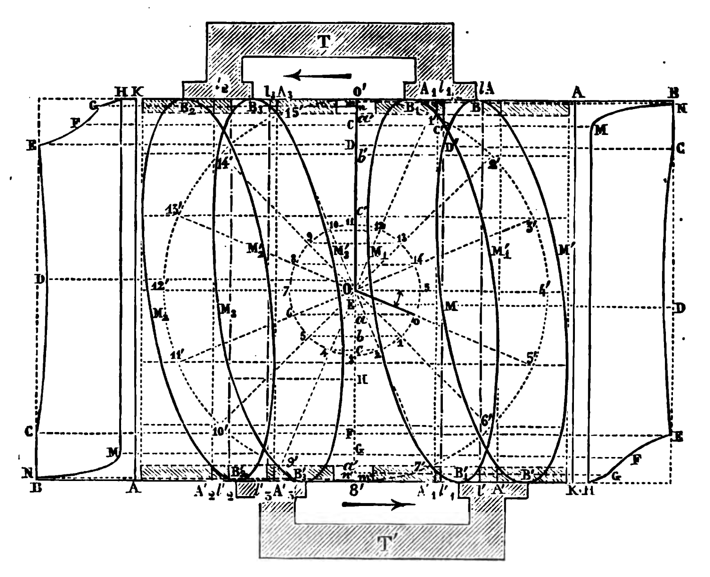


Fig. 99.

bution devant avoir lieu avec avance, l'angle de calage sera de $90° + \alpha$, α étant l'angle d'avance qu'on s'est imposé, et que nous prenons égal à 22°,5. En faisant l'angle $o'Oo = 112°,5$, nous aurons en Oo la position du rayon de l'excentrique lorsque la manivelle sera à son point mort.

A partir des points o' et o, divisons les deux circonférences en un même nombre de parties égales, en 16, par exemple. Lorsque le piston sera au commencement de sa course, le tiroir, à cause de l'avance, prendra la position T indiquée sur la figure, c'est-à-dire qu'il aura dépassé sa position moyenne de la quantité Oa. Pendant que la manivelle parcourt les arcs $o'.1'$, $1'.2'$, $2'.3'$.... l'excentrique décrit les arcs 0.1, 1.2, 2.3.... et la projection de ces arcs sur la ligne des points morts 0'8', représente les chemins parcourus simultanément par le piston et par le tiroir.

Si, comme dans le cas précédent, nous portons à partir des lignes AA', $A_1A'_1$.... passant par les bords du tiroir à sa position moyenne, des abscisses et des ordonnées respectivement égales aux espaces parcourus par le piston et par le tiroir, nous obtenons, pour la course descendante du piston, les courbes BMB', $B_1M_1B'_1$, $B_2M_2B'_2$ et $B_3M_3B'_3$, et pour la course ascendante, les courbes B'M'B, $B'_1M'_1B_1$, $B'_2M'_2B_2$ et $B'_3M'_3B_3$ qui forment aussi, avec les premières, des ellipses, mais qui diffèrent de celles obtenues dans le cas précédent, en ce que les lignes AA'...., passant par les bords du tiroir à sa position moyenne, ne sont plus leur grand axe.

Les points de rencontre de ces quatre courbes avec les lignes ll', $l_1l'_1$.... passant par les bords des lumières, nous feront connaître les diverses phases de la distribution. Au commencement de la course, le tiroir s'est déjà éloigné de sa position moyenne de la quantité AB, ce qui donne une avance linéaire égale à lB pour l'admission, et à l_3B_3 pour l'échappement. Quand le piston a parcouru l'espace $o'a'$, la lumière l_2l_3 est complétement ouverte à l'échappement, et ce n'est que lorsqu'il arrive en D, que la plus grande admission a lieu par la lumière ll_1; au point E, cette lumière ll_1 commence à se fermer, et la même chose a lieu pour la lumière l_2l_3 lorsque le piston arrive au point H. Depuis que le piston a dépassé le point c', le tiroir étant arrivé à la fin de sa course, revient de gauche à droite comme on le voit en T', et au moment où le piston passe au point F, le bord B' arrive au point l', et la lumière se trouvant entièrement couverte par la bande, la détente commence. Le piston arrivant au point G, le bord B'_3 du tiroir atteint le point l'_3, l'échappement cesse, et il y a compression de la vapeur à la partie inférieure du cylindre jusqu'à ce que le piston arrive au point m' où le bord B'_2 du tiroir, dépassant le point l'_2, laisse pénétrer la vapeur par la lumière $l'_2l'_3$, ce qui donne l'avance à l'admission inférieure. En n' l'avance à l'échappement a commencé. Pour la course ascendante du piston, les mêmes circonstances se reproduisent en sens inverse.

Examinons maintenant les courbes du travail. En vertu de l'avance à l'admission, la pression atteint, dès le commencement de la course, sa valeur maximum AB, et elle se maintient jusqu'en C. A partir de là, elle diminue un peu à cause de l'accélération de la marche du piston. Un peu avant le point E, elle

reprend sa plus grande valeur, et c'est à partir de ce point E que la détente commence ; de E en F il y a détente sans compression ; de F en G, la détente est avec compression, c'est-à-dire que la vapeur est comprimée sur l'autre face du piston, par suite de la fermeture de la lumière d'échappement. Enfin, l'avance à l'échappement commençant au point G, la pression diminue rapidement pour ne conserver, à la fin de la course du piston, qu'une valeur HK, égale à celle de la contre-pression. On dit encore que la détente a lieu en *vase clos* de E en G, d'abord sans compression, puis avec compression, et que de G en H, la détente s'opère en *vase ouvert*.

Pendant cette course descendante, la contre-pression s'exerce sur la face inférieure du piston. Elle prend sa valeur minimum HK dès le commencement de la course, par suite de l'avance à l'échappement, et elle reste constante jusqu'en M où la compression l'a fait augmenter rapidement, et atteint en N une valeur égale à celle de la pression de la vapeur qui arrive du générateur à partir de ce point.

270. Comme dans le cas d'un tiroir à coquille, pendant la course descendante du piston, la pression fournira la courbe ABCDEFGHK de droite, et la contre-pression donnera la courbe KHMNBA de gauche. L'inverse aura lieu pour la course ascendante. La différence des aires ABCDEFGHK et KHMNBA exprimera le travail effectif de la machine sur chacune des faces du piston pour une révolution entière de la manivelle.

271. Régulateurs ou modérateurs de vitesse. — On appelle *régulateurs*, dans les machines, des organes dont la fonction est de maintenir la vitesse entre des limites données.

Ils peuvent se diviser en deux classes : les uns, qui remédient aux variations imprévues de la vitesse résultant des variations de la résistance ou de la puissance : ce sont les *régulateurs* proprement dits; les autres, qui remédient aux variations prévues et périodiques de la vitesse dépendant de la nature de la machine elle-même : ce sont les *volants*.

272. Modérateur de Watt. — Cet appareil, connu aussi sous le nom de *régulateur à boules* et de *pendule conique*, est fondé sur l'action de la force centrifuge. Il se compose d'un arbre vertical A (*fig.* 100), recevant un mouvement de rotation dont la vitesse

est proportionnelle à celle de la machine, par l'intermédiaire de poulies ou d'engrenages. Cet arbre porte deux tiges d'égale longueur D, articulées en A, et portant à leurs extrémités deux boules M ; aux points D sont assemblées deux autres tiges DC dont les extrémités inférieures sont reliées à un manchon C qui entoure l'arbre B, et qui peut s'élever ou s'abaisser verticalement. L'ensemble de la figure ainsi formée est le plus souvent un losange. Le manchon C, qui tourne avec la tige verticale par suite de sa liaison avec le losange, porte une gorge embrassée par les deux branches de la fourchette d'un levier E mobile autour du point F, et qui, à l'aide d'une transmission de mouvement quelconque, est employé, soit à ouvrir ou à fermer une espèce de papillon appelé *valve*, placé dans le tuyau de communication de la chaudière avec le cylindre, soit à pousser dans un sens ou dans l'autre un manchon d'embrayage pour la manœuvre des vannes dans les récepteurs hydrauliques.

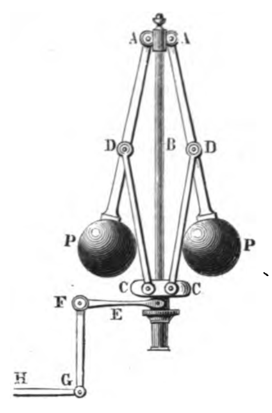


Fig. 10.

Lorsque la machine sur laquelle le régulateur est appliqué marche à sa vitesse de régime, les boules, en vertu de la force centrifuge, s'élèvent à une certaine hauteur. Mais si cette vitesse vient à augmenter, la force centrifuge croît également, et les boules s'écartent davantage en soulevant le manchon ; le levier qui l'embrasse fait alors fermer l'orifice d'admission et diminue ainsi la tension de la vapeur dans le cylindre. Il résulte de là que la marche de la machine se ralentit jusqu'à ce qu'elle reprenne sa vitesse de régime, et les boules reviennent à leur position primitive. Si, au contraire, la vitesse de la machine diminue, l'action de la force centrifuge n'est plus suffisante pour maintenir les boules, et par suite le manchon descend en entraînant avec lui le levier qui, en agissant sur la valve, augmentera la section de l'orifice d'admission de la vapeur.

Il en résulte, dans tous les cas, un mouvement vertical du manchon dépendant des oscillations de la vitesse et par suite des variations de la force centrifuge. Il faut donc donner aux boules un poids suffisant pour soulever le manchon, malgré la résistance qu'il offre, et pour une variation de vitesse déterminée d'avance.

273. Déterminons, en premier lieu, la position d'une boule supposée libre, c'est-à-dire n'ayant pas le manchon à soulever, et pour simplifier le problème, négligeons le poids de la tige *ac*, et supposons que tous les points de la boule soient sensiblement animés de la même vitesse, en sorte que la force centrifuge pourra être considérée comme étant appliquée au centre même de la boule.

Désignons par ω la vitesse de régime du régulateur, et par P le poids de chacune des boules. Le mouvement de rotation étant supposé uniforme, la boule C (*fig.* 101), peut être considérée comme étant en équilibre sous l'action de son poids P qui agit verticalement et qui tend à la ramener vers l'axe, et de la force centrifuge F qui agit suivant le rayon et tend au contraire à l'éloigner.

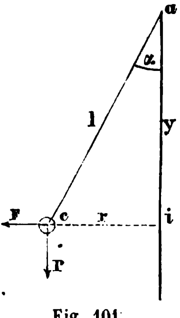


Fig. 101.

Prenons les moments par rapport au point *a* : l'équation d'équilibre sera donnée par la proportion

$$F \times ai = P \times ci.$$

Or, l'expression de la force centrifuge F est $m\omega^2 r$; celle du poids P est mg, et en désignant ci par r et ai par y, on a

$$m\omega^2 r \times y = mgr,$$

d'où l'on déduit

$$y = \frac{mgr}{m\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2};$$

ce qui montre que la hauteur à laquelle s'élèvent les boules ne dépend que de la vitesse angulaire, ou du nombre de tours par minute, et elle est constante quelle que soit la longueur des branches, la nature et le diamètre des boules.

La quantité y étant ainsi déterminée, on connaitra la figure que

l'appareil doit affecter pendant sa vitesse de régime, position qui doit être choisie de façon que les branches puissent s'ouvrir ou se fermer assez pour diminuer ou augmenter suffisamment l'orifice d'admission.

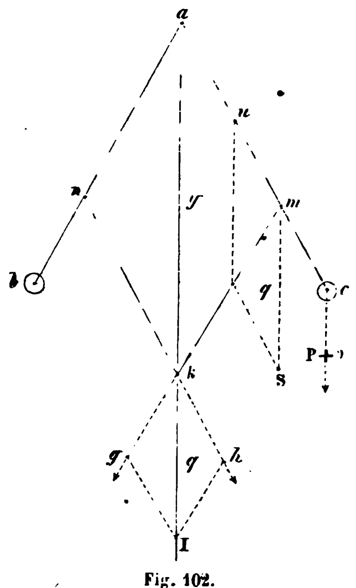


Fig. 102.

274. Considérons maintenant le cas ordinaire de la pratique, où les boules doivent exercer un certain effort pour soulever le poids du manchon et vaincre le frottement des articulations des leviers, effort qu'on peut facilement déterminer par expérience et que nous désignerons par q. Prenons une longueur kl (*fig.* 102), proportionnelle à la résistance q. Cette résistance peut se décomposer en deux autres, kg et kh, agissant sur les branches ab et ac; le point d'application de la composante kg peut être transporté en m sans que l'équilibre cesse d'exister, et à son tour elle peut se décomposer en deux, l'une ms agissant verticalement, et l'autre mu détruite par la résistance du point a.

Si la figure *anmk* est un losange, la résultante verticale ms sera égale à q, et elle peut être considérée comme la résultante de deux composantes parallèles, dont l'une p, appliquée au centre de la boule, aura pour expression

$$p = q \times \frac{am}{ac},$$

et l'autre, appliquée au point a, sera détruite. C'est ce poids additionnel p qui n'a pas d'influence sur la valeur de la force centrifuge, et que la boule doit soulever.

La vitesse du régulateur correspondant à la vitesse de régime de la machine est donnée par la formule $\frac{g}{\omega^2}$, lorsqu'on ne tient pas compte du poids du manchon et que le centre des boules se

trouve à une distance verticale y du centre d'articulation. Mais si cette vitesse vient à augmenter, les boules auront à soulever le manchon, et on comprend que si elle augmente d'une faible quantité, il pourra arriver que l'accroissement de la force centrifuge, dû à cette augmentation de vitesse, soit insuffisant pour vaincre la résistance du manchon; il existe donc une relation entre cette résistance, l'augmentation de la vitesse et le poids des boules.

Cela posé, supposons que les boules soient en état de soulever la douille lorsque la vitesse angulaire ω sera devenue ω_1.

L'équation d'équilibre entre $P+p$ et la force centrifuge correspondant à ω_1 sera :

$$F \times y = (P+p)r.$$

Or nous savons que

$$F = m\omega_1^2 r = \frac{P\omega_1^2 r}{g} \text{ et } y = \frac{}{\omega^2}$$

Donc en remplaçant il vient :

$$\frac{P\omega_1^2 r}{g} \times \frac{g}{\omega^2} = (P+p)r,$$

et en supprimant les facteurs communs ·

$$\frac{P\omega_1^2}{\omega^2} = P + p,$$

d'où

$$P = \frac{p}{\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1}.$$

On voit donc que le poids des boules est sensiblement proportionnel à celui qu'elles doivent soulever.

Ordinairement, on prend le rapport $\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{21}{20}$, c'est-à-dire que les boules se soulèvent dès que la vitesse angulaire dépasse de $\frac{1}{20}$ celle correspondant à la vitesse de régime de la machine. On a alors :

$$\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1 = \frac{441}{400} - 1 = \frac{41}{400} = \frac{1}{10} \text{ environ,}$$

ce qui donne :

$$P = 10\,p.$$

Généralement, le rapport $\frac{am}{ac}$ est égal à $\frac{2}{3}$, et dans ce cas

$$P = \frac{20}{3} q = 6{,}666 q.$$

Dans ces calculs, nous avons négligé le poids des tiges; la force centrifuge doit donc développer une action un peu plus grande que celle résultant des boules seules. Il est vrai que cet excès est très-faible, mais il est nécessaire pour vaincre les frottements dont on ne peut tenir un compte exact. Du reste, il n'y a aucun inconvénient à augmenter le poids des boules dans une certaine mesure; il en résulte plus de sensibilité pour l'appareil.

275. Le pendule conique est aussi fort employé dans les moulins, comme indicateur de vitesse. La douille mobile porte une oreille saillante, de manière à heurter un ressort de sonnette quand la vitesse s'écarte au delà d'une certaine limite en dessus ou en dessous de la vitesse de régime. Cette sonnerie a pour but d'avertir le garde-moulin.

Quelquefois, on remplace les boules par des lentilles, afin de diminuer la résistance de l'air.

276. Le régulateur à boules, ainsi formé, n'est pas sans inconvénients; il ne peut remédier aux variations de vitesse qui ont une faible durée, car il faut toujours un certain intervalle de temps avant que la vitesse normale soit rétablie.

En outre, dans certains cas, il peut être avantageux de faire varier la puissance tout en conservant la même vitesse de régime, ce qui ne peut avoir lieu avec un pendule conique. En effet, l'orifice d'admission ayant été réglé pour une certaine vitesse normale, on ne peut augmenter le travail moteur qu'à la condition de faire varier cette vitesse, car, de ce que nous avons trouvé

$$y = \frac{g}{\omega^2},$$

il résulte que g étant constant, y est proportionnelle à ω.

277. Pour remédier à cet inconvénient, on a cherché à faire décrire aux centres des boules une courbe différente d'un arc de cercle, de manière à obtenir, pour différentes positions de la

boule, une longueur de y constante. Or, si dans la figure 101, nous appelons l la longueur de la tige portant la boule et α l'angle de cette tige avec l'axe nous aurons

$$y = l \cos \alpha,$$

l étant la normale à la courbe décrite par le centre de la boule, et y la sous-normale; et comme on sait qu'une des propriétés de la parabole est d'avoir la sous-normale constante, on a été conduit à faire décrire ce genre de courbe aux centres des boules. Cette solution a été réalisée par M. Franke dans le régulateur qui porte son nom, mais il est très-peu employé dans la pratique. On lui préfère la solution approximative de MM. Farcot et fils.

278. Régulateur Farcot. — Dans ce régulateur, on se contente de faire décrire aux centres des boules un arc du cercle osculateur de la parabole ayant la quantité y pour sous-normale. Soit $a'aa'$ (*fig.* 103), cette parabole ; prenons, entre le sommet a et le

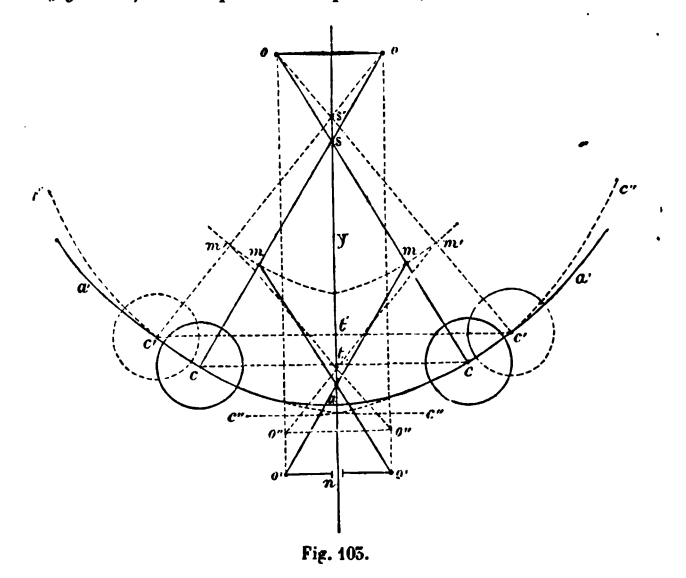


Fig. 103.

point a' correspondant au plus grand écartement de la boule, un point intermédiaire c, et cherchons son centre de courbure. D'après les propriétés de la développée de la parabole, ce point

o se trouve sur la normale au point considéré *c*, et situé de l'autre côté de l'axe. C'est en ce point, relié à l'axe d'une manière invariable, que sont articulés les bras des boules qui, par ce moyen, décrivent un arc du cercle osculateur $c''cc''$. Les bras *oc* se croisent sur l'axe en un point variable *s*, et l'action des boules est transmise au manchon au moyen de deux bielles *mo'* se croisant également sur l'axe, et articulées, d'une part au point *m* des bras des boules, et d'autre part au point *o'* relié au manchon *n*. Pour trouver ce point *o'*, on mène par le point *o* une parallèle à l'axe, et on donne à la bielle *mo'* une longueur telle, que le triangle *omo'* soit isocèle.

Lorsque le centre des boules s'élève, le point de croisement des bielles s'élève aussi, et on voit que pour une nouvelle position *c'* du centre des boules la longueur *y* représentée par *st*, dans la position *c*, devient *s't'* sensiblement égale à *st*, ce qui permet d'élever le manchon d'une quantité assez grande $o'o''$ sans changer la valeur de la force centrifuge. Il résulte de là que la machine pourra, suivant les circonstances, fournir seulement une fraction de la force qu'elle est capable de déployer, tout en conservant la même vitesse de régime.

Cet appareil est aussi connu sous le nom de *régulateur à bras et bielles croisées et à deux centres d'oscillation.*

279. Volants. — Dans les machines à vapeur, la résistance agit tangentiellement à la circonférence d'une poulie ou d'une roue d'engrenage, et la force motrice se transmet au bouton de la manivelle par l'intermédiaire d'une bielle, et si nous faisons abstraction des inclinaisons de celle-ci, la puissance agit parallèlement à la ligne des points morts. Or, pour qu'il y ait toujours équilibre entre la puissance et la résistance, il faudrait que ces forces soient dans toutes les positions de la manivelle, inversement proportionnelles à leur bras de levier, et comme celui de la puissance varie constamment depuis un maximum qui a lieu lorsque la bielle et la manivelle sont à angle droit, jusqu'à devenir nulle lorsque la bielle passe aux points morts, il arrivera toujours que, dans certaines positions, la puissance sera en excès sur la résistance, et le contraire aura lieu dans d'autres positions. Il faut donc qu'un où plusieurs des organes qui constituent la machine, soient capables d'emmagasiner, sous forme de puissance vive,

l'excès de puissance, lorsqu'il se manifeste, pour la restituer ensuite, lorsqu'elle se trouve en défaut.

Dans une machine à vapeur, tous les organes agissent pour accomplir cette action dans la mesure de leurs masses et des vitesses qu'ils reçoivent; mais ces masses sont insuffisantes pour emmagasiner tout l'excès de puissance, sans que leur vitesse varie dans une proportion incompatible avec la bonne exécution d'un travail quelconque.

Il faut ajouter à l'appareil une masse plus ou moins considérable, équilibrée dans toutes ses positions autour d'un axe de rotation et dont l'unique emploi soit d'emmagasiner et de restituer le travail en excès de la puissance, de façon à resserrer les écarts de la vitesse dans des limites convenables et déterminées à l'avance. Cet organe régulateur de la vitesse, qu'on nomme *volant*, se compose généralement d'un anneau ou jante circulaire en fonte, relié à un moyeu par des bras. La forme de la jante peut varier, mais, le plus ordinairement, elle est légèrement bombée, renforcée par des nervures.

280. Calcul du poids des volants. — Lorsqu'il s'agit de trouver le poids à donner à un volant pour maintenir les variations de la vitesse entre deux limites extrêmes qu'on s'impose, et dépendantes de la régularité plus ou moins grande qu'exige le travail à effectuer, on néglige l'action régulatrice de toutes les pièces en mouvement, et même celle des bras du volant lui-même, qui est insignifiante en comparaison de celle de la jante, pour ne s'occuper que de la masse que celle-ci devrait posséder, si elle était la seule modératrice du mouvement.

Supposons que les différents éléments de la jante soient tous animés de la même vitesse, ce qui ne constitue pas une erreur sensible, en prenant pour vitesse commune celle que possède le centre de gravité de la section droite de la jante.

Soient V la vitesse moyenne de la jante, et v et v' les limites minimum et maximum que celle-ci doit atteindre. La puissance vive possédée par la jante marchant à la vitesse maximum v' est $\frac{Pv'^2}{2g}$ et celle correspondant à la vitesse minimum est $\frac{Pv^2}{2g}$; leur différence représente la quantité de travail que le volant doit emmagasiner et restituer à chaque tour, et dont nous apprendrons

à déterminer la valeur. Si nous la désignons pour le moment par T, nous aurons l'égalité :

$$T = \frac{P}{2g}(v'^2 - v^2). \qquad (1)$$

La variation de vitesse $v'-v$ étant toujours connue, nous pouons l'exprimer par la fraction $\frac{1}{n}$ de la vitesse moyenne V, et on a

$$v' - v = \frac{V}{n}.$$

On a aussi

$$v' + v = 2V.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$v'^2 - v^2 = \frac{2V^2}{n}.$$

Remplaçant cette valeur dans l'équation (1), on aura

$$T = \frac{PV^2}{gn},$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{n}{V^2},$$

formule qui donne le poids de la jante du volant pour régulariser la vitesse au degré voulu.

La limite des variations de vitesse que l'on peut laisser se produire sans inconvénient, change avec la nature de l'ouvrage à obtenir. Dans la plupart des cas, il suffit que la plus grande vitesse ne s'écarte pas de la plus petite au delà de 1/25 ; mais dans une filature où le travail exige une vitesse très-régulière, on doit prendre ce rapport égal à 1/40 ou 1/45.

Le volant doit être placé le plus près possible du siége de l'irrégularité. Son application aux machines à vapeur date de 1758, et est due à Fitz-Gérald.

Il y a certaines machines qui paraissent complétement dépourvues de volants, et qui ont cependant une action régulatrice très-grande ; c'est que ces machines elles-mêmes en tiennent lieu, comme par exemple dans les locomotives, où la machine et sa chaudière en font l'office.

281. Quantité de travail emmagasinée par le volant. — Pour déterminer la quantité de travail que le volant doit emmagasiner pour restituer ensuite, et que nous avons désignée par T, nous considérerons deux cas :

282. 1° Manivelle à simple effet. — Soient R (*fig.* 104), le rayon de la manivelle à l'extrémité de laquelle agit la puissance P, et R′ le rayon de la poulie à laquelle on suppose appliquée la résistance constante Q.

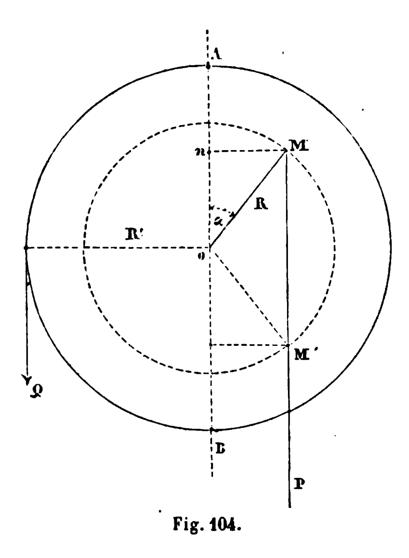


Fig. 104.

La machine étant à simple effet, la puissance P n'agit sur la manivelle que pendant un demi-tour, tandis que la résistance Q s'exerce pendant la révolution entière. Le travail de la puissance pendant ce demi-tour, doit être égal au travail de la résistance pendant le tour entier, pour que la vitesse de la machine soit la même au commencement et à la fin de chaque révolution, c'est-à-dire que l'on doit avoir l'égalité :

$$P \times 2R = Q \times 2\pi R'$$

D'où l'on tire :

$$\frac{PR}{QR'} = \pi.$$

Soit α l'angle AOM que la manivelle fait avec la ligne des points morts, à l'instant où l'équilibre existe entre la puissance et la résistance. Dans le cas qui nous occupe, il y a deux positions symétriques de la manivelle OM et OM′, dans lesquelles cet équilibre existe ; de M en M′, il y a excès de travail moteur sur le travail résistant, emmagasinement de cet excès et augmentation de vitesse ; de M′ en M, c'est le travail résistant qui l'emporte sur le travail moteur, d'une quantité qui doit être précisément égale à l'excès de travail moteur pendant la période précédente, pour

qu'il y ait restitution complète du travail emmagasiné, et une diminution de vitesse égale à l'augmentation précédente.

Le moment de chacun de ces travaux devant être égal, lorsque l'équilibre existe, nous aurons

$$PR \sin \alpha = QR',$$

d'où

$$\frac{QR'}{PR} = \sin \alpha.$$

Or nous avons trouvé précédemment

$$\frac{PR}{QR'} = \pi;$$

par conséquent

$$\sin \alpha = \frac{QR'}{PR} = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3,1416} = 0,31835.$$

Ce sinus correspond à un angle de 18°33'.

L'excès de travail de la puissance sur celui de la résistance a donc lieu pendant une période de

$$180° - 2 \times 18°33' = 142°54' = 8574',$$

et ce travail moteur est évidemment égal à

$$P \times 2no = P \times 2R \cos 18°33' = 0,94805 P \times 2R.$$

Le travail résistant pendant ce même temps est de

$$Q \times 2\pi R' \times \frac{142°54'}{360°} = Q \times 2\pi R' \times \frac{8574'}{21600'} = 0,396940 \times 2\pi R'.$$

Nous avons trouvé plus haut

$$P \times 2R = Q \times 2\pi R';$$

donc, pendant le passage de la manivelle de M en M', la différence entre le travail moteur et le travail résistant est exprimée par

$$T = Q \times 2\pi R' (0,94805 - 0,39694) = 0,551 Q \times 2\pi R', \qquad (1)$$

c'est-à-dire que le travail emmagasiné par le volant doit s'élever aux 0,551 du travail effectif transmis à la manivelle pendant un tour.

Pour rendre cette formule plus applicable dans la pratique, où l'on donne généralement le travail de la machine exprimé en chevaux-vapeur, remplaçons le terme $Q \times 2\pi R'$ par une expression dans laquelle entre la valeur de ce travail. Si nous désignons par n' le nombre de tours de la manivelle par minute, on a

$$N = \frac{2\pi QR' \times n'}{60 \times 75} = \frac{2\pi QR' \times n'}{4500},$$

d'où l'on tire

$$2\pi QR' = \frac{4500N}{n'};$$

et remplaçant dans la formule (1), la valeur de T devient

$$T = \frac{0,551 \times 4500N}{n'}.$$

283. 2° Manivelle à double effet. — La machine étant à double effet, l'action motrice de la bielle s'exerce pendant la révolution entière.

Le travail de la puissance devant être égal à celui de la résistance au bout d'un tour entier, on a, en conservant à la figure 105 la même notation que précédemment :

$$Q \times 2\pi R' = P \times 4R$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{PR}{QR'} = \frac{\pi}{2}$$

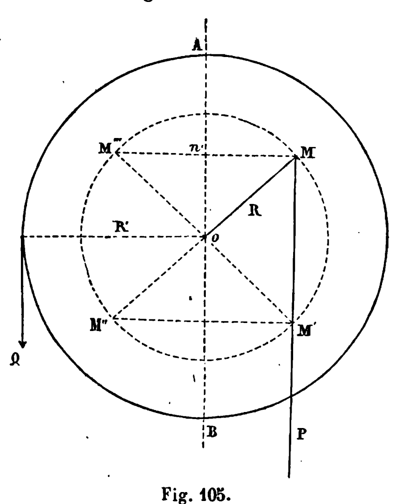


Fig. 105.

Dans ce cas, il y a quatre positions de la manivelle OM, OM′OM″, OM‴ dans lesquelles il y a équilibre entre le travail moteur et le travail résistant ; de M en M′, le premier l'emporte sur le second, et l'inverse a lieu de M′ en M″ ; les deux mêmes circonstances se reproduisent de M″ en M‴, et de M‴ en M.

Si donc, nous représentons par α l'angle AOM, nous pouvons écrire, pour l'une quelconque des positions d'équilibre,

$$PR \sin\alpha = QR',$$

d'où l'on tire

$$\sin\alpha = \frac{QR'}{PR}.$$

Nous avons trouvé précédemment

$$\frac{PR}{QR'} = \frac{\pi}{2};$$

par conséquent

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} = 0,6367.$$

Ce sinus correspond à un angle de 39°33'.

L'excès du travail moteur sur celui de la résistance a donc lieu pendant une période de

$$180° - 2 \times 39°33' = 110°56' = 6054',$$

et le travail de la puissance pendant cette période est de

$$P \times 2n0 = P \times 2R\cos\alpha = P \times 2R\cos 39°33' = 0,77107 \times 2PR.$$

Celui de la résistance pendant le même temps est

$$Q \times 2\pi R' \times \frac{6054'}{21600'} = 0,28028\, Q \times 2\pi R'.$$

Nous avons trouvé, plus haut,

$$Q \times 2\pi R' = P \times 4R;$$

d'où l'on déduit

$$2PR = \frac{Q \times 2\pi R'}{2}.$$

Donc, pendant le passage de la manivelle de la position M à la position M' la différence entre le travail moteur et le travail résistant est exprimée par

$$T = Q \times 2\pi R' \left(\frac{0,77107}{2} - 0,28028\right) = 0,106\, Q \times 2\pi R',$$

c'est-à-dire que le travail emmagasiné par le volant doit s'élever aux 0,106 du travail effectif transmis à la manivelle pendant une révolution.

Si, dans cette formule, nous faisons la même transformation que pour la manivelle à simple effet, nous arrivons à la formule finale.

$$T = \frac{0,116 \times 4500\,N}{n'}.$$

EXERCICES.

I. — Quel est le poids à donner à la jante d'un volant qui doit être placé sur l'arbre d'une machine à vapeur à simple effet d'une force de 12 chevaux-vapeur, le nombre de tours de la manivelle par minute étant de 46, le rayon moyen du volant $2^{m},15$, et le coefficient n de régularité étant supposé égal à 40?

II. — Déterminer, le poids de la jante du volant qui doit être placé sur l'arbre d'une machine à double effet d'une puissance effective de 35 chevaux-vapeur, le nombre de tours de la manivelle par minute étant de 55, le rayon moyen du volant $3^{m},40$, et le coefficient n de régularité étant pris égal à 32.

284. Appareils d'alimentation. — Les appareils d'alimentation ont pour but de renouveler dans la chaudière, l'eau qui a été vaporisée. Les pompes alimentaires qui remplissent cette fonction sont manœuvrées par la machine elle-même, et fournissent au générateur l'eau extraite du condenseur, si la machine est à condensation, ou, dans le cas contraire, celle d'un réservoir ou d'une source.

285. Nous n'entrerons pas dans de longs détails sur les divers systèmes de pompes; nous nous contenterons d'en donner une

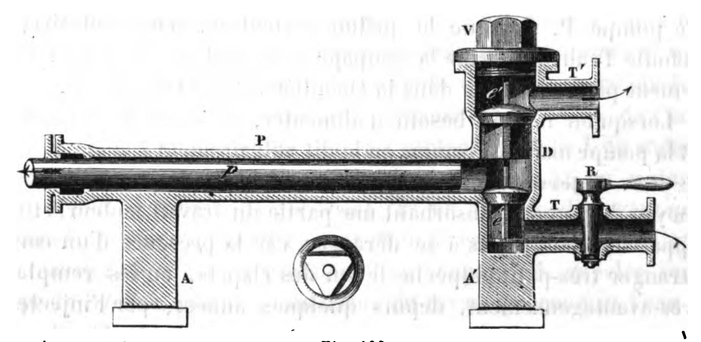


Fig. 106.

des plus simples. La figure 106 représente la coupe longitudinale d'une pompe alimentaire, pour machine horizontale, con-

struite par M. Clair constructeur à Paris, Elle se compose d'un corps de pompe P placé parallèlement au cylindre de la machine, et boulonné sur le bâtis par les supports A et A'. Dans ce corps de pompe se meut un piston plongeur p relié par son extrémité à la tige du piston de la machine, et participant à son mouvement. Il fait corps avec un conduit vertical D muni de deux tubulures T et T' et portant deux clapets, l'un e d'aspiration et l'autre e' de refoulement. Le clapet e repose sur son siége par une partie conique, et afin de le guider dans son mouvement, il est relié à un anneau du diamètre intérieur du tube dans lequel il se meut, par trois petites tiges également espacées sur la circonférence ; en outre, il porte sur sa tête une tige cylindrique qui pénètre, lorsqu'il s'élève, dans un trou percé dans le clapet supérieur. Celui-ci, beaucoup plus lourd que le premier, est guidé de la même manière à sa partie supérieure, mais il diffère par sa partie inférieure ; le guidage a lieu ici par une partie triangulaire pleine représentée à part, vue en plan par-dessous. La tubulure T est munie d'un robinet R. Enfin, pour pouvoir retirer et visiter les clapets, l'appareil porte un bouchon à vis V.

Le jeu de l'appareil est facile à comprendre ; le robinet R étant ouvert, supposons que le piston marche dans le sens de la flèche; il tend à faire le vide derrière lui, et la pression atmosphérique qui s'exerce au dehors sur la surface de l'eau, force le liquide à monter en soulevant le clapet d'aspiration, et remplit le corps de pompe P. Lorsque le piston revient en sens contraire, il refoule l'eau qui ferme la soupape e, et soulève celle de refoulement pour se rendre dans la chaudière par la tubulure T'.

Lorsqu'on n'a pas besoin d'alimenter, on ferme le robinet R et la pompe marche, comme on le dit vulgairement à vide.

286. Injecteur Giffard. — L'alimentation des chaudières au moyen de pompes, absorbant une partie du travail moteur, et ces appareils étant sujets à se déranger, car la présence d'un corps étranger très-petit empêche le jeu des clapets, on les remplace très-avantageusement, depuis quelques années, par l'injecteur automoteur inventé par M. Giffard et construit par M. Flaud.

Cet appareil est fondé sur la propriété que possède la vapeur d'eau, en s'écoulant par un tube de forme convenable, d'aspirer l'eau, et de lui imprimer, en se condensant, une vitesse assez

considérable pour que le mélange ainsi formé puisse s'introduire dans la chaudière, malgré la pression intérieure.

Il se compose d'un cylindre A (*fig.* 107) en fonte ou en bronze, à l'intérieur duquel glisse, à frottement doux, un piston creux B portant une oreille saillante C dans laquelle est maintenue une vis à double filet, qui s'engage dans un écrou D fixé au cylindre.

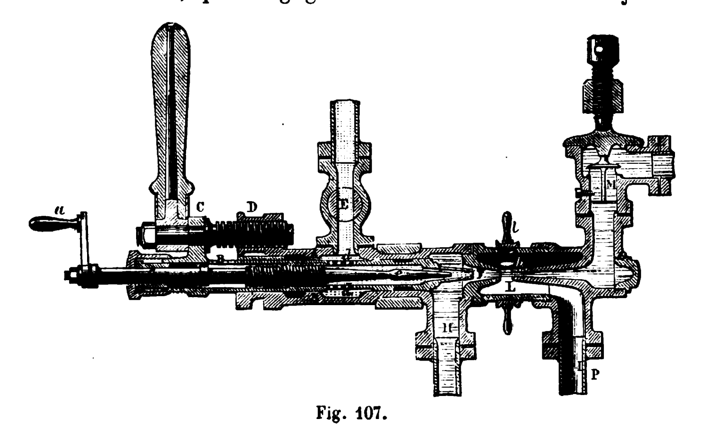


Fig. 107.

Le piston B qui communique avec le tube de prise de vapeur E au moyen de petits orifices *d*, est terminé à l'une de ses extrémités par une partie conique appelée *tuyère*, et qui peut être ouverte plus ou moins au moyen d'une pièce centrale *e* appelée *aiguille*, portant une partie filetée, et manœuvrée à l'extérieur à l'aide de la manivelle *a*. Cette tuyère s'engage dans une cheminée F qui communique avec le tuyau H d'arrivée de l'eau provenant du réservoir d'alimentation. A quelques millimètres en avant de l'orifice de la cheminée s'ouvre, par un ajutage, un tube L de même axe que le premier et composé de deux parties : 1° un ajutage convergent destiné à diriger le jet ; 2° un ajutage divergent qui permet à la veine de perdre, sans choc ni remous, la vitesse qui se transforme ainsi en pression. Une soupape M, appelée soupape de *retenue*, placée à l'intérieur du tuyau qui conduit l'eau à la chaudière, a pour but d'empêcher l'eau de sortir de la chaudière, lorsque l'injecteur ne fonctionne pas. Un tuyau P communiquant avec l'espace annulaire compris entre les ajutages et les parois du cylindre A, sert à livrer passage au liquide en excès au

moment de la mise en train. L'extérieur de la cheminée est une enveloppe percée de trous *h* qui correspondent à volonté à ceux d'une bague munie de deux poignées *l*, et au moyen desquels on peut voir le filet fluide qui ressemble à une tige d'ivoire.

287. L'appareil étant au repos, le robinet E doit être fermé, et l'aiguille presque au fond de la tuyère. Pour mettre l'injecteur en marche, on ouvre complétement le robinet E ; la vapeur traverse les petits orifices *d* et la tuyère par un très-petit conduit, et par suite acquiert une très-grande vitesse; en s'échappant, elle fait le vide dans le tuyau d'aspiration H, et on doit attendre que l'eau soit arrivée, ce qui se reconnaît par le trop-plein. Alors, on ouvre complétement l'aiguille, et pour que l'injecteur fonctionne dans de bonnes conditions, il faut que la section annulaire de passage d'eau comprise entre la tuyère et la cheminée, soit convenablement réglée, car elle doit varier avec la pression de la vapeur et avec la température de l'eau d'alimentation.

Il peut se présenter deux cas ; 1° cette section est trop considérable, ce qui se reconnaît à l'excès d'eau qui sort par le trop-plein ; 2° si la section est trop petite, il n'arrivera pas assez d'eau pour condenser la vapeur, et celle-ci prenant le dessus, refoule l'eau en dehors du tuyau d'aspiration et s'échappe ainsi par le trop-plein. Dans l'un et l'autre cas, il faut agir sur la poignée pour rapprocher ou éloigner la tuyère de la cheminée. On reconnaît aisément que l'injecteur fonctionne à un sifflement particulier qu'il fait entendre.

L'injecteur Giffard tend, de jour en jour, à être le seul appareil d'alimentation ; son emploi sur les locomotives est déjà très-répandu, non-seulement en France, mais encore à l'étranger. Sur ces machines, ils sont au nombre de deux, placés de chaque côté de la chaudière, et à la portée du mécanicien.

Le seul inconvénient connu de cet appareil est de ne pas pouvoir marcher lorsqu'il est alimenté par de l'eau chaude. Il fonctionne d'autant mieux que l'eau qu'on lui fournit est plus froide.

288. Appareils de condensation. — Nous avons dit (**150**) que dans les machines à condensation, la vapeur, après avoir agi dans le cylindre, au lieu de se répandre dans l'atmosphère, se rendait dans une capacité particulière appelée *condenseur*, dont la fonction est de ramener cette vapeur à l'état liquide.

289. La condensation de la vapeur peut s'opérer de deux manières différentes : 1° par l'injection de l'eau froide dans le condenseur proprement dit ; 2° par le contact de la vapeur avec des surfaces refroidissantes. Le premier procédé, imaginé par Watt qui inventa le condenseur que nous ferons connaître en décrivant sa machine, est de beaucoup le plus employé ; aujourd'hui, on a renoncé presque complétement au second système qui présente d'assez notables inconvénients ; il n'est guère employé que dans la marine.

290. Les appareils de condensation se composent essentiellement de trois parties distinctes : 1° le *condenseur* proprement dit, consistant en une capacité ordinairement en fonte fermée hermétiquement, et ne présentant que le nombre d'ouvertures strictement nécessaires afin de ne pas multiplier les joints ; 2° la *pompe à eau* qui fournit l'eau nécessaire à la condensation de la vapeur ; et 3° la *pompe à air* ainsi nommée parce qu'elle extrait du condenseur, en même temps que l'eau et la vapeur condensée, l'air que l'eau tenait en dissolution et qui reprend l'état gazeux sous l'influence de la chaleur.

La tension à l'intérieur du condenseur ne dépasse pas généralement $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{6}$ de la pression atmosphérique, ce qui permet de supprimer la pompe à eau, lorsque la profondeur du niveau de l'eau de condensation, dans le réservoir, ne dépasse pas 4 à 5 mètres. Il suffit, dans ce cas, de faire plonger dans le réservoir un tuyau pénétrant dans le condenseur, pour que la pression atmosphérique y produise une injection continue.

L'eau que la pompe à air extrait du condenseur, est déversée dans un réservoir quelconque, d'où la pompe alimentaire la retire pour entretenir le générateur.

291. Condenseur à axe horizontal. — Le condenseur dont nous donnons la description appartient à une machine à grande vitesse du système Allen.

Lorsque, dans les machines à grande vitesse, on voulait profiter des avantages de la condensation, on rencontrait la grave difficulté de faire donner à la pompe à air un grand nombre de coups de piston, les clapets ne s'y prêtant pas. MM. Withworth et Cie ont résolu le problème dans la machine qu'ils ont exposée en 1867, et sont parvenus à lui faire battre 200 pulsations à la minute, en augmentant le nombre et le diamètre des soupapes

d'aspiration et de refoulement, de manière à obtenir, pour une très-petite levée, de larges sections de passage du liquide.

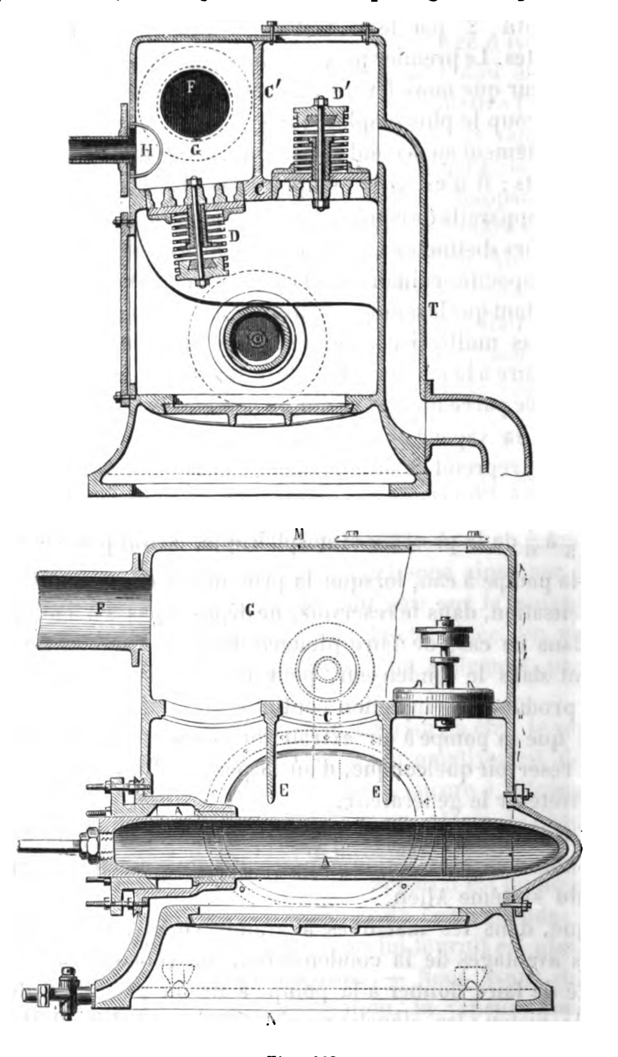


Fig. 108.

292. La figure 108 représente la coupe longitudinale suivant

l'axe du piston, et la coupe suivant la ligne MN, du condenseur qu'ils ont employé. Celui-ci se compose d'une caisse prismatique en fonte, divisée en deux suivant la hauteur par un plafond C. La capacité supérieure est elle-même divisée en deux parties par une cloison. Dans la partie inférieure, qui sert de pompe à air, manœuvre un piston A directement articulé à la tige du piston de la machine.

Ce piston est creux afin que, plongé dans l'eau et perdant une partie de son poids, l'influence du porte-à-faux ne se fasse pas sentir sur la garniture du presse-étoupes; il est terminé par une partie conique destiné à faciliter son passage à travers la masse d'eau qui remplit la pompe à air. Le plafond C est percé de six larges orifices destinés à recevoir le siége des soupapes D et D′ munies chacune d'un ressort, afin d'assurer leur fermeture. Deux nervures EE consolident ce plafond et descendent jusqu'au piston A, dans le but de diviser la chambre inférieure en trois compartiments ayant chacun une soupape d'aspiration et une de refoulement correspondante. Ces cloisons guident les oscillations du liquide, en même temps qu'elles en empêchent le mouvement de translation que produirait le piston. La vapeur arrive par F dans la chambre à condensation G où l'eau d'injection est projetée en pluie fine, par une pomme d'arrosoir hémisphérique H; trois clapets d'aspiration D écoulent l'eau vers la pompe à air, et trois autres D′ de refoulement, la conduisent dans le second compartiment supérieur, d'où elle est retirée par la pompe alimentaire.

Une partie de la cloison C′ a été enlevée dans la coupe longitudinale afin de faire voir l'extérieur d'une des soupapes, dégagée de son ressort.

293. Poids d'eau à injecter. — Proposons-nous de déterminer le poids Q d'eau froide à injecter pour condenser un poids q de vapeur d'eau.

Soient t la température de l'eau d'injection, qui varie de 0° à 30° suivant la saison, T celle de la vapeur à son entrée dans le condenseur, et t' celle du mélange résultant de la condensation.

D'après les expériences de M. Regnault, le nombre de calories contenues dans 1 kilogramme de vapeur à T degrés est de :

$$606,5 + 0,305\,T$$

Le poids q de vapeur en passant de sa température T à celle t', perd un nombre de calories exprimé par

$$q(606,5 + 0,305\,T - t').$$

L'eau injectée, qui est à la température t, absorbe en passant à la température t', une quantité de chaleur égale à

$$Q\,(t' - t).$$

Or, la quantité de chaleur cédée par la vapeur devant être égale à celle gagnée par l'eau, on a l'égalité :

$$Q\,(t' - t) = q\,(606,5 + 0,305\,T - t');$$

d'où l'on tire

$$Q = \frac{q(606,5 + 0,305\,T - t')}{t' - t}.$$

Telle est la formule qui donne le poids d'eau à injecter.

EXERCICES.

I. — Déterminer le poids d'eau à 15° qu'il faut injecter dans le condenseur d'une machine à vapeur pour condenser 12 kil. 725 de vapeur d'eau à 135°, la température du mélange devant être égale à 37°.

II. — Quel est le poids de vapeur qu'il faut condenser dans une capacité contenant 586 kil. d'eau à 16°, pour que la température du mélange soit de 35°.

III. — Le nombre de kilogrammes d'eau froide nécessaire pour condenser 8 kil. 5 de vapeur à 146° étant de 320, et la température du mélange 35°, on demande quelle était la température de l'eau d'injection.

§ 5. — DIVERS SYSTÈMES DE MACHINES A VAPEUR

294. En nous plaçant au point de vue de leur destination, nous avons classé les machines à vapeur en trois classes : 1° machines de manufacture, 2° machines locomotives et 3° machines marines. Dans chacune de ces catégories, la disposition et le mode de construction varient avec chaque constructeur, nous n'entrerons pas dans les détails de forme, et nous décrirons seulement les types principaux et les plus employés.

1° Machines de manufacture.

295. Machine de Watt. — Cette machine, représentée en élévation par la figure 109, et en coupe à une plus grande échelle par la figure 110, afin de voir le mécanisme intérieur, est la plus an-

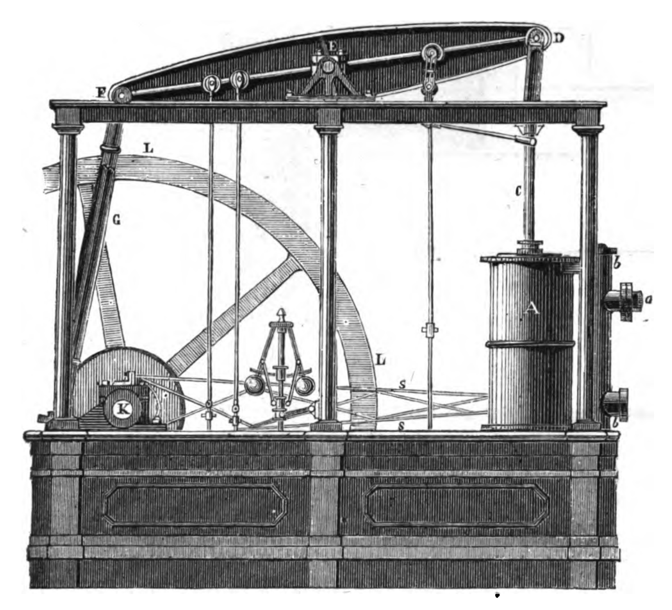


Fig. 109.

cienne des machines industrielles. La tige C du piston est reliée, à l'aide d'un parallélogramme articulé, à l'extrémité D d'un balancier DF mobile autour de son milieu E. Le mouvement circulaire alternatif de celui-ci, est transformé en circulaire continu de l'arbre moteur K, au moyen d'une bielle G et d'une manivelle HK. Un volant L sert à régulariser la marche de la machine et à faciliter le passage de la manivelle aux points morts. Le tiroir est mû par un excentrique *ss*, et il a la forme d'un tuyau renflé à ses deux extrémités et muni de garnitures comme un piston.

Dans la position indiquée par la figure, les deux garnitures *c* sont au-dessus des lumières; la lumière supérieure reçoit la vapeur,

qui arrive du générateur par *a* et remplit l'espace annulaire *b*, tandis que la lumière inférieure communique, par le conduit *d*,

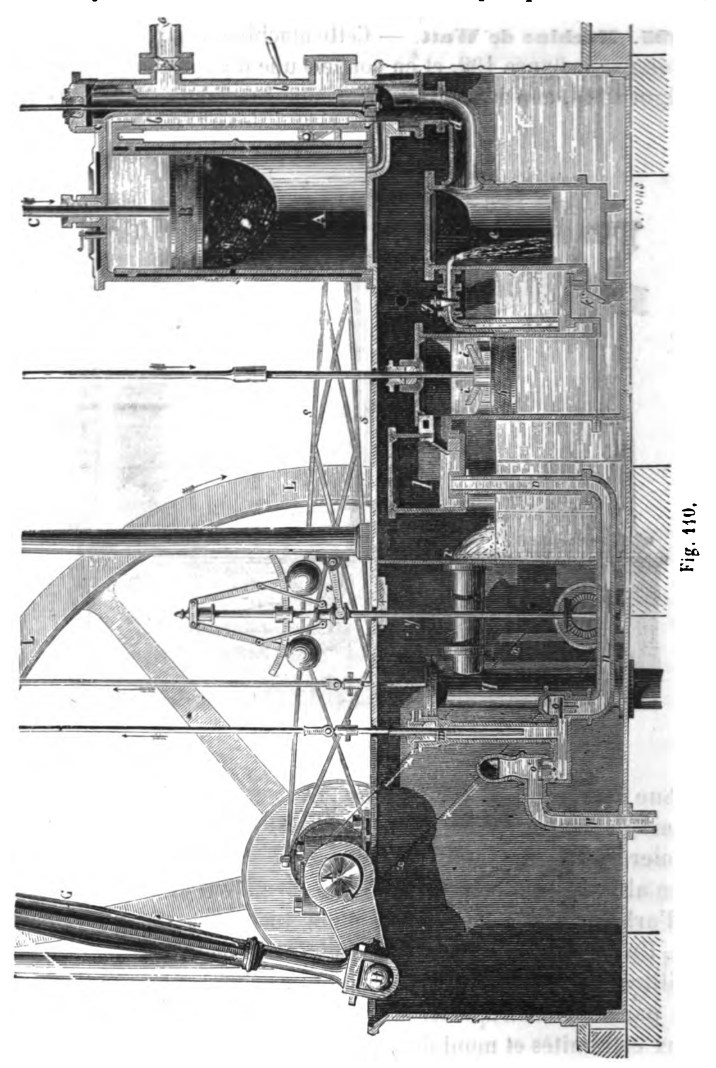


Fig. 110.

avec le condenseur *e*. Celui-ci, situé au-dessous du cylindre A, se compose d'un récipient placé au milieu d'une bâche que la pompe

à eau *q* maintient toujours pleine. Il communique, par une ouverture munie d'une soupape *k*, avec la pompe à air, dont le piston *h* porte deux clapets *i* s'ouvrant de bas en haut, et qui extrait l'eau du condenseur pour le déverser dans une capacité *l* d'où la pompe alimentaire *m* en retire la quantité nécessaire pour la conduire à la chaudière. Les trois pompes sont manœuvrées par des tiges reliées au balancier. Enfin, un régulateur à force centrifuge sert, comme nous l'avons dit (**271**), à remédier aux variations imprévues de la vitesse, en agissant sur une valve placée à l'intérieur du tuyau d'arrivée de la vapeur *a*. Ce régulateur est mis en mouvement au moyen de deux engrenages coniques, dont l'un reçoit le mouvement de la machine elle-même à l'aide d'une corde sans fin.

296. Les machines de Watt, d'un aspect monumental, sont peu employées en France ; l'exécution est très-coûteuse et très-délicate ; elles exigent des fondations solides et on ne peut donner au piston une grande vitesse. Ces machines sont d'une conduite facile, et leur mouvement est très-doux et très-uniforme ; mais elles consomment de 5 à 6 kilogrammes de combustible par force de cheval et par heure ; elles ne fournissent que les 0,45 à 0,50 du travail moteur.

297. **Machines de Woolf.**— Nous avons déjà fait connaître (**259**) le principe des machines à deux cylindres, imaginées dans le but de réduire au minimum les irrégularités périodiques de la vapeur sur le piston au commencement et à la fin de chaque course, irrégularités d'autant plus marquées que la période de détente est plus longue. Dans ces récepteurs, la vapeur qui a agi à pleine pression dans le petit cylindre, se rend dans le grand cylindre où elle agit par détente, en produisant un accroissement de travail moteur sans occasionner une nouvelle dépense de vapeur et par suite de combustible. Le degré de détente se trouve alors marqué par le rapport des volumes des deux cylindres, qui, en pratique, est ordinairement pris égal à 1/4 ou 1/5.

Il ne faudrait pas croire, en comparant les machines de Woolf et celles à un seul cylindre, qu'il y ait un avantage pour les premières en ce qui concerne la détente produite dans un vase séparé. Leur supériorité sur ces dernières consiste dans une grande régularité de marche ; en effet, le travail pour une course peut

être considéré comme l'action combinée de deux efforts, dont l'un est constant s'il n'y a pas détente dans le petit cylindre, et dont l'autre diminue graduellement dès le commencement de la course du grand piston. Ainsi, la somme des efforts transmis aux deux pistons pendant une course varie moins que l'effort exercé sur un piston unique, lorsque le travail de la pleine pression et celui de la détente s'accomplissent dans un seul cylindre; cette action combinée tend à rapprocher l'effort initial de l'effort moyen, et à donner une vitesse très-régulière.

298. La disposition de ces machines nécessite un conduit au moyen duquel la vapeur puisse, en le traversant, passer de l'une des extrémités du petit cylindre à l'extrémité opposée du grand, et ce conduit doit avoir les dimensions strictement nécessaires, tout en donnant un libre passage à la vapeur. Lorsque le petit piston a terminé sa course dans un sens, la vapeur, en sortant du petit cylindre, se détend et remplit ce passage avant d'arriver au grand ; il peut donc arriver, si le conduit est un peu large, qu'il y ait une perte de pression, et il est nécessaire de réduire cette perte au minimum; il ne faudrait pas non plus donner une section trop petite, car alors il y aurait étranglement de la vapeur.

299. Les machines de Woolf sont à moyenne pression et à condensation. La forme généralement adoptée est celle des machines à balancier, et un même parallélogramme conduit les tiges des deux pistons, soit que le plan passant par l'axe des cylindres soit perpendiculaire à celui du balancier, soit qu'il se confonde avec celui-ci. Dans ce dernier cas, comme le parallélogramme contient toujours deux points à mouvement rectiligne, la tige du grand piston est articulée à celui de ces points le plus éloigné du centre d'oscillation, et celle du petit piston au second de ces points. Alors, la course du petit piston est plus petite que l'autre, et le petit cylindre a aussi moins de longueur que le grand.

Quelquefois, les cylindres sont placés l'un au-dessus de l'autre; mais cette disposition est moins employée que la précédente.

300. Les machines de Woolf sont celles qui réunissent les meilleures conditions d'une marche régulière et économique en combustible; aussi sont-elles très-employées dans les filatures et les tissages, où elles sont en grande faveur, malgré leur prix plus élevé et leur plus grand nombre de pièces en mouvement.

Ces machines consomment de 1 kilogramme et 1/2 à 2 kilogrammes de combustible par force de cheval et par heure.

301. Machines verticales à traction directe.— Les machines à balancier étant des appareils fort compliqués et tenant beaucoup de place, on a cherché à transmettre à l'arbre moteur le mouvement de piston par le seul intermédiaire d'une bielle et d'une manivelle. Ces machines construites de bien des manières différentes, sont ordinairement à haute pression, à détente et sans condensation.

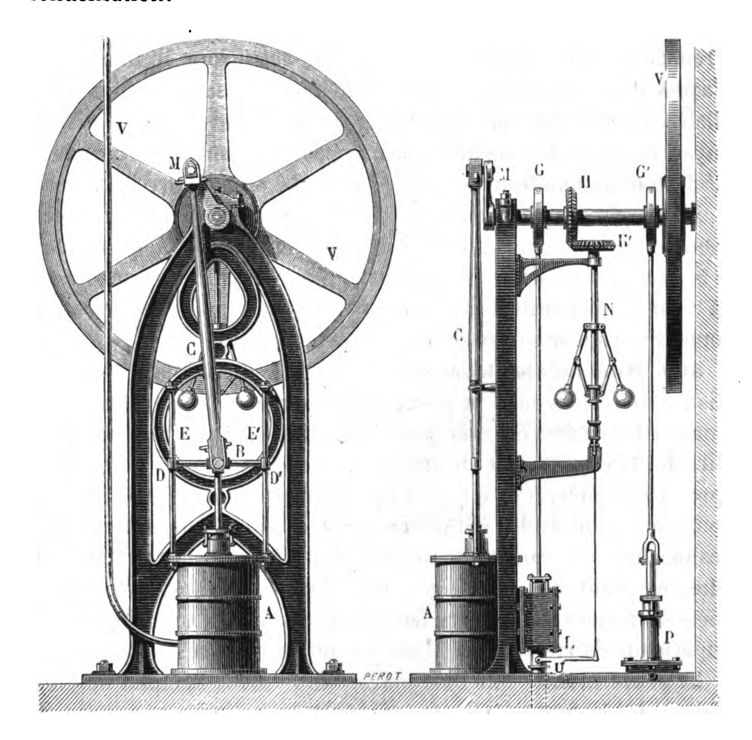


Fig. 111.

Le type représenté par la fig. 111 est remarquable par sa simplicité. Le cylindre A est placé verticalement à la partie inférieure et boulonné sur une plaque de fondation. La tête B de la tige du piston, articulée à l'extrémité de la bielle en fer C, est guidée par

une traverse DD′ terminée par deux douilles glissant sur deux tiges verticales EE′ fixées, d'une part sur le couvercle du cylindre, et de l'autre au bâti vertical de la machine. La bielle est articulée, par son autre extrémité, au bouton de la manivelle M, et le mouvement rectiligne alternatif du piston, se trouve ainsi transformé en circulaire continu de l'arbre moteur portant le volant V.

Cet arbre porte en outre : 1° un excentrique circulaire G destiné à faire mouvoir le tiroir qui est à recouvrement, tel que nous l'avons décrit (**250**), et par conséquent à détente fixe ; 2° un engrenage conique H engrenant avec une autre roue H′ montée sur l'axe N d'un régulateur à force centrifuge agissant par l'intermédiaire d'une tringle et d'un levier L, sur la valve placée dans le tuyau de prise de vapeur U ; 3° un second excentrique circulaire G′ destiné au fonctionnement de la pompe alimentaire P.

La marche de la machine est facile à comprendre, elle n'affecte rien de particulier. Ces machines consomment en moyenne de 4 à 5 kilogrammes de combustible par force de cheval et par heure, et rendent disponible environ les 0,35 du travail que pourrait fournir la vapeur sortant du générateur.

302. Machines horizontales. — Ces machines, dont le caractère distinctif réside dans la position horizontale du cylindre, comportent les mêmes organes que les machines verticales à traction directe. Occupant peu de hauteur, elles offrent plus de stabilité que ces dernières, et on peut donner une grande vitesse aux pistons sans craindre les ébranlements et les vibrations ; aussi, toutes les machines à grande vitesse sont des machines horizontales. De plus, exigeant des fondations moins considérables, et toutes les pièces en mouvement étant facilement visitables, on comprend la supériorité de ces machines sur les autres systèmes.

La seule crainte que l'on pouvait avoir dans l'emploi des machines horizontales était l'ovalisation du cylindre par suite du poids du piston qui produit un excès de pression sur la partie inférieure ; mais cette déformation est moins rapide qu'on ne l'avait supposé, et M. Farcot, qui le premier avait conçu l'ingénieuse idée d'équilibrer le piston, y a complétement renoncé.

Les machines horizontales sont celles qui sont le plus généralement employées aujourd'hui ; elles figuraient en grand nombre

à l'exposition universelle de 1867, présentant une grande variété, quant à la forme.

303. La figure 112 représente l'élévation d'une machine horizon-

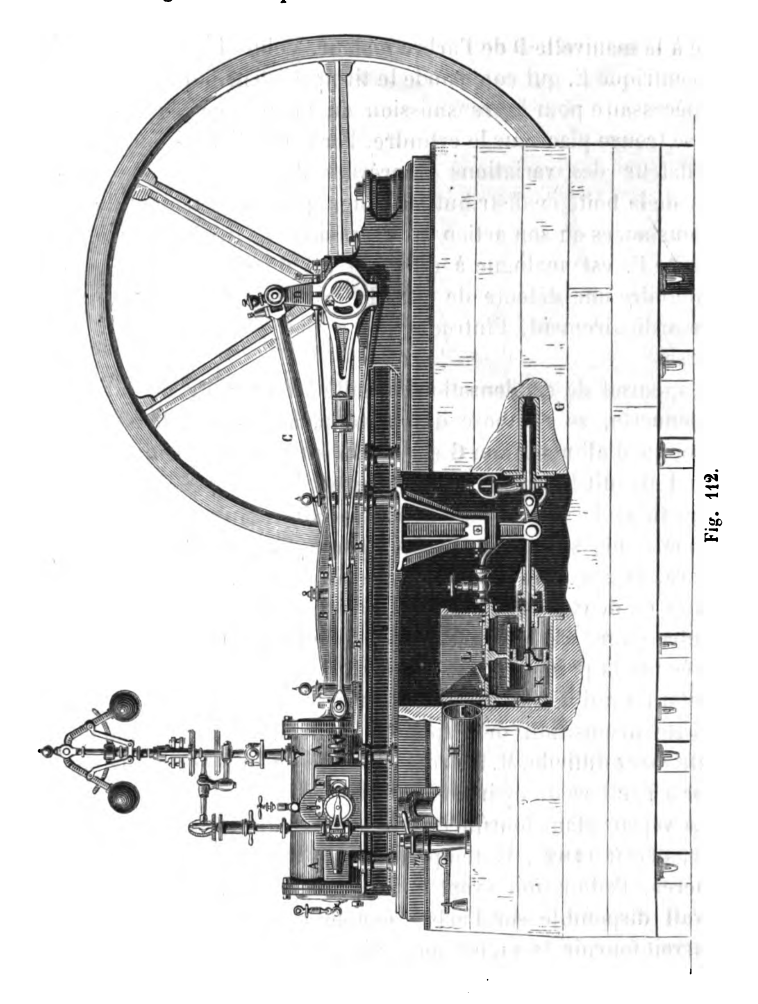


Fig. 112.

tale de 60 chevaux, à détente variable et à condensation, construite dans les ateliers de M. Farcot. Le cylindre A, qui est à enveloppe de vapeur, est solidement fixé sur le bâti en fonte, coulé d'une

seule pièce, qui repose sur un massif en maçonnerie auquel il est relié au moyen de boulons. La tête du piston, guidée dans son mouvement rectiligne alternatif par les glissières BB, reçoit l'une des extrémités de la bielle C, dont l'autre extrémité s'articule à la manivelle D de l'arbre moteur. Celui-ci reçoit le volant, l'excentrique E, qui commande le tiroir de distribution, et la poulie nécessaire pour la transmission du mouvement au régulateur qui se trouve placé sur le cylindre. Par cette disposition, l'organe régulateur des variations imprévues de la vitesse se trouve près de la boîte de distribution et agit plus directement dans les circonstances où son action est nécessaire. Le tiroir, enfermé dans la boîte F, est analogue à celui qui est décrit (**256**); il permet d'atteindre une détente de 1/20 de la course du piston; mais le plus ordinairement, l'introduction a lieu pendant le 1/15 de la course.

L'appareil de condensation, installé à l'intérieur du massif en maçonnerie, se compose d'une pompe à air à double effet K, de la pompe d'alimentation G et du condenseur cylindrique H dans lequel aboutit le tuyau d'échappement de la vapeur et où se fait l'injection. Le piston de la pompe alimentaire et celui de la pompe à air, sont manœuvrés simultanément par un balancier qui reçoit son mouvement du piston moteur. La pompe à air K, divisée en deux compartiments par une cloison verticale, est surmontée d'une capacité I dans laquelle l'eau du condenseur y est élevée par la pompe à air, et ensuite reprise par la pompe d'alimentation qui la conduit à la chaudière.

Cette disposition de l'appareil de condensation rendant sa visite assez difficile, M. Farcot l'a remplacée en reportant la pompe à air à l'arrière du cylindre.

La vapeur étant fournie par un générateur du même constructeur, décrit (**187**), la température de la vapeur étant 5 atmosphères, l'admission ayant lieu pendant le 1/15 de la course, le travail disponible sur l'arbre moteur est les 0,78 de celui que pourrait fournir la vapeur au sortir du générateur.

304. Machines oscillantes. — Afin de rendre encore plus simple la construction des machines à vapeur, on a eu l'idée de relier directement la tige B du piston (*fig.* 113), au bouton de la manivelle, sans l'intermédiaire de la bielle. Il fallut alors que l'extré-

mité de la tige du piston pût suivre le bouton de la manivelle dans son mouvement circulaire, et par suite rendre le cylindre A mobile; on fit osciller celui-ci autour d'un axe horizontal en le supportant par deux tourillons creux diamétralement opposés, analogues à ceux d'une pièce d'artillerie. Ces deux tourillons étant les deux seules parties du cylindre qui ne se déplacent pas, on fut forcé d'opérer par là l'admission et l'échappement de la vapeur. La distribution s'effectue par des tiroirs ordinairement très-compliqués et sujets à se déranger.

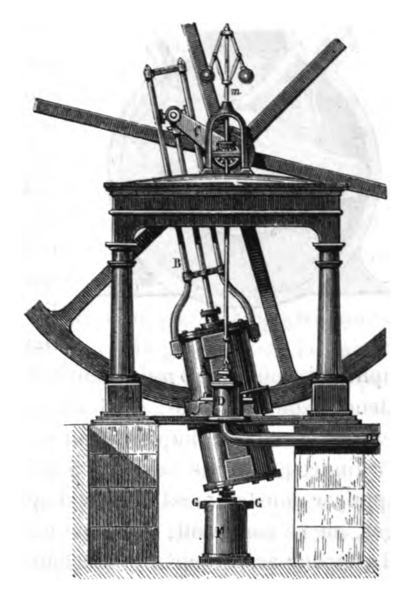


Fig. 113.

Les machines oscillantes, imaginées par Mauby en 1817, et importées en France par M. Cavé qui leur a fait subir de notables perfectionnements, reproduisent, dans leur ensemble, la même disposition que les machines verticales à traction directe. Elles ont été très-employées pendant un certain temps à cause de leur simplicité; mais elles exigent beaucoup de soin et de fini dans la construction; la tige du piston éprouve des efforts de flexion très-considérables, ce qui force de la faire mouvoir entre deux guides F et F′ solidement reliés au cylindre; en outre, les passages tortueux que la vapeur est obligée de suivre pour se rendre du générateur sous le piston, diminuent la puissance motrice, et les tourillons, qui éprouvent une grande fatigue, s'usent rapidement. Ces machines, que l'on ne peut guère employer que pour de petites forces, sont presque complétement abandonnées aujourd'hui.

305. Machines rotatives. — Avant de terminer ce rapide exposé

sur les machines fixes, nous allons dire quelques mots sur les machines rotatives dont le principe a été donné par Watt en 1782.

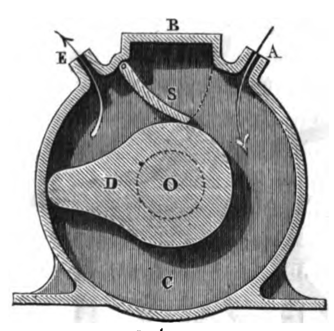


Fig. 114.

Elles ont été imaginées pour éviter la perte de travail absorbé par les intermédiaires nécessaires à la transformation du mouvement rectiligne alternatif en circulaire continu. La figure 114 représente la coupe transversale du cylindre d'une de ces machines. Sur l'arbre moteur qui pénètre à l'intérieur du cylindre C et forme lui-même la tige du piston, est monté un diaphragme ou came D qui, occupant toute la hauteur du cylindre, s'étend jusqu'à la paroi; c'est sur cette came que la vapeur vient exercer son action et imprimer un mouvement de rotation à l'axe O. Le cylindre porte une soupape S qu'un ressort à boudin force à s'appuyer constamment sur le diaphragme, et qui peut venir se loger, en se soulevant, dans une cavité pratiquée à cet effet.

La vapeur arrive par A et fait tourner, dans le sens de la flèche, la came D; lorsque celle-ci vient rencontrer la valve S, elle la soulève, et alors l'action du volant lui fait dépasser l'orifice d'admission, pour que la vapeur puisse agir de nouveau. La vapeur, après avoir agi, s'échappe par l'orifice E.

Ces machines sont très-peu employées; leur principal inconvénient, c'est que, le piston étant animé d'un mouvement uniforme, la vapeur n'a pas le temps de s'échapper et la contre-pression est très-considérable; en outre, à égalité de puissance, elles dépensent plus de vapeur que les machines à mouvement alternatif.

306. Locomobiles. — On donne le nom de *locomobile* à une machine à vapeur montée sur un chariot, et que l'on peut transporter d'un endroit à un autre pour y exécuter un travail mécanique. Elle se distingue des machines examinées précédemment, en ce que la chaudière ne fait qu'un seul ensemble avec les organes de la machine.

Les locomobiles rendent de très-grands services, surtout dans

les travaux d'agriculture, où elles tendent à remplacer les forces motrices animales qui agissent d'une manière moins régulière et qui sont aussi d'un prix de revient plus considérable. Pendant un certain temps, plusieurs objections ont été émises contre l'emploi de la vapeur, dans les exploitations rurales, pour la conduite de la machine ; mais tout bien considéré, le fonctionnement en est si simple, que cette conduite n'est pas plus difficile que celle des animaux.

Ces machines devant être mises en œuvre par des personnes peu expérimentées, on a dû les réduire aux éléments les plus indispensables, de façon à ne présenter aucune complication, et à être facilement démontées.

La locomobile fut importée d'Amérique par les Anglais qui en firent un grand usage ; la France ne tarda pas à suivre la voie du progrès, et depuis quelques années, ces machines se sont répandues partout, produisant des résultats très-avantageux sous le rapport de l'économie. Leur force moyenne normale est d'environ 5 à 6 chevaux ; quant à celles d'une force plus considérable, elles ne trouvent d'emploi que dans les grandes exploitations où les besoins de l'industrie se joignent à ceux de la culture. Elles servent, en agriculture, à faire mouvoir les machines à battre le grain, les hache-paille, les concasseurs, les coupe-racines, etc. On s'en sert aussi pour les travaux d'épuisement, pour faire mouvoir des scieries, des appareils à faire le mortier, des sonnettes à enfoncer les pieux ; en un mot, elles tendent de plus en plus à se substituer au travail de l'homme ; elles n'exigent aucune fondation, aucune construction accessoire ; elles arrivent toutes montées au point où leur action est nécessaire, et transmettent immédiatement la force motrice.

Les locomobiles sont toutes construites d'après le même principe, à part quelques modifications de détails apportées par les constructeurs ; elles sont à haute pression et sans condensation pour les rendre plus simples, et on opère l'échappement par la cheminée.

307. La figure 115 représente un des types construits par M. Calla, dont la réputation est européenne, et qui en a déjà livré plus de 1200, depuis 3 jusqu'à 25 chevaux, pour l'agriculture et pour l'industrie. La chaudière est tubulaire, analogue à celles des loco-

motives : A est la boîte à combustion, BB' la partie cylindrique contenant les tubes ; le nombre de ceux-ci est plus petit que dans les locomotives ; ils sont plus courts et leur diamètre est plus

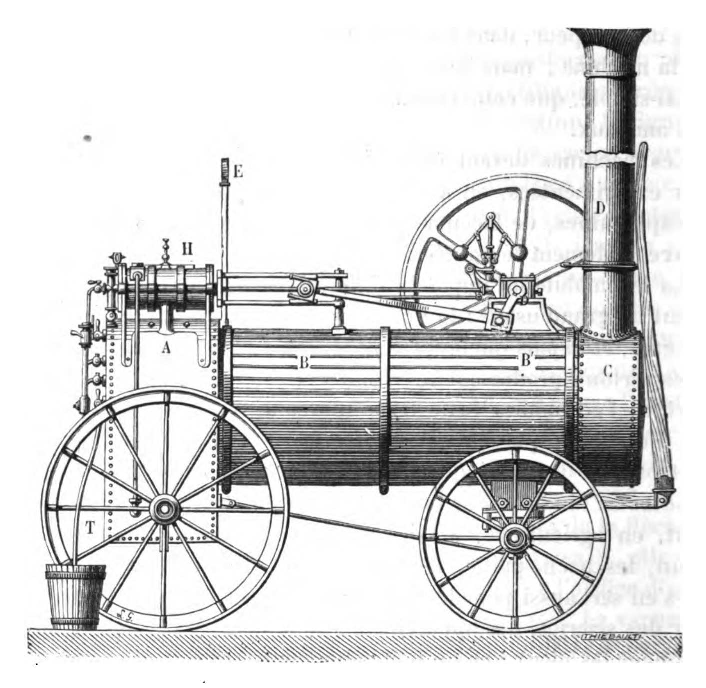


Fig. 115.

grand pour faciliter le nettoyage. C'est la boîte à fumée où se rendent les gaz avant de traverser la cheminée D qui se compose de deux parties : l'une fixe, l'autre mobile qui vient s'abattre sur un support E fixé à la partie supérieure de la chaudière ; par cette disposition, le transport en est plus facile et la machine occupe moins de place au repos. Le cylindre H est fixé horizontalement sur la boite à combustion, et le mouvement rectiligne alternatif du piston est transformé, par l'intermédiaire d'une bielle et d'une manivelle, en un mouvement de rotation continu de l'arbre moteur muni d'un volant faisant office de poulie, sur laquelle on adapte la courroie. Un régulateur à boules et à force centrifuge

agit sur la valve pour régulariser la marche de la machine: sur l'axe O est calé un excentrique qui fait mouvoir le tiroir de distribution, qui est à recouvrement. La pompe alimentaire, aspirant l'eau par le tuyau T, est placée à côté et parallèlement au cylindre, et la tige de son piston plongeur est articulée à la tête de la tige du piston de la machine.

Le générateur est muni de tous les appareils de sûreté exigés par la loi, manomètre, niveau d'eau et soupapes de sûreté.

Ces machines sont à mouvement rapide, afin d'être plus légères; elles consomment de 3 à 5 kilogrammes de combustible par force de cheval et par heure. Tout l'appareil est porté par quatre roues et l'avant-train, qui est mobile autour d'une cheville ouvrière, est muni de deux limons auxquels on peut atteler un cheval.

308. MM. Thomas et Laurens ont eu récemment l'idée de renfermer la locomobile dans un wagon afin d'abriter la machine et préserver les organes de l'oxydation.

2° Machines locomotives.

309. Historique. — On appelle *locomotive* une machine à haute pression munie de son générateur et portée sur un chariot qu'elle fait mouvoir; elle sert à remorquer, avec une grande vitesse, les convois sur les chemins de fer.

L'invention des locomotives et celle des machines à vapeur ont eu le même point de départ : celui de faciliter l'exploitation des mines. C'est le Northumberland et le pays de Galles qui ont servi de berceau à l'industrie des chemins de fer.

310. Le premier essai d'une voiture à vapeur remonte à l'année 1769; imaginée par Cugnot, ingénieur français, elle fut expérimentée en présence de Choiseul, ministre de Louis XV, et du général Gribeauval. Cette machine, fonctionnant sans condensation, avait sur une route ordinaire, une vitesse de 4 kilomètres à l'heure et se dirigeait très-difficilement; on la voit encore de nos jours au Conservatoire des arts et métiers. La capacité trop petite de la chaudière et la formation lente de la vapeur, firent échouer cette première tentative.

311. C'est en 1802 que l'on vit, pour la première fois, une loco-

motive remorquant quelques wagons ; construite par Trewittrich et Vivian en Angleterre, elle fonctionna sur le chemin de fer de Merthyr-Tydwill, dans le pays de Galles, traînant un poids de 10 tonnes avec une vitesse de 8 kilomètres à l'heure. On croyait alors que l'adhérence, sur des rails unis, n'était pas suffisante pour empêcher le glissement des roues ; cette grave erreur fit que, pendant plusieurs années, aucune modification importante ne fut apportée dans la construction des locomotives.

212. En 1811, Blenkinsop crut réaliser un progrès en plaçant au milieu d'une machine à deux cylindres, une roue dentée engrenant avec une crémaillère disposée tout le long et au centre de la voie. En 1812, Chapman remplaça la crémaillère par une chaîne sans fin tendue parallèlement aux rails. En 1813, un ingénieur, Brunton, remplaça la chaîne sans fin par des espèces de jambes mobiles mues par le moteur et qui faisaient avancer la voiture. A la même époque, Blackets, après des expériences faites sur le chemin de fer de Wylam, reconnut enfin que si le poids de la machine est assez considérable, ses roues ne glissent pas sur la surface unie du rail. L'année suivante, en 1814, Georges Stephenson et Dodd construisirent une locomotive dans laquelle ils augmentèrent l'adhérence en reliant les trois paires de roues par une chaîne sans fin, et en 1825, Hackworth remplaça cette chaîne par une bielle d'accouplement. Enfin, on substitua aux rails en fonte qui s'écrasaient sous de fortes charges, les rails en fer beaucoup plus résistants. Cet état de choses dura jusqu'en 1829, époque à laquelle Marc Séguin, par l'invention des chaudières tubulaires, résolut le problème de la locomotion à vapeur ; on obtint, au lieu d'une vitesse de 6 kilomètres à l'heure, une vitesse inespérée de 30 kilomètres.

213. Le 20 octobre 1829 eut lieu en Angleterre l'événement qui décida la création des voies ferrées. Afin de faciliter le transport des marchandises de Liverpool à Manchester, qui s'effectuait dans un temps très-long, au moyen de machines fixes, les directeurs du chemin de fer se décidèrent à employer les locomotives, et, à cet effet, ils ouvrirent un concours public où devait être couronnée la machine la plus parfaite ; la locomotive de MM. Stephenson, la Fusée, remporta le prix. Elle obtint la supériorité par l'emploi d'une chaudière tubulaire et celui du jet de vapeur pour

activer le tirage ; elle remorquait un poids de 13 tonnes avec une vitesse de 24 kilomètres à l'heure et, transportant trente-six voyageurs, elle atteignait la vitesse de 40 kilomètres.

Depuis cette époque, les locomotives, étudiées avec soin par un grand nombre d'ingénieurs et de constructeurs, ont subi de nombreuses améliorations tendant à accroître leur puissance.

314. Détermination de la vitesse des locomotives. — En admettant que l'adhérence des roues sur les rails soit suffisante pour que celles-ci tournent sans glisser, à chaque coup double donné par la machine, l'essieu moteur fera un tour, et le train avancera d'une quantité égale à la longueur de la circonférence des roues motrices. Si nous supposons, comme cela a lieu dans les locomotives à grande vitesse, que le diamètre des roues motrices soit de $1^m,75$, et que la machine donne trois coups doubles par seconde, l'espace parcouru pendant ce temps sera

$$\pi \times 1,75 \times 3 = 16^m49,$$

et pendant une heure, il sera de

$$16^m49 \times 3600 = 60 \text{ kilomètres environ.}$$

315. Calcul de la traction et force des locomotives. — La force motrice de la vapeur ne peut se transmettre à un train que par l'adhérence des roues motrices de la locomotive sur les rails. Cette adhérence, qui limite seule la puissance de traction d'une locomotive, se compose de deux éléments bien distincts : 1° de la pression exercée par les roues motrices sur les rails ; 2° du coefficient de frottement. La première dépend du poids de la machine, ce qui a conduit à leur donner l'énorme poids de 40 à 60 tonnes qu'elles ont aujourd'hui. Il faut remarquer, en outre, que la pression exercée sur les roues motrices dépend aussi de la position de l'essieu moteur ; plus il sera rapproché de la verticale passant par le centre de gravité, plus cette pression sera considérable, car il supportera une plus grande portion du poids total de la locomotive. Dans les locomotives destinées au service des marchandises, on augmente la pression sur les rails en reliant les roues motrices aux autres paires de roues à l'aide de *bielles d'accouplement ;* si toutes les roues qui supportent la locomotive sont ainsi rendues solidaires les unes des autres, la pression sur les

rails sera égale au poids total de la machine. Lorsque, au contraire, la locomotive est construite en vue d'obtenir une grande vitesse, on place l'essieu moteur à l'arrière de la machine, et on augmente le diamètre des roues motrices.

Le coefficient de frottement est égal au $\frac{1}{6}$ du poids supporté par les roues motrices lorsque les rails sont secs, et il peut descendre à $\frac{1}{20}$ dans les temps humides. Pour éviter cet inconvénient, les locomotives sont munies de trémies, appelées ***sabliers***, qui répandent au besoin du sable fin sur les rails, en avant des roues motrices.

Supposons que le poids supporté par l'essieu moteur d'une locomotive soit de dix tonnes; sa puissance de traction sera de $\frac{10}{6}$ de tonne, et, comme sur les voies ferrées le rapport du tirage à la charge est de $\frac{5}{1000}$ (**25**), elle pourra remorquer un train de

$$\frac{10}{6} \times \frac{1000}{5} = 334 \text{ tonnes environ.}$$

Si on appliquait à cette locomotive une résistance supérieure à celle que nous venons de trouver, les roues tourneraient sur place en glissant sur les rails; on dit alors que la machine *patine*.

316. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la voie était horizontale et rectiligne et la vitesse modérée; lorsque ces conditions ne sont pas réalisées, de nouvelles résistances se développent et la puissance de traction diminue. Si, par exemple, le chemin devient incliné, l'action de la pesanteur se dédouble en deux composantes, l'une perpendiculaire à la voie, qui produit la pression sur les rails, l'autre parallèle au chemin parcouru, qui tend à faire reculer le véhicule. On voit donc que l'adhérence diminue en même temps qu'il se développe une nouvelle résistance que le moteur doit vaincre. C'est ainsi que, sur une pente de 4 millimètres, imperceptible à l'œil nu, la résistance totale est double de celle qui se manifeste en plaine, et qui est due uniquement au frottement.

317. Lorsque le chemin présente des courbes, la force centrifuge vient augmenter les résistances, car elle tend à éloigner le train du centre de la courbe; les rebords des roues sont appliqués avec force contre les rails extérieurs, d'où il résulte un frottement

énorme, outre la fatigue et l'usure du matériel. Cette résistance n'est pas le seul inconvénient des courbes ; il se développe encore d'autres frottements provenant du mode de construction des wagons. Les roues, étant calées aux extrémités des essieux, sont forcées de faire le même nombre de tours dans le même temps. Or, dans une courbe, la roue extérieure parcourant un arc d'un plus grand rayon, doit avoir une vitesse plus grande que la roue intérieure, ce qui les oblige à glisser, l'une en avant et l'autre en arrière, en même temps qu'elles tournent. De plus, les essieux étant parallèles, ils tendent, dans les courbes, à converger vers le centre ; ils s'appuient fortement contre les boîtes à graisse, ce qui augmente encore les frottements.

318. Enfin, lorsque la vitesse vient à augmenter, la résistance de l'air devient très-considérable ; elle s'accroît dans une proportion telle, qu'à une vitesse de 60 à 70 kilomètres, elle s'élève au double de ce qu'elle est à une vitesse modérée.

La supériorité des chemins de fer sur les transports effectués sur les routes ordinaires, réside non-seulement dans la vitesse, mais dans l'économie des frais de traction qu'elle amène. Le rapport du tirage à la charge est extrêmement diminué, à la condition toutefois d'éviter les fortes rampes et les courbes de trop petit rayon.

319. On conçoit facilement, par ce qui précède, que les locomotives sont de très-puissants appareils à vapeur. Les différentes résistances que nous avons énumérées et surtout l'influence de la vitesse sur la résistance opposée par l'air, font qu'à une vitesse de 60 kilomètres, une locomotive doit exercer un effort d'environ 9 kilogrammes par tonne à remorquer. En outre, le moteur doit se traîner lui-même, avec sa provision d'eau et de combustible ; il développe, pour cela, un effort qui varie de 500 à 1400 kilogrammes, suivant le poids et le type de locomotives. Considérons une machine à voyageurs, transportant 12 wagons pesant 80 tonnes, avec une vitesse de 60 kilomètres à l'heure. En admettant un effort de 600 kilogrammes pour le transport du moteur, la force de traction totale transmise aux roues motrices devra être égale à

$$(80 \times 9) + 600 = 1320 \text{ kilogrammes.}$$

Et le travail moteur par seconde

$$\frac{1320 \times 60000}{3600} = 22000 \text{ kilogrammètres,}$$

ce qui exige, pour la locomotive, une force de

$$\frac{22000}{75} = 294 \text{ chevaux-vapeur environ.}$$

320. Locomotive Stephenson. — La figure 116 représente une coupe longitudinale de la locomotive Stephenson, qui a été employée pendant un temps assez long sur tous les chemins de fer.

Elle se compose, comme toutes les locomotives, de trois parties bien distinctes : 1° l'appareil de production de la vapeur ou *chaudière ;* 2° le moteur qui se compose de deux machines accouplées; 3° le chariot qui supporte tout l'ensemble, et dont certaines roues, appelées *roues motrices*, reçoivent leur mouvement des machines.

321. Chaudière. — Le générateur qui est toujours tubulaire, se compose, comme nous l'avons vu (**198**), de trois parties : la boîte à feu, qui est en avant, comprend le foyer F et son enveloppe; celle-ci est surmontée d'une partie D, en forme de cloche, appelée *dôme de vapeur ;* G est le corps cylindrique contenant les tubes ou la chaudière proprement dite, et K est la boîte à fumée où se réunissent les gaz et où s'embranche la cheminée.

Afin de protéger la chaudière contre tout refroidissement extérieur, on l'entoure d'une chemise composée de douves de sapin assemblées à rainures, et on recouvre cette chemise d'une enveloppe de feuilles de laiton de 1 millimètre d'épaisseur.

Outre l'avantage que possèdent les locomotives de produire une énorme quantité de vapeur, elles jouissent de la propriété d'être à peu près inexplosibles, car les tubes offrant une résistance beaucoup moins grande que celle des parois de la chaudière, ils éclateront les premiers si un excès de pression vient à se produire. L'eau, qui est alors projetée dans le foyer, diminue l'action du feu, et il suffit de boucher les tubes crevés avec un tampon en bois, et l'on continue à marcher jusqu'à l'arrivée du train.

La chaudière est en outre munie de tous les appareils de sûreté, comme les générateurs fixes.

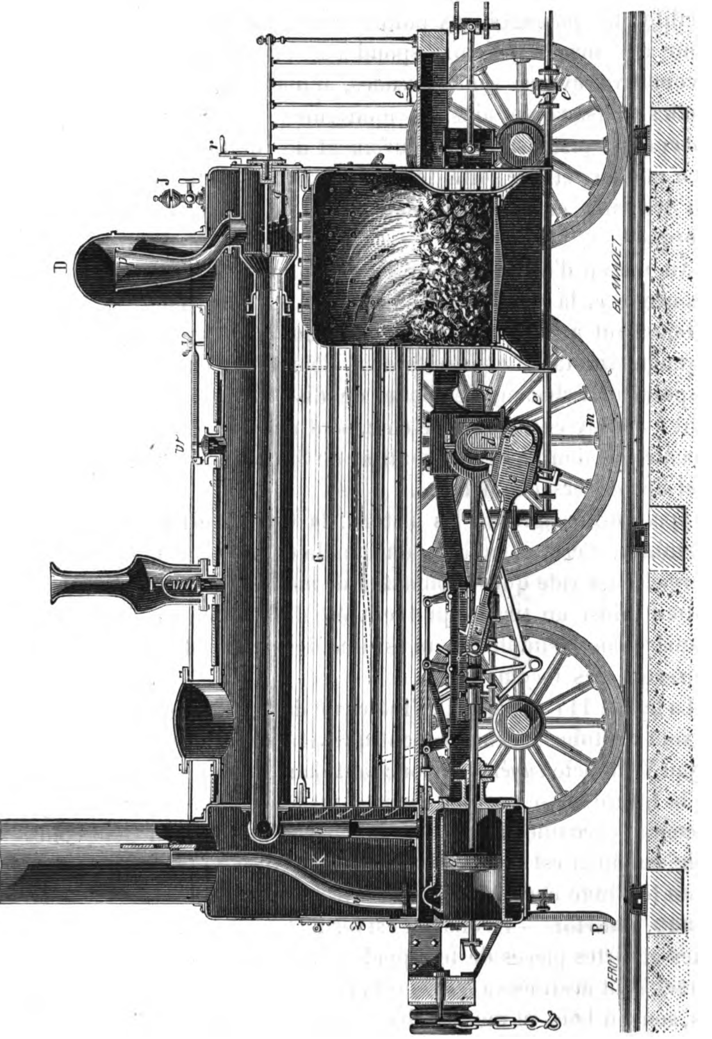


Fig. 116.

322. Machines. — Deux cylindres *a* sont disposés horizontalement, chacun d'un côté, au-dessous de la boite à fumée. Les tiges

des pistons, guidées par les glissières *b*, s'articulent avec des bielles *cc'* et elles agissent sur l'essieu des roues du milieu, qui est deux fois coudé à angle droit; cette disposition a l'avantage de faciliter les passages aux points morts, car l'effort maximum de l'une des manivelles correspond à un effort nul de l'autre, et la locomotive avance sans saccades, d'une manière continue. Les bielles transforment ainsi le mouvement rectiligne alternatif de chacun des pistons en un mouvement de rotation continu de l'essieu moteur, et par suite des roues qui, en vertu de l'adhérence sur les rails, entraînent la machine et le convoi qu'elle doit remorquer.

Au moyen d'un régulateur à papillon qui se manœuvre par la manivelle *r*, la vapeur qui s'introduit par l'extrémité du tube *p*, débouchant à la partie supérieure du dôme, s'engage dans un tuyau horizontal *s*, et ensuite dans deux tubes latéraux *u* qui correspondent à chacune des boites de distribution. Les tiroirs, qui sont à recouvrement et à détente, sont manœuvrés chacun par un excentrique double et une coulisse de Stephenson (**282**), qui permet de renverser la marche.

Après avoir agi sur les pistons, la vapeur est lancée dans la cheminée. Cette injection continuelle de la vapeur produit derrière elle un vide qui se communique au foyer par les tubes, et on obtient ainsi un tirage qu'il eût été difficile de produire d'une manière aussi simple, et qui est une des principales causes de la puissance des locomotives.

La figure 117 représente l'intérieur de la boîte à fumée; *a* et *a'* sont les tubes d'échappement qui viennent se réunir en un seul tuyau V, appelé *tuyère*, débouchant dans la cheminée T. L'orifice de la tuyère laisse écouler environ un kilogramme de vapeur par seconde, avec une vitesse d'au moins 600 mètres; on peut concevoir combien est rapide la sortie des gaz et de la fumée, et par suite le tirage énergique que l'on peut obtenir.

323. Chariot. — Le chariot est formé latéralement par deux longues et fortes pièces de fer appelées *longerons*, et plusieurs traverses sont destinées à les réunir; celles qui sont aux deux extrémités, sont en bois, et munies chacune de deux tampons de choc. Ce cadre, qui sert à supporter toute la machine, repose par l'intermédiaire de ressorts de suspension en acier fondu, sur les es-

sieux des roues, maintenus dans des cavités pratiquées dans de fortes pièces en fer appelées *plaques de garde.*

En avant de la machine se trouvent deux barres en fer P appelées *chasse-pierres*, destinées à écarter les obstacles qui pourraient se trouver sur la voie.

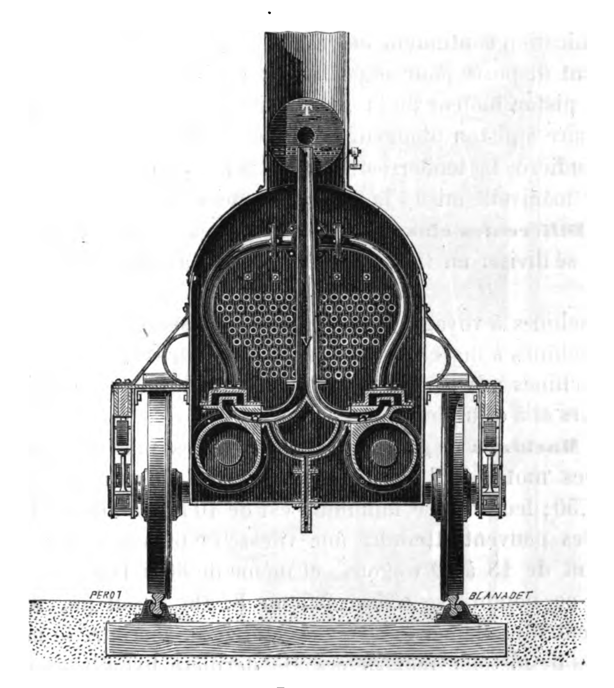


Fig. 117.

Dans les locomotives Stephenson, les cylindres se trouvant au-dessous de la chaudière, l'essieu moteur doit être doublement coudé; il offre alors peu de sécurité et est d'une construction difficile. Pour éviter cet inconvénient on a placé, dans d'autres types, le cylindre de chaque côté, un peu en dehors, et les bielles s'articulent directement aux roues motrices, dont un des rayons fait office de manivelle.

324. Un accessoire indispensable à la locomotive, c'est une voiture qu'on nomme *tender*, placée immédiatement après elle, et

qui contient l'eau, le combustible, et les outils nécessaires pour les besoins du mécanicien.

Le combustible se trouve au milieu, et est entouré d'une caisse à eau dont les parois sont en tôle, et qui peut contenir de 6000 à 8000 litres d'eau, afin de ne pas être obligé de la remplir trop souvent. Les tuyaux de raccordement nécessaires pour opérer la communication continuelle entre le réservoir et la pompe alimentaire, sont disposés pour se prêter aux oscillations de la machine. Chaque piston moteur de la locomotive fait mouvoir une pompe alimentaire à piston plongeur, destinée à fournir l'eau nécessaire à la chaudière. Le tender est toujours muni d'un frein manœuvré par une manivelle mise à la portée du mécanicien.

325. Différentes classes de locomotives. — Les locomotives peuvent se diviser en trois classes, suivant la nature de leur service.

1° Machines à voyageurs ou à grande vitesse ;

2° Machines à marchandises ou à petite vitesse ;

3° Machines mixtes qui peuvent être employées au service des voyageurs et à celui des marchandises.

326. Machines à grande vitesse. — Ces machines portent des roues motrices d'un diamètre qui varie depuis $1^m,70$ jusqu'à $2^m,30$; leur vitesse minimum est de 40 kilomètres à l'heure ; mais elles peuvent atteindre une vitesse de 60 kilomètres en remorquant de 15 à 20 wagons, et même de 80 à 100 kilomètres, lorsque ce nombre se réduit à 7 ou 8. On aurait pu, au lieu d'augmenter le diamètre des roues motrices, accroître le nombre de coups de piston ; mais dans cette dernière hypothèse, l'usure du cylindre et des organes serait très-rapide, ce qui est un grave inconvénient.

Le type le plus tranché de cette classe, représenté par la figure 118, a été imaginé par Crampton en 1849 ; ces locomotives font le service des trains express sur les lignes du Nord, de l'Est et de Lyon. Les roues motrices, placées à l'arrière, permettent d'abaisser la boîte à feu, ce qui leur donne, par l'abaissement du centre de gravité, une grande stabilité. La position de l'essieu moteur diminue, il est vrai, la puissance de traction puisqu'il ne supporte qu'une faible portion du poids de la machine ; mais le but qu'on s'est proposé, c'est-à-dire d'obtenir une grande vitesse, est com-

plétement rempli. Les cylindres, qui sont horizontaux, sont placés vers le milieu de la chaudière, et les tiroirs, ainsi que les boîtes

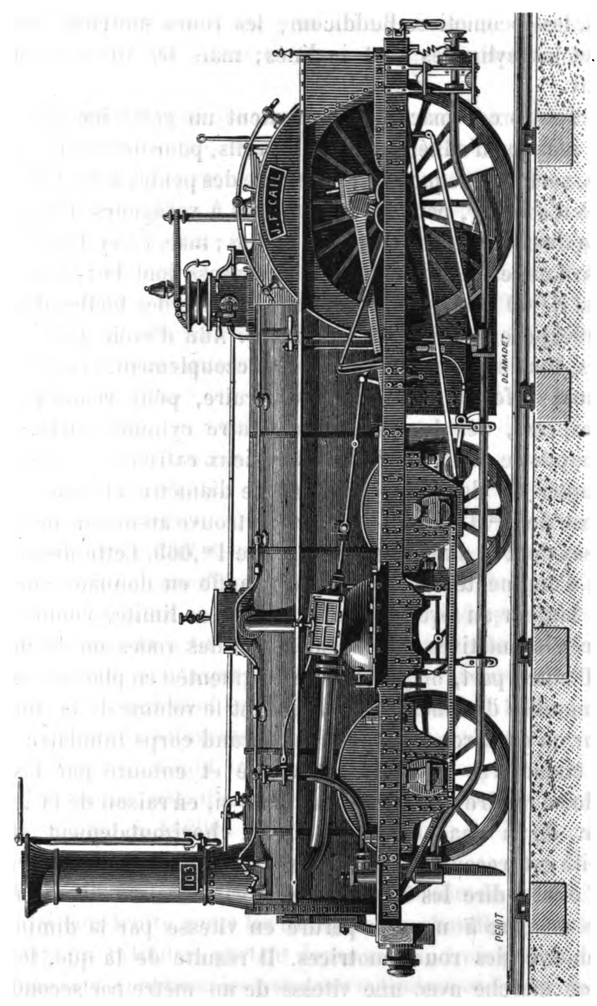


Fig. 118.

de distribution, sont légèrement inclinés; tout le mécanisme étant situé à l'extérieur, la visite en est très-facile.

Ces machines consomment de 7 à 8 kilogrammes de combustible par kilomètre.

En Angleterre, on emploie principalement, pour les grandes vitesses, les locomotives Buddicom; les roues motrices sont au milieu et les cylindres sont inclinés; mais les tiroirs sont horizontaux.

327. Toutes ces machines présentent un grave inconvénient; c'est le manque d'adhérence, sur les rails, pour des trains un peu chargés, surtout lorsque la voie présente des pentes assez fortes. On a essayé d'adopter, pour les locomotives à voyageurs, l'accouplement de deux des essieux par des bielles; mais ce système a aussi un désavantage, car, pour les trains express dont la vitesse minimum est de 60 kilomètres à l'heure, le poids des bielles d'accouplement expose ces pièces à se rompre. Afin d'avoir deux essieux moteurs, tout en évitant les bielles d'accouplement, la compagnie du chemin de fer du Nord a fait construire, pour remorquer les trains express, des locomotives à quatre cylindres actionnant, par groupes de deux, chacun des essieux extrêmes. Ces essieux sont montés sur des roues de $1^{m},60$ de diamètre et leur écartement est de $5^{m},17$. La chaudière se trouve au-dessus des roues porteuses dont le diamètre n'est que de $1^{m},065$. Cette disposition permet d'augmenter la surface de chauffe en donnant une plus grande largeur au foyer qui ne se trouve pas limité, comme dans les autres locomotives, par l'écartement des roues ou des longerons. D'autre part, on l'a encore augmentée en plaçant un plus grand nombre de tubes et en diminuant le volume de la chambre à vapeur qu'on a reportée dans un second corps tubulaire placé sur la chaudière, et qui est traversé et entouré par les gaz avant de se rendre à la cheminée. Celle-ci, en raison de la grande hauteur de la machine, est placée horizontalement et son extrémité est recourbée. On a donné aux pistons une course de $0^{m},34$, c'est-à-dire les 3/5 environ de celle des machines Crampton, de manière à ne rien perdre en vitesse par la diminution du diamètre des roues motrices. Il résulte de là que, lorsque le piston marche avec une vitesse de un mètre par seconde, la circonférence de la roue possède une vitesse de $7^{m},39$, tandis que, pour les locomotives Crampton, cette vitesse n'est que de 6 mètres.

Les deux distributions de vapeur sont commandées par le même levier de changement de marche, de sorte que les deux groupes de cylindres marchent avec la même détente.

Outre les avantages d'une plus grande force de traction, cette machine en présente d'autres que nous citerons en considérant la marche des locomotives.

328. Machines à petite vitesse. — Les machines à marchandises ou à petite vitesse nécessitent, pour remorquer des convois dont le poids est très-considérable, des roues d'un plus petit diamètre et des cylindres d'une plus grande dimension. Tout y étant combiné en vue d'obtenir une énorme puissance de traction, on augmente la surface de chauffe, et on réunit les roues motrices aux autres roues au moyen de bielles d'accouplement, afin d'augmenter l'adhérence. Le diamètre des roues varie entre 1^m,10 et 1^m,20, et la vitesse ne dépasse guère 30 kilomètres à l'heure.

Une des machines les plus puissantes, c'est la locomotive Engerth, imaginée en 1825, et qui a fonctionné d'abord sur les chemins de fer autrichiens. Son poids est de 63 tonnes ; elle porte trois où quatre paires de roues couplées, et son tender deux paires de roues libres. Celui-ci, quoique ne faisant pas corps avec la machine, y est cependant disposé de manière à supporter une partie du poids de la chaudière et la boîte à feu. Il y est réuni au moyen d'un boulon spécial qui lui permet de passer dans des courbes d'un assez petit rayon. Avec une vitesse de 30 kilomètres à l'heure, elle remorque, sur des pentes de 0^m,005, jusqu'à quarante-cinq wagons chargés chacun de 10 tonnes. Elle consomme, par kilomètre, 16 kilogrammes de houille en été et jusqu'à 18 en hiver ; la vapeur atteint une tension de 8 atmosphères, et la surface de chauffe est d'environ 200 mètres carrés ; leur prix d'achat s'élève à 110000 francs. Sur la ligne du Nord, elle sert pour le transport des houilles.

329. M. Petiet, ingénieur en chef du chemin de fer du Nord, a fait aussi construire, pour les trains de marchandises, des locomotives à quatre cylindres portant douze roues ; trois paires de roues couplées sont commandées par deux cylindres et les trois autres paires sont commandées par les deux autres cylindres. L'écartement des essieux extrêmes est de 6 mètres et celui des essieux moteurs est de 3^m, 70. Les fusées permettent aux essieux extrêmes

un jeu de $0^m,03$ de manière à faciliter, en perdant leur parallélisme, le passage dans les petites courbes. Cette machine parcourt, sans difficulté, des courbes de 200 mètres de rayon.

Le générateur présente la même disposition que celui des locomotives à quatre cylindres, pour les grandes vitesses, et il est aussi placé sur les roues qui ont $1^m,065$ de diamètre. La vapeur a une tension absolue de 7 atmosphères et la surface de chauffe est de 215 mètres carrés environ. Une sablière est placée sur la cheminée et distribue le sable pour les deux sens de la marche. Ces locomotives, avec leur tender et les approvisionnements complets d'eau et de charbon, pèsent 56 tonnes. Quoique plus légères que les locomotives Engerth, elles sont plus puissantes que ces dernières, car elles ont une adhérence résultant de six essieux chargés de 54000 kilogrammes en moyenne, au lieu de celle que donnent quatre essieux chargés de 40000 kilogrammes environ.

330. Machines mixtes. — Ces machines, affectées spécialement à un service mixte, tiennent à la fois des deux types précédents ; elles doivent remorquer de vingt à ving-cinq wagons avec une vitesse de 35 à 50 kilomètres à l'heure. Mais, plus ordinairement, elles sont montées sur six roues dont deux paires de roues sont accouplées ; leur diamètre est généralement de $1^m,50$.

331. On distingue encore les machines dites *machines-tender*, qui font le service sur le chemin de fer de ceinture et de banlieue. Le tender est complètement supprimé ; des caisses placées sur la machine, servent à contenir l'eau et le charbon. Ces machines ont été étudiées particulièrement par M. Buddicom ; elles portent un frein puissant qui permet d'arrêter la machine dans un temps très-court.

332. Marche des locomotives. — Indépendamment de leur mouvement principal de progression, les locomotives en marche sont assujetties à d'autres mouvements anormaux, dus principalement aux irrégularités de la voie et au mouvement de certaines pièces qui déplacent à chaque instant le centre de gravité de la masse entière.

Ces mouvements désordonnés et nuisibles sont au nombre de quatre : 1° le mouvement de *roulis ;* 2° le mouvement de *galop ;* 3° le mouvement de *tangage ;* 4° le mouvement de *lacet.*

333. Le mouvement de *roulis* est un mouvement oscillatoire au-

tour d'un axe parallèle à la voie. La cause principale de ce mouvement provient des irrégularités de la voie ; en effet : si les rails fléchissent inégalement, les réactions auxquelles ils donnent lieu sont obliques par rapport au plan longitudinal de symétrie, et la machine s'incline, tantôt à droite, tantôt à gauche, oscillations que favorisent encore les ressorts de suspension.

Ce mouvement n'a qu'une importance très-secondaire et s'annule presque complétement par un bon entretien de la voie et en donnant une rigidité convenable aux ressorts de suspension.

334. Le mouvement de *galop* est un mouvement d'oscillation autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la voie. Il provient encore des irrégularités de la voie et surtout de l'inclinaison des cylindres et de l'insuffisance de la charge supportée par les essieux extrêmes ; on le réduit à des proportions inoffensives en plaçant les cylindres horizontalement, en donnant aux ressorts de suspension une certaine rigidité et en répartissant convenablement la charge sur les différents essieux.

335. Le mouvement de *tangage* n'est autre chose qu'une série d'oscillations d'avant en arrière et d'arrière en avant, produites par les réactions qu'exerce la vapeur sur les bases de chaque cylindre, et par les forces qui naissent de l'inertie des masses des pièces animées d'un mouvement alternatif. Cette perturbation ayant lieu dans le sens de la voie, ne compromet pas la sûreté de la marche.

336. Enfin, le mouvement de *lacet*, le plus grave de tous, et celui qu'il convient surtout de resserrer dans d'étroites limites, est un mouvement d'oscillation autour d'un axe vertical passant par le centre de gravité de la machine et qui, en se combinant avec le mouvement normal de translation, fait avancer la locomotive en serpentant, ce qui nuit fortement à la voie et peut amener des déraillements.

Ce mouvement, qui se propage dans toute l'étendue du train, résulte du manque de symétrie dans le déplacement des pièces mobiles situées de chaque côté de la machine ; les pistons actionnant des manivelles calées à angle droit, lorsque l'un des mécanismes (manivelle, bielle, piston, etc.) marche en avant, l'autre marche en arrière, ce qui tend à faire osciller la machine autour

de la verticale passant par le centre de gravité. Cet effet ne se produirait pas si les mouvements des deux mécanismes concordaient, ou bien si on contre-balançait chaque pièce mobile par une autre pièce se mouvant en sens contraire. On est arrivé à ce résultat en appliquant aux roues motrices des *contre-poids* en fonte, placés à l'opposé du bouton de la manivelle. Ces contre-poids prennent, pendant la marche, un mouvement opposé à celui du mécanisme, et s'ils n'annulent pas les mouvements de tangage et de lacet, du moins ils les atténuent d'une manière considérable et suffisante pour assurer la sécurité de la marche.

337. La disposition adoptée par la Compagnie des chemins de fer du Nord, dans les machines à quatre cylindres, tend à faire disparaître presque complétement les mouvements de tangage et de lacet, car, de chaque côté de la machine, lorsqu'un piston, avec ses accessoires, marche en avant, un autre mécanisme exactement semblable, marche en arrière avec une vitesse égale. L'action de chacun des mécanismes est ainsi contre-balancée par une autre action égale et directement opposée.

3° Machines marines et bateaux à vapeur.

338. Historique. — Avant de parler des machines marines, nous croyons convenable de donner quelques notions historiques sur la navigation à vapeur.

La première idée de la navigation à vapeur est due au célèbre médecin Papin qui avait aussi trouvé le véritable principe de la machine à vapeur. En 1695, il fit construire, en Allemagne, un bateau d'une assez grande dimension, qui fonctionna avec succès sur la Fulda ; en 1707, il résolut de se transporter sur son bateau en Angleterre, et il s'embarqua à Cassel ; arrivé à Münden, dans le Hanovre, les bateliers lui refusèrent l'entrée du Weser, et en réponse à ses plaintes, ils eurent la brutalité de lui mettre son bateau en pièces. Au mois de juin 1776, le marquis de Jouffroy lançait, à Beaume-les-Dames, un bateau à vapeur qui progressa dans les eaux du Doubs ; il fit encore construire à Lyon, en 1780, un bateau de 46 mètres de long, qu'il expérimenta au mois de juillet 1783, sur la Saône, devant un grand nombre de spectateurs. Une expérience aussi décisive aurait dû attirer l'attention ; mais

les événements politiques d'alors absorbaient tous les esprits. Née en France, la navigation à vapeur nous est revenue d'Amérique. En 1788, Patrick Miller, James Taylor et William Lymington, imaginèrent un petit bateau qui fut essayé sur le lac de Dalwinston ; mais la machine fonctionna mal, les roues à aubes se brisèrent et cette tentative n'eut pas de succès.

C'est à Robert Fulton, ingénieur américain né à Little-Britain, petite ville de Pensylvanie, qu'appartient la gloire d'avoir véritablement créé la navigation à vapeur. En 1802, de concert avec Robert Livingston, il fit construire un bateau de 33 mètres de long, qui remonta la Seine avec une vitesse d'une lieue et demie à l'heure. Mais, n'ayant pas trouvé en Europe les encouragements que méritait sa grande découverte, il retourna dans sa patrie, et le 10 août 1807, il lança à New-York, *le Clermont*, grand bateau à vapeur muni d'une machine de 18 chevaux, avec lequel il accomplit la traversée de cette ville à Albany. Le succès obtenu par ce bateau décida l'adoption de la navigation à vapeur aux États-Unis.

En Europe, un Écossais, Henri Bell, frappé des résultats auxquels on était parvenu en Amérique, construisit en 1812 un paquebot, *la Comète*, qui navigua sur la Clyde et fut destiné au transport des voyageurs de Glascow à Helensburg.

A mesure que la navigation à vapeur prenait une plus grande extension et qu'elle était adoptée sur mer, des progrès notables se manifestaient dans la construction des bateaux, auxquels on donnait une forme plus appropriée au nouveau genre de navigation.

La France, retardée par la révolution, ne tarda pas à se mettre au niveau de l'Amérique et de l'Angleterre, et peu de temps après, la marine militaire employait la vapeur, avec avantage, sur presque tous ses bâtiments.

339. Machines marines. — Tous les différents types de machines que nous avons étudiées, sont employées dans la marine.

Dans les machines à balancier, les premières qui furent employées à la navigation, le cylindre peut être droit ou renversé, c'est-à-dire que la tige du piston peut sortir du cylindre par la partie supérieure ou par la partie inférieure, et on dispose le

balancier à la partie inférieure, pour abaisser autant que possible le centre de gravité.

Dans les machines à transmission directe et oscillantes, le cylindre peut aussi être vertical, horizontal ou incliné, droit ou renversé. On choisit le type et la disposition de la machine d'après le genre de propulseur, les dimensions du navire et sa destination. Cependant, les machines les plus généralement employées aujourd'hui, et qui tendent à se répandre de plus en plus, sont les machines à transmission directe et à bielle en retour.

340. La disposition des machines marines variant presque à l'infini, suivant le constructeur et même suivant le bateau, nous nous contenterons de donner ici une idée de la disposition dite *bielle en retour*. Le piston moteur P (*fig.* 119), porte deux tiges TT' parallèles, réunies à leur tête par une traverse *ab* sur le milieu de

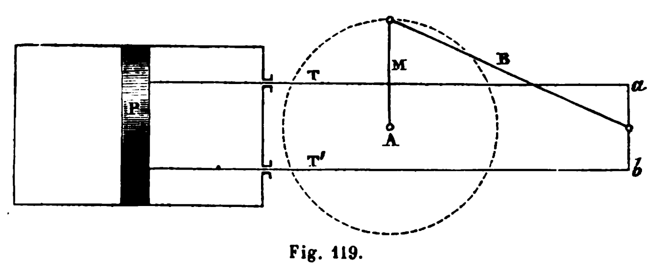


Fig. 119.

laquelle vient s'articuler la bielle B. Cette bielle, dite en retour, revient entre les deux tiges, s'attacher à la manivelle M de l'arbre moteur A, situé près du cylindre. Le plan des deux tiges TT' est perpendiculaire ou oblique à celui de la bielle et de la manivelle.

Cette ingénieuse disposition permettant de rassembler les organes de transmission, et l'arbre moteur se trouvant tout près du cylindre, la machine est bien moins volumineuse, ce qui constitue un grand avantage pour la marine.

341. La présence du volant, sur les machines marines, ayant de graves inconvénients, il a fallu les supprimer, ce qui a conduit, afin de faciliter les passages aux points morts, à accoupler deux machines sur l'arbre moteur dont les manivelles sont à angle droit.

342. Quant au mode d'action de la vapeur, les machines

presque exclusivement employées dans la navigation, sont celles à moyenne pression, à détente et à condensation. Quoique plus embarrassantes que les machines à haute pression sans condensation, on les préfère comme offrant plus de sécurité, et, en outre, en se servant de l'eau de condensation pour l'alimentation des chaudières, on évite les copieux dépôts salins donnés par les eaux de mer et qui encrassent fortement les générateurs. Dans ce cas, comme il ne faut pas mêler l'eau provenant de la vapeur condensée avec celle qui sert à la liquéfier, on emploie des condenseurs à surface.

Les pressions les plus employées dans la marine, sont de 2,5 à 3 atmosphères, et on détend ordinairement à la moitié de la course du piston.

343. Des propulseurs des navires à vapeur. — Pour appliquer les machines à vapeur aux navires, il a fallu trouver des organes propulseurs qui, par leur action sur l'eau, déterminent le mouvement du bateau. Ces propulseurs sont de deux sortes : 1° les *roues à palettes ;* 2° l'*hélice.*

344. Bateaux à roues. — Pour produire le mouvement des navires, on a d'abord employé des roues à aubes planes analogues aux roues pendantes que nous avons décrites (**91**). Elles se trouvent disposées aux deux extrémités d'un arbre horizontal qui traverse le bâtiment perpendiculairement à sa longueur, et vers le milieu de celle-ci. Cet arbre reçoit le mouvement des machines destinées à produire le travail moteur.

Supposons les palettes arrivées à la partie inférieure de la roue, c'est-à-dire au moment où elles sont plongées dans l'eau ; l'action exercée sur le liquide par ces palettes, qui agissent comme des rames, constitue la force motrice qui fait avancer le bateau.

Si l'eau était immobile, le bateau avancerait avec une vitesse égale à celle des aubes, de même qu'une locomotive marche sur les rails avec une vitesse égale à celle de ses roues motrices; mais le liquide, cédant sous l'impulsion des palettes, il en résulte une vitesse de l'eau en sens contraire du mouvement du bateau, et par suite celui-ci avance avec une vitesse qui n'est qu'une fraction de celle des palettes. Une portion du travail transmis par le moteur aux aubes des roues, est absorbée par le liquide pour prendre le mouvement en sens contraire de celui du navire ; par conséquent,

pour faire mouvoir un bateau à l'aide d'un propulseur placé sur lui-même, il faut développer un travail beaucoup plus grand que celui qui serait nécessaire pour vaincre la résistance du liquide. De là résulte la différence entre le travail moteur exercé par la machine et le travail utile employé à la progression du navire.

Les aubes étant fixes et dirigées suivant le rayon, il en résulte un choc à leur entrée dans l'eau, et à leur sortie, elles soulèvent une certaine quantité de liquide. Plusieurs constructeurs, en vue d'éviter cet inconvénient, ont proposé de remplacer les aubes fixes par des palettes articulées, de manière à ce que leur plan reste vertical pendant tout le temps de leur immersion; mais toutes les dispositions adoptées sont assez compliquées et n'ont point résisté dans la pratique.

345. L'emploi des roues à aubes présente, sur mer, de graves inconvénients; lorsque la mer est houleuse, les roues ne fonctionnent qu'imparfaitement, se trouvant tour à tour, tantôt trop submergées, tantôt presque entièrement hors de l'eau. Il en résulte, pour la machine, des résistances très-variables qui en ébranlent fortement toutes les parties; en outre, les larges et hauts tambours augmentent la résistance due à l'action du vent qui a sur eux une assez grande prise. Dans les navires de guerre, on perd, par l'emplacement nécessaire à l'installation de la machine et des roues, une grande partie des moyens d'attaque et de défense; de plus, les roues demeurant constamment exposées aux feux ennemis, un coup bien dirigé peut mettre le bâtiment hors de combat. Il était donc de toute nécessité, pour profiter des avantages de la navigation à vapeur, de remplacer les roues par un autre propulseur qui n'eût pas les mêmes inconvénients. L'hélice, qui est venue résoudre la question d'une manière heureuse, remplit toutes les conditions désirables.

346. De l'hélice. — L'hélice n'est autre chose qu'une surface hélicoïde qui, en vertu de la pression qu'elle exerce sur le liquide en tournant autour de son axe, produit la progression du navire.

Pour nous rendre un compte exact de son action, considérons une vis à filets très-saillants, dont l'axe est placé horizontalement et dirigé dans le sens de la longueur du bâtiment. Si nous imprimons un mouvement de rotation à cette vis, l'eau se comportera

comme un véritable écrou, et la vis avancera, à chaque tour, d'une quantité égale au pas, entraînant avec elle le bateau ; mais en vertu de la mobilité du liquide qui prend un mouvement en arrière, une partie seulement du travail moteur sera employée à produire la propulsion du navire. L'expérience montre que le bateau avance environ des 0,2 ou 0,3 du chemin parcouru par la circonférence extérieure de l'hélice.

Les premières hélices qui ont été employées ressemblaient à de véritables vis ; elles avaient, dans le sens de l'axe, une longueur égale au pas. Plus tard, Smith réduisit cette étendue en disposant sur le même arbre deux hélices d'un demi-pas chacune, placées à 180°. Mais l'expérience ayant démontré qu'une portion d'hélice peu étendue dans le sens de l'axe, suffisait pour la propulsion d'un navire, si toutefois elle a une longueur suffisante dans le sens perpendiculaire à l'axe, on a été conduit à lui donner la forme qui est représentée par la figure 120, et qui fut adaptée au vaisseau français *le Napoléon ;* les ailettes, analogues à celles des moulins à vent, sont au nombre de quatre, disposées à angle droit.

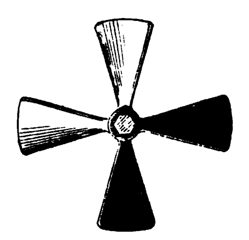


Fig. 120.

L'hélice est disposée à l'arrière du bâtiment, dans le plan vertical qui passe par son axe et au-dessous de la ligne de flottaison, dans un espace laissé libre entre la coque et le gouvernail. L'arbre qui la supporte pénètre à l'intérieur du bâtiment, et reçoit le mouvement de machines installées à fond de cale et le plus près possible de l'arrière; cet arbre présente, sur sa longueur, plusieurs jointures, et porte un appareil d'embrayage au moyen duquel on peut séparer la partie qui reçoit le mouvement de la machine, de celle qui porte l'hélice, de manière à rendre cette dernière folle avec son axe. Pour s'en débarrasser complétement et opérer les réparations nécessaires, ou l'empêcher d'être un obstacle lorsqu'on marche à la voile, on remonte l'hélice dans un puits ménagé au-dessus d'elle, dans la poupe du bâtiment ; mais, avec cette disposition, le propulseur ne peut avoir que deux ailes, car autrement il faudrait donner au puits une trop grande largeur. Or une hélice à quatre ailes donne un rendement de 0,65,

tandis que l'hélice à deux ailes ne donne que 0,55. Pour remédier à cet inconvénient, M. Mangin, ingénieur de la marine, a imaginé l'hélice double (*fig.* 121), qui consiste en deux hélices à deux ailes placées bout à bout, l'une derrière l'autre. Cette hélice peut se loger facilement dans le puits du bâtiment.

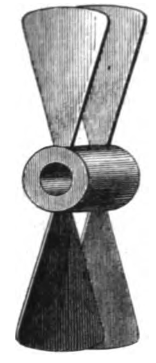


Fig. 121.

Le diamètre de l'hélice est déterminé par le tirant d'eau minimum du navire, car il faut qu'elle reste plongée d'environ 50 centimètres sous l'eau.

L'hélice a l'inconvénient de produire, dans tout le bâtiment, une sorte de trépidation très-incommode pour les voyageurs et même pour l'équipage, ce qui fait que, pour le commerce et pour les paquebots à grande vitesse, on préfère encore le propulseur à roues. Dans la navigation fluviale et surtout dans les canaux, on est souvent obligé de renoncer à l'hélice à cause du faible tirant d'eau qu'ont presque toujours les bateaux.

CHAPITRE VI

MACHINES A VAPEUR COMBINÉES, MACHINES A AIR CHAUD, MACHINES A GAZ

§ 1. — MACHINES A VAPEUR COMBINÉES

347. Lorsque la vapeur d'eau, après avoir agi sur le piston d'une machine, s'échappe, soit dans le condenseur, soit dans l'atmosphère, elle contient encore une grande quantité de chaleur dont la plus grande partie est à l'état latent. On a eu l'heureuse idée d'employer cette chaleur à la vaporisation d'un liquide plus volatil que l'eau, de manière à faire servir la vapeur de ce nouveau liquide à la production d'une nouvelle quantité de travail.

Plusieurs liquides tels que l'éther, le sulfure de carbone, le chloroforme, ont été successivement expérimentés. Les machines construites pour cette double fonction se désignent sous le nom de *machines à vapeur combinées*. Elles se composent de deux pistons manœuvrant dans deux cylindres séparés, et dont les tiges agissent sur un même axe de rotation. Après avoir agi dans l'un des cylindres, la vapeur d'eau se rend dans une capacité où, en se condensant, elle vaporise le liquide destiné à cet effet, et dont la vapeur va agir dans le deuxième cylindre; puis, cette nouvelle vapeur passe dans une capacité où elle est condensée par de l'eau froide, pour être volatilisée et agir de nouveau.

Il est clair que ce double emploi de la vapeur d'eau et d'un liquide plus volatil, doit amener une grande économie de combustible ; mais il y a toujours une perte de ce liquide qui, bien qu'assez faible, est cependant d'une certaine importance.

Les machines à vapeur combinées sont très-peu employées, car il y a beaucoup de précautions à prendre pour éviter les dangers d'explosion et d'incendie.

§ 2. — MACHINES A AIR CHAUD

248. Depuis longtemps, on a songé à employer la force élastique des gaz comme force motrice. L'air atmosphérique se trouvant partout, c'est naturellement sur lui qu'on a expérimenté, en mettant à profit la grande force expansive qu'il acquiert en s'échauffant.

Toutes les machines à air chaud construites jusqu'à ce jour reposent sur le principe suivant : imaginons un cylindre ouvert à sa partie supérieure et dans lequel se trouve une certaine quantité d'air; si nous échauffons cette masse d'air, sa force élastique augmentera et, à un moment donné, sa tension devenant supérieure à la pression atmosphérique, elle soulèvera le piston pour le faire monter. Si alors on refroidit cet air, il reprendra son volume primitif, et la pression atmosphérique n'étant plus équilibrée, fera redescendre le piston, aidée par la pesanteur. On obtient ainsi un mouvement analogue à celui du piston d'une machine à vapeur, que l'on pourra utiliser suivant les besoins.

Ces machines ont le grand avantage de supprimer le générateur et par suite le danger des explosions dont les effets sont presque toujours si terribles. En outre, comme la même masse d'air peut servir indéfiniment, si on imagine que cet air, en se refroidissant, cède la chaleur qu'il a absorbée pour se dilater, à un corps susceptible de la lui rendre un moment après, toute la chaleur fournie par le foyer sera utilisée et transformée en travail. C'est ce que Ericsson a cherché à réaliser dans les premières machines à air chaud qu'il construisit, en plaçant, dans le parcours du gaz, des toiles métalliques qui retenaient la chaleur en excès, lorsque l'air se refroidissait et la restituaient quand il revenait s'échauffer. Mais cette disposition n'a pas donné en pratique les résultats qu'on en attendait, et on a été obligé d'y renoncer.

On n'a pas encore pu employer les machines à air chaud pour les grandes forces, car il faut élever la température de l'air d'environ 350° pour obtenir une pression d'une atmosphère; on conçoit par là que, pour avoir une machine assez puissante, on arrive à de grandes dimensions qui porteraient l'achat à un prix

très-élevé, sans compter que les résistances passives seraient augmentées considérablement.

En somme, ces machines rendent de très-bons résultats pour la petite industrie, là où on a besoin de peu de force, et où le travail a lieu d'une manière intermittente.

349. Moteur Laubereau. — Une des machines à air chaud les plus simples et les plus employées en France, est le moteur Laubereau. La figure 122 représente une de ces machines, construite à Paris dans les ateliers de l'habile ingénieur-mécanicien, M. Clair. Elle se compose d'un socle carré en fonte A, à l'intérieur duquel se trouve le foyer F servant à chauffer la machine. Sur ce socle est placée une pièce C ayant à son centre une partie concave et munie, par côté, d'une console H destinée à supporter un petit cylindre D, ouvert à sa partie supérieure, dans lequel se meut un piston *p* relié à une bielle à fourche *b*, et à une manivelle *m* calée sur l'arbre moteur B. Sur la pièce C est monté un cylindre E dans lequel se meut le piston déplaceur P, dont la tige est reliée à la bielle B′ articulée par son autre extrémité au vilebrequin de l'arbre B portant le volant V et la poulie G. Ce piston, formé par un cylindre à mince paroi, laisse entre lui et les parois intérieures du cylindre E, un petit espace annulaire; au milieu de sa hauteur se trouve un diaphragme garni d'une couche de plâtre recouverte d'une feuille de feutre, servant à

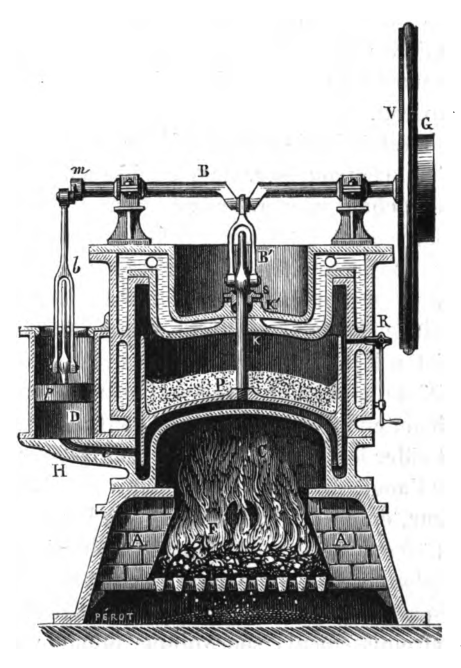


Fig. 122.

empêcher la transmission de la chaleur de la partie inférieure à la partie, supérieure. Les parois latérales et le couvercle du grand cylindre sont munis d'une double enveloppe entre laquelle circule constamment un courant d'eau froide. Au centre des pièces K et K′ se trouve un presse-étoupes S pour le passage de la tige du piston P. Deux paliers, montés sur la pièce K′, servent à supporter l'arbre de la machine. Une lumière *c*, ménagée dans la console H, fait communiquer les deux cylindres entre eux, et un robinet R sert à faire communiquer l'intérieur du cylindre E avec l'atmosphère, pour arrêter la machine. Enfin, la manivelle et le vilebrequin sont calés suivant un angle de 80° environ.

Il est facile de comprendre le fonctionnement de cette machine. L'air contenu dans la chambre chaude se dilate sous l'action de la chaleur, exerce sa pression sur le piston P et lui imprime un mouvement ascensionnel, tandis que le petit piston *p*, subissant sur sa face supérieure l'action de la pression atmosphérique, arrive au point mort inférieur, en refoulant dans cette chambre chaude, l'air qui se trouve sous lui et qui, en se raréfiant, presse le grand piston P jusqu'au haut de sa course. A cet instant, toute la capacité de la chambre froide est occupée par le déplaceur P, et l'air chaud en excès réagit sur le petit piston *p* pour le faire remonter et aider le piston P à passer son point mort supérieur, en vertu de l'angle de calage de la manivelle et du vilebrequin. Le déplaceur, en descendant, tend à faire le vide dans la chambre froide, et c'est à ce moment que l'air dilaté qui agissait sous les deux pistons, se précipite dans la chambre froide en repassant par les espaces libres entre le déplaceur et le réfrigérant, et par suite du refroidissement, son volume diminue rapidement, et ne laisse dans le petit cylindre qu'une tension inférieure à celle de l'atmosphère, ce qui facilite la chute du piston *p*; avant que celui-ci ait terminé sa course descendante, le déplaceur reprend sa course ascendante et les mêmes phénomènes se reproduisent.

§ 3. — MACHINES A GAZ

250. Les machines à gaz, d'une invention toute récente, ont déjà donné, pour de petites forces et jusqu'à trois ou quatre chevaux,

des avantages remarquables. Ici la force motrice est obtenue par la force expansive de l'air résultant de l'inflammation d'une petite quantité d'un gaz combustible qui est ordinairement le gaz d'éclairage.

Ces machines tiennent peu de place et s'installent aisément partout, même à un étage supérieur; tout foyer est supprimé, et par suite elles ne donnent pas de fumée.

351. Moteur Lenoir. — Imaginée par M. Lenoir et fonctionnant depuis 1860, cette machine a été amenée presque directement, sans modification importante, à un degré de perfection qui a permis de l'employer, comme toutes les machines à gaz, très-avantageusement dans certaines circonstances, et surtout là où le travail doit être intermittent.

L'aspect d'une machine Lenoir est à peu près le même que celui d'une machine à vapeur horizontale; les organes de transformation de mouvement s'y trouvent disposés d'une manière analogue. Il s'agit de faire comprendre de quelle manière a lieu l'introduction du mélange inflammable derrière le piston, et comment on produit l'inflammation de ce mélange qui, à ce moment, doit être dans une capacité complétement close; cette dernière condition est indispensable, car autrement les gaz, au lieu d'agir sur le piston, s'échapperaient par l'orifice qui leur donnerait passage, et il n'y aurait pas de travail produit, ou seulement une très-petite quantité.

Deux tiroirs, commandés chacun par un excentrique calé sur l'arbre de la machine, sont disposés de chaque côté du cylindre; l'un des tiroirs est destiné à régler l'introduction du mélange gazeux, et l'autre à permettre l'évacuation des gaz qui ont produit leur action.

Le mélange combustible, qui est formé de gaz d'éclairage et d'air atmosphérique, doit être fait dans un rapport convenable; si l'air, par exemple, n'entrait que pour la moitié, il se produirait une explosion qui pourrait offrir de graves dangers; mais s'il entre pour les 0,8 ou 0,9, l'inflammation a lieu d'une manière successive, passe pour ainsi dire d'un point à un autre, il n'y a qu'une faible détonation et le mouvement est plus régulier. Cette inflammation est produite par une suite d'étincelles électriques, qui jaillissent à l'intérieur du cylindre au moment même où la

lumière d'introduction vient de se fermer. L'électricité est fournie par deux couples de Bunsen, qui mettent en activité un appareil d'induction de Ruhmkorff.

Pour mettre la machine en marche, le piston étant par exemple au fond du cylindre, on fait tourner le volant, à la main, d'une petite quantité, et le vide tend à se faire derrière le piston; l'air et le gaz d'éclairage sont aspirés et viennent se mélanger dans le rapport voulu. Bientôt le tiroir ferme tous les passages, des étincelles jaillissent et enflamment le mélange; cette augmentation rapide du volume des gaz imprime au piston une impulsion très-énergique, et par suite l'arbre de la machine se met en mouvement. Lorsque le piston est arrivé à l'extrémité de sa course qui correspond au point mort de la manivelle, la vitesse acquise du volant lui fera dépasser cette position, et les gaz seront de nouveau aspirés, mais par l'autre extrémité du cylindre; pendant ce temps, les gaz qui ont précédemment servi, s'échapperont par l'autre tiroir dans un conduit qui les mène au dehors. La même série de faits aura lieu à chaque course et la machine continuera son mouvement d'elle-même.

Comme le cylindre s'échauffe rapidement par la combustion des gaz, qui produit une énorme quantité de chaleur, il est muni d'une double enveloppe dans laquelle circule continuellement un courant d'eau froide; ce refroidissement a pour but d'empêcher l'élévation de température des parois qui se détérioreraient rapidement. La circulation s'effectue par la simple différence de température entre l'eau froide affluente et l'eau échauffée par son passage autour du cylindre, qui, en vertu de sa plus grande légèreté, remonte d'elle-même au réservoir. L'établissement de ce réservoir, dont la capacité peut être évaluée à 1 mètre cube 5 par force de cheval et par heure, est un des plus graves inconvénients de ce moteur.

Les machines Lenoir consomment environ $2^{mc},8$ de gaz par force de cheval et par heure; leur prix d'achat, à force égale, n'est qu'à peu près les trois quarts de celui d'une machine à vapeur. On commence à les employer beaucoup dans les constructions, pour l'élévation des matériaux; leur installation est facile et leur mise en train immédiate.

352. Les machines à gaz inventées par M. Hugon paraissent

avoir quelque supériorité sur celles de M. Lenoir. L'inflammation du mélange gazeux n'a plus lieu au moyen de l'électricité : on la produit par l'intermédiaire d'un bec de gaz, que le mouvement du tiroir amène, tantôt à l'intérieur pour produire l'inflammation, tantôt à l'extérieur pour le rallumer à une lumière fixe, pendant qu'une nouvelle quantité de mélange pénètre dans le cylindre. La consommation du gaz s'élève à peu près, comme dans les machines précédentes, à 2600 ou 3000 litres par force de cheval et par heure.

353. Machine atmosphérique à gaz. — Nous ne pouvons pas, en terminant cet ouvrage, passer sous silence la machine atmosphérique à gaz de MM. Otto et Langen, de Cologne, qui, quoique simple, est d'une combinaison très-remarquable et très-ingénieuse. Elle diffère des moteurs Lenoir et Hugon, en ce qu'elle est à simple effet; le principe de sa combinaison repose sur le double emploi de la combustion du gaz et de la pression atmosphérique, par action intermittente. Elle se compose essentiellemeut d'un cylindre vertical ouvert à sa partie supérieure, et dans lequel glisse un piston plein, dont la tige, façonnée en crémaillère, est terminée par une traverse embrassant deux guides verticaux solidement fixés au cylindre. A la partie inférieure de celui-ci, arrive un mélange d'air et de gaz d'éclairage qui s'introduit au moment de l'aspiration; l'inflammation de ce mélange a lieu par un bec de gaz analogue à l'inflammateur des machines Hugon. La combustion du mélange produit la force ascensionnelle qui porte le piston au sommet de sa course; dans cette période, le piston et sa tige sont sans action sur le mécanisme; la crémaillère engrène avec une roue montée folle sur l'arbre moteur. Au moment où le piston va redescendre, son isolement cesse instantanément, sa tige agit sur le même engrenage qui, pendant la descente, devient fixe au moyen d'une disposition particulière, et l'arbre moteur est entraîné avec son volant, par l'effet des gaz déjà refroidis et contractés, au-dessus desquels agissent à la fois la pression atmosphérique et le poids du piston et de sa tige. Par cette disposition, le travail dû à l'explosion est éliminé, et la machine n'utilise que celui qui provient de la pression atmosphérique et de la pesanteur. A la partie inférieure de la course, le piston est de nouveau isolé; mais en vertu de la vitesse acquise et de la force vive em-

magasinée par le volant, l'arbre moteur continue son mouvement de rotation et dispose les organes pour permettre une nouvelle inflammation, et par suite une nouvelle course ascendante.

La partie inférieure du cylindre est à double enveloppe dans laquelle circule un courant d'eau froide pour refroidir le cylindre; mais la consommation en est beaucoup moindre que dans les autres machines à gaz, et il suffit d'un petit réservoir ou vase que l'on place à côté de la machine. Celle-ci a la propriété toute caractéristique et exclusive de permettre de varier la course du piston dans des limites assez étendues.

254. Des expériences comparatives exécutées sur cette machine et sur le moteur Lenoir ont fourni les conclusions suivantes.

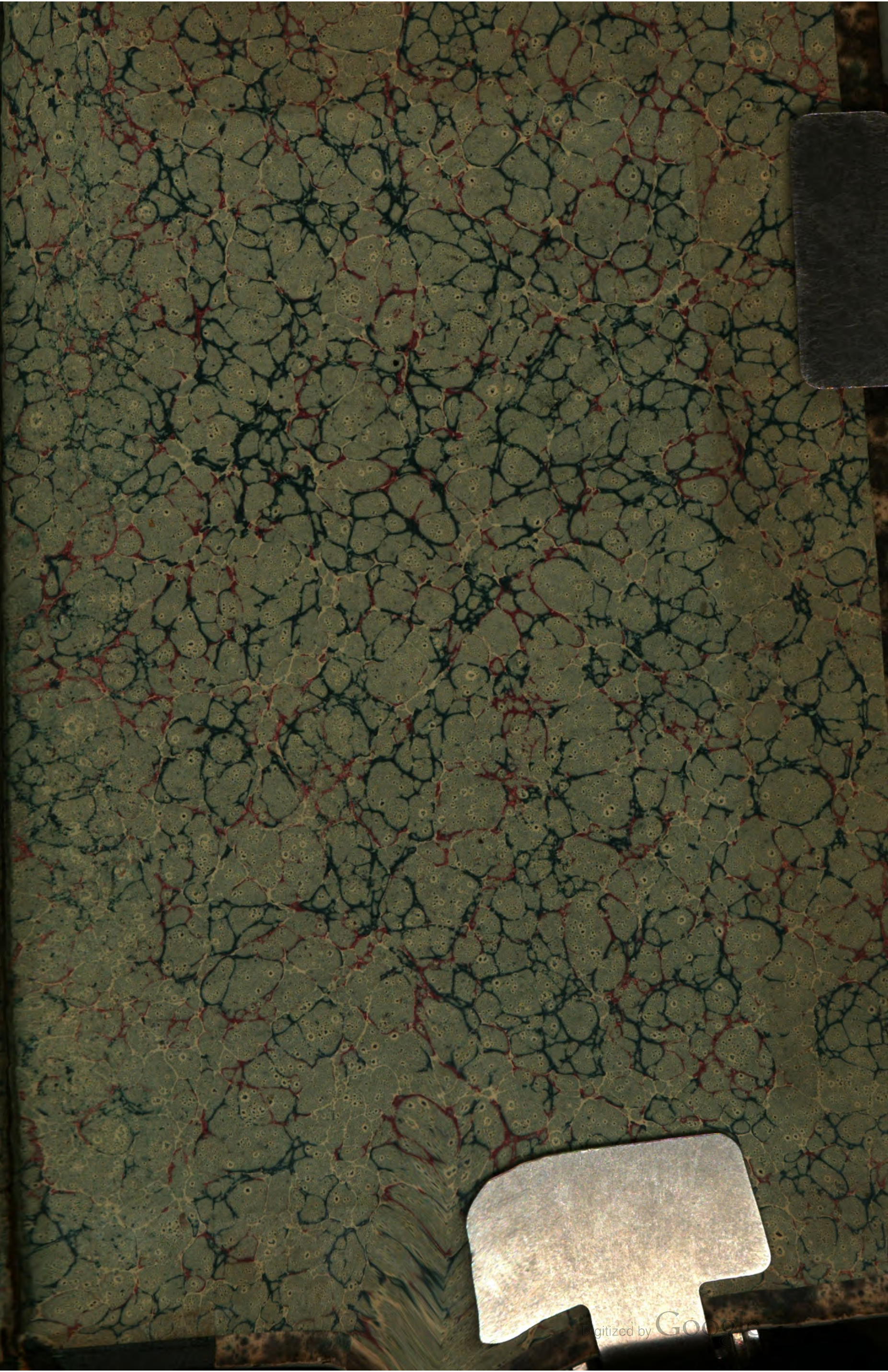
POINTS DE COMPARAISON	LENOIR	OTTO ET LANGEN
Prix de revient des deux machines types.	1000 fr.	500 fr.
Température des cylindres pendant le travail . . .	200°	50°
Chaleur perdue rapportée à la chaleur totale. . .	60 0/0	0,2 0/0
Dépense de gaz par cheval et par heure	2800 lit.	1000 lit.
Dépense d'eau.	100 lit.	7 lit.
Dépense d'inflammation.	0 fr. 05	0 fr. 01
Graissage par heure	0 fr. 10	0 fr. 01

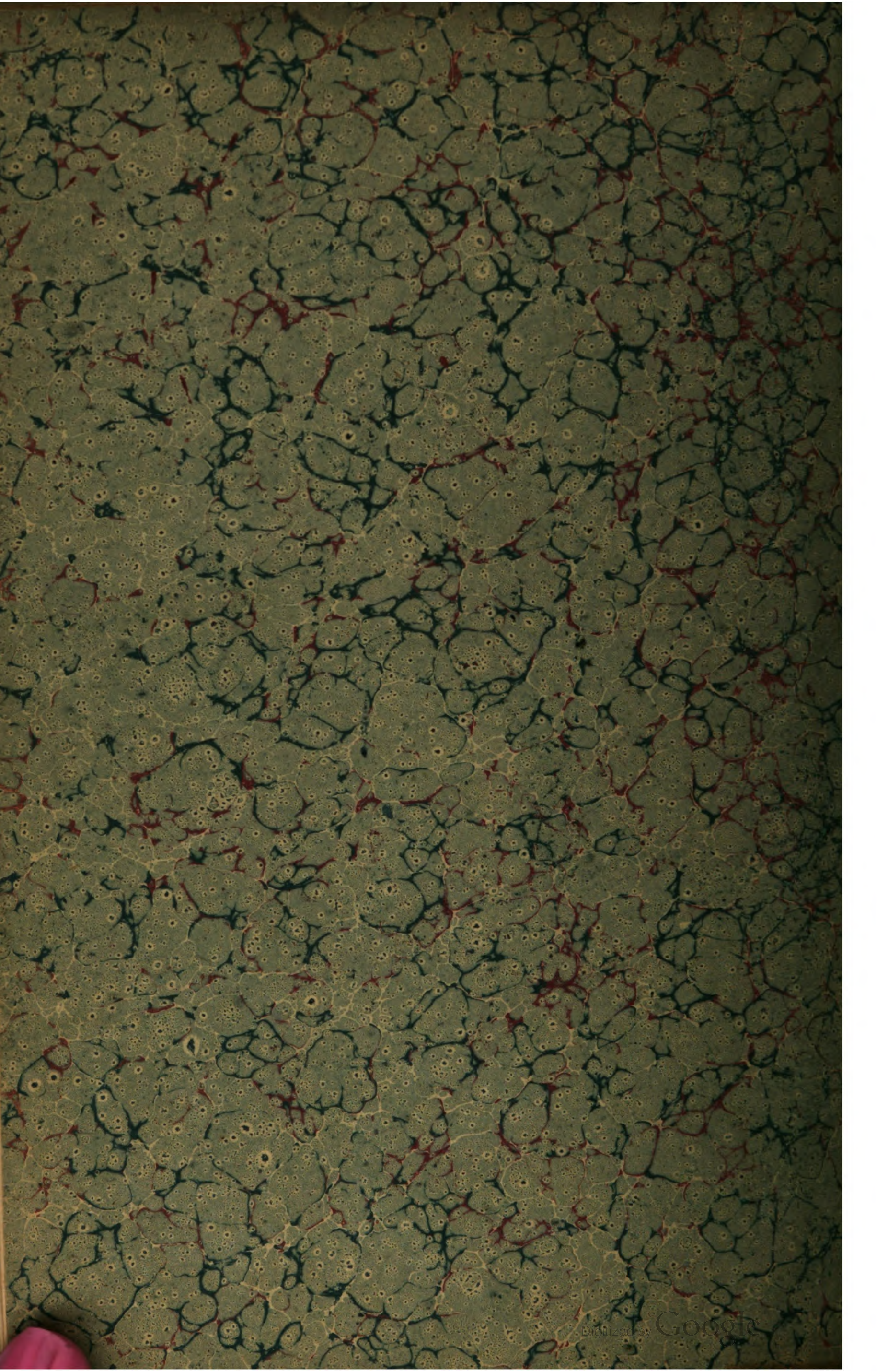
FIN

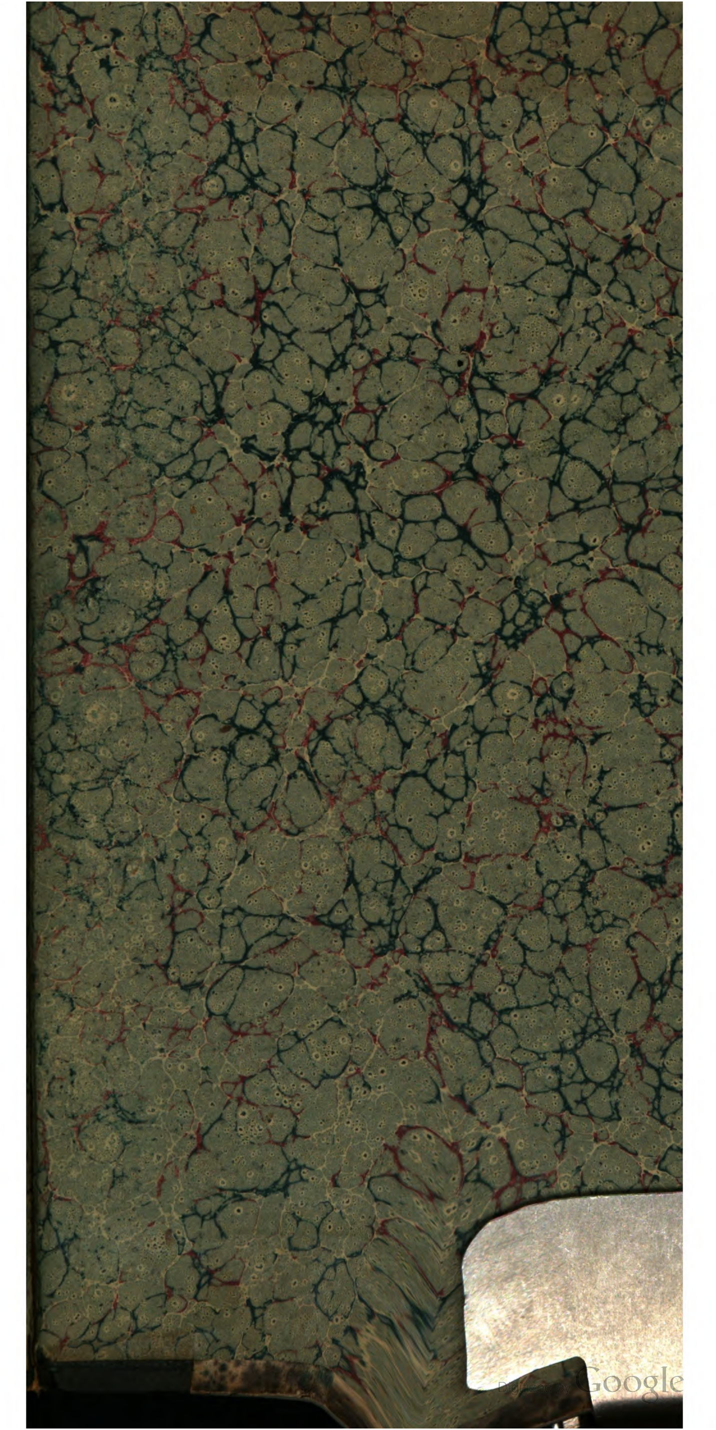
TABLE DES MATIÈRES

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.





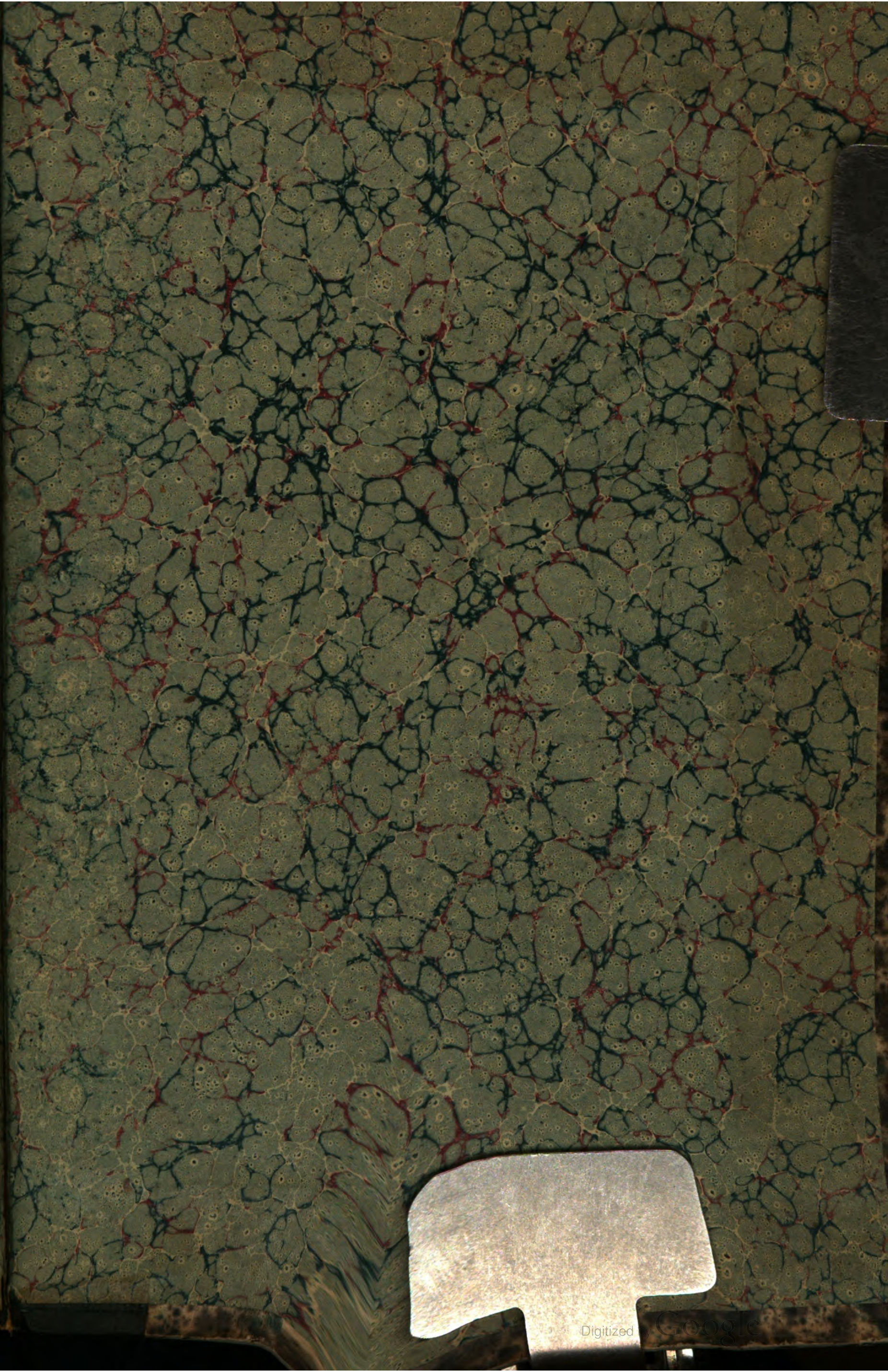


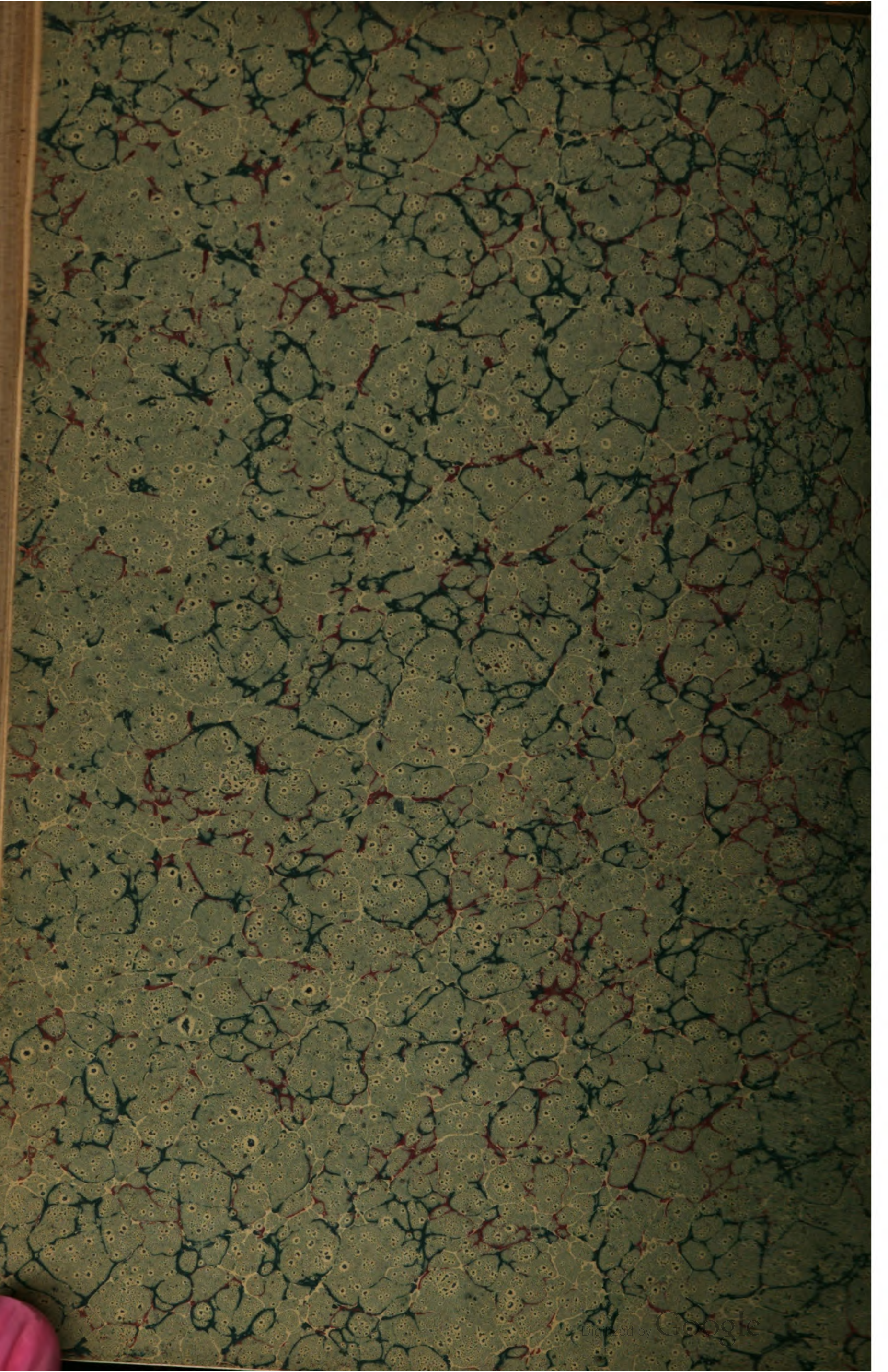


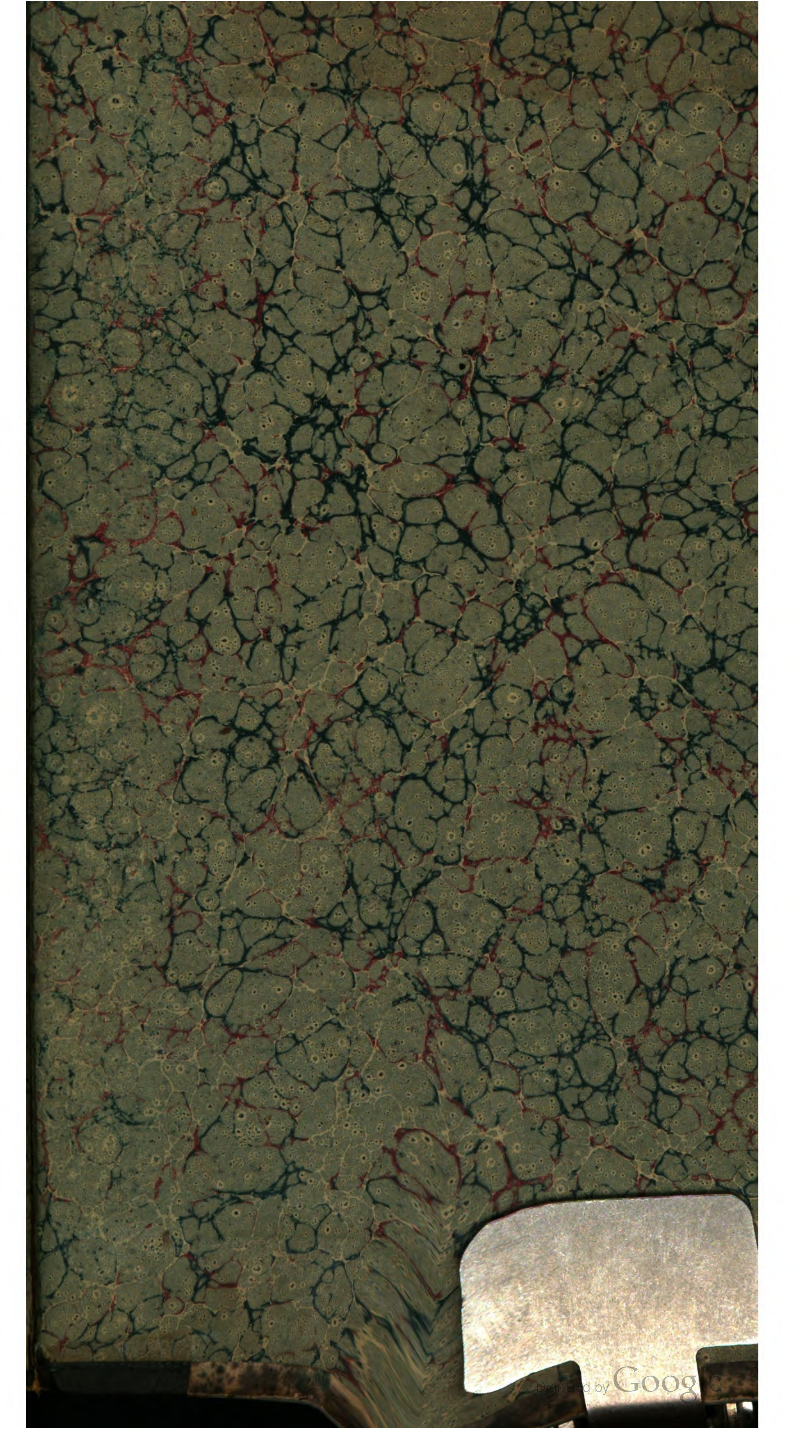




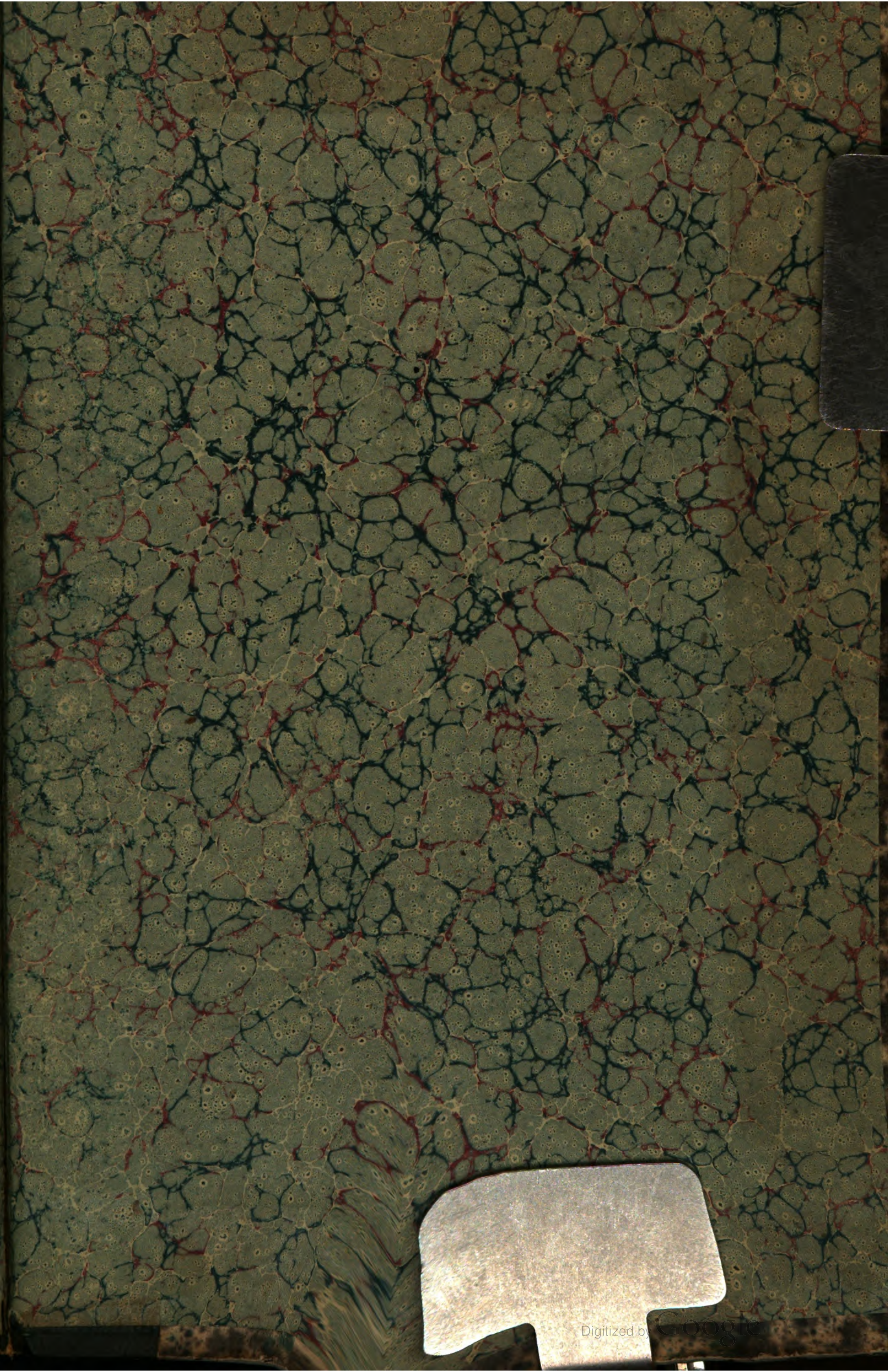


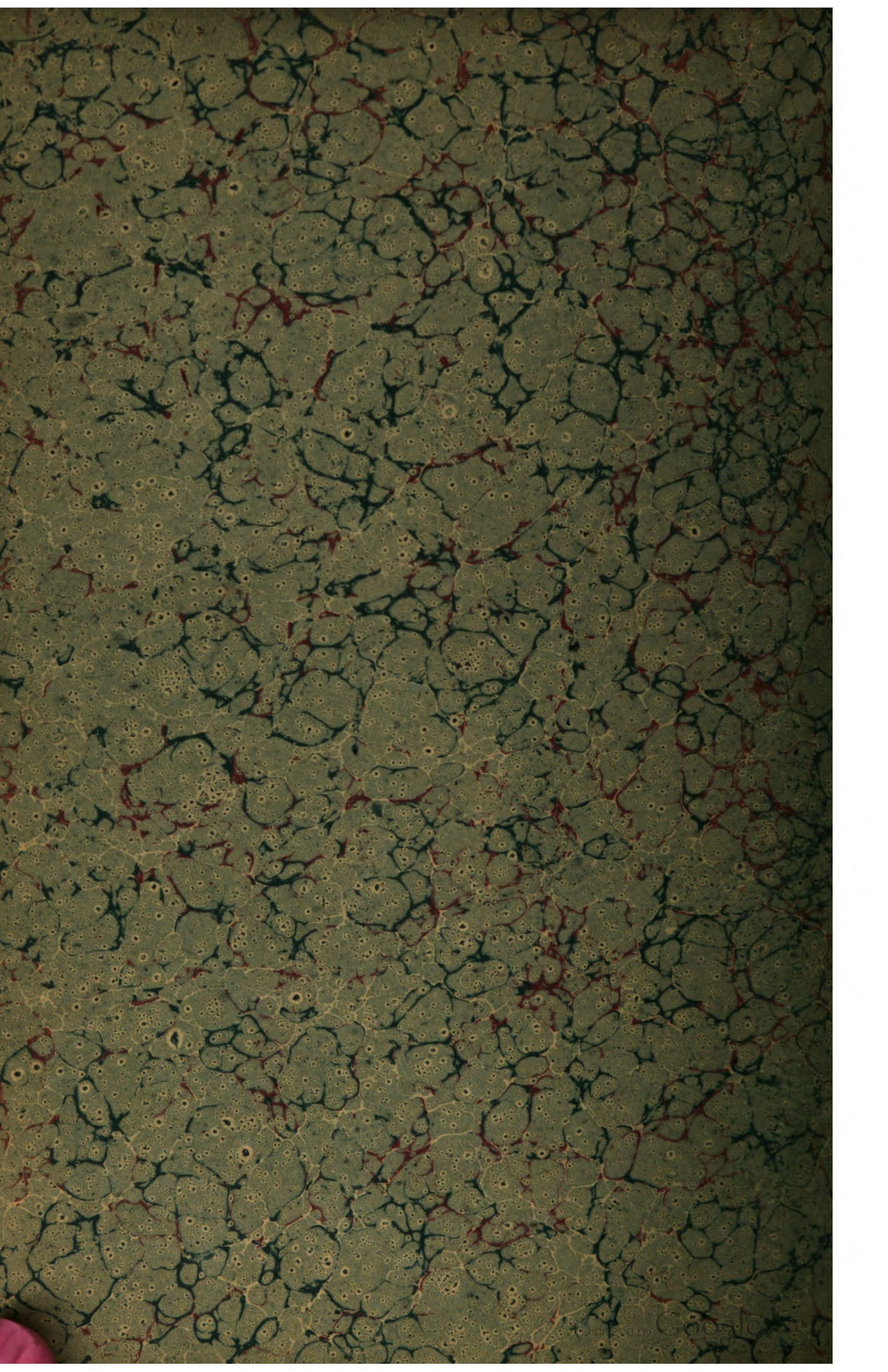




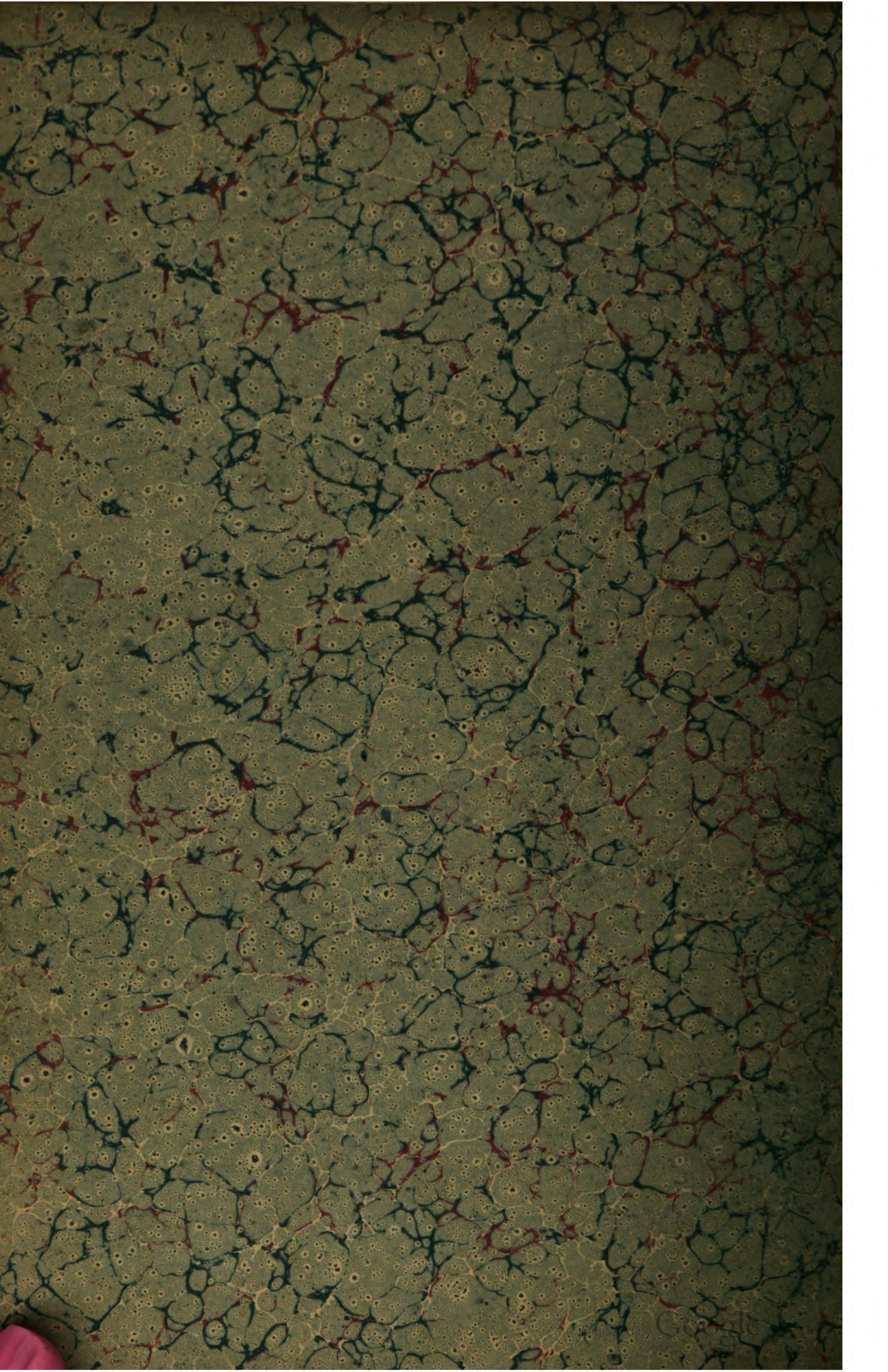




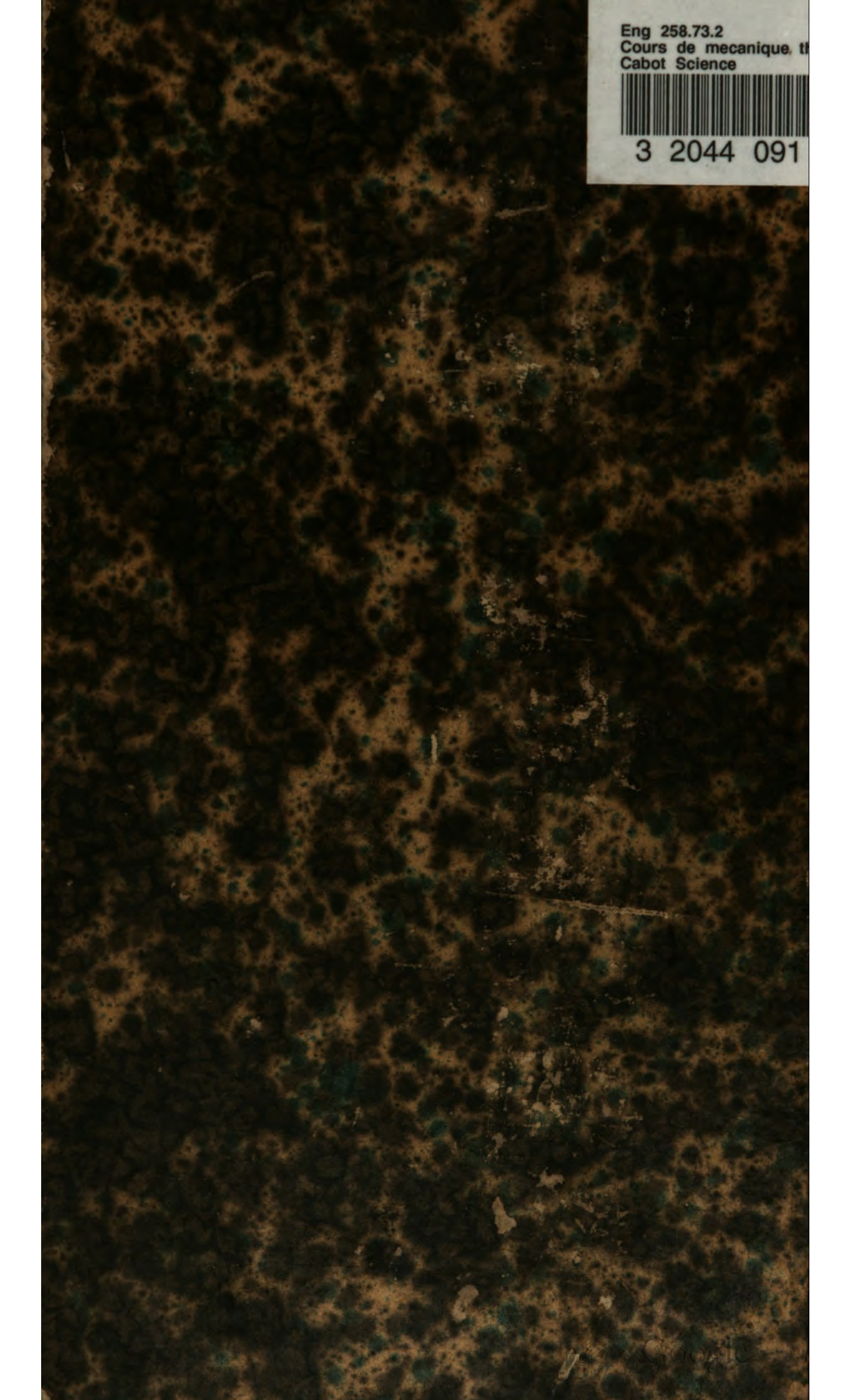











Eng 258.73.2
Cours de mecanique, th
Cabot Science
3 2044 091